

С.Д. Творогов

ПРИМЕНЕНИЕ РЯДОВ ДИРИХЛЕ В АТМОСФЕРНОЙ СПЕКТРОСКОПИИ

Обсуждаются проблемы, возникающие при привлечении рядов Дирихле для вычисления интегральных по спектру характеристик излучения. Сделан обзор полученных в Институте оптики атмосферы СО РАН результатов, снимающих значительное число и методических, и конкретных вопросов.

1. Введение в проблему рядов экспонент как метода анализа функции поглощения

Специфика атмосферной спектроскопии связана в значительной степени с вычислением функции поглощения Q атмосферных газов [1, 2]. Прежде всего, это само интегрирование по частоте ω «частотола» большого числа спектральных линий. Перекрытие полос поглощения разных газов приносит свои трудности: общая Q – отнюдь не произведение функций поглощения компонент, а именно они и измеряются экспериментально. Нельзя написать Q для неоднородной (по термодинамическим параметрам) среды, даже если Q есть для любого термодинамически однородного случая. Наконец, часто надобно знать «функцию источника» – интегрированное по спектру решение задачи о распространении света в поглощающей и излучающей молекулярной атмосфере.

Проблемы эти усугубляются, и значительно, в моделях климата – программа для Q не должна превышать весьма незначительный процент всего объема компьютерной реализации модели. Но требования к точности расчета по-прежнему остаются высокими, и весьма.

Убедительная иллюстрация на тему – уравнение переноса для аэрозольно-молекулярной среды: тривиальное в задаче о распространении волн молекулярное поглощение ставит при вычислении интегральных по спектру величин все предыдущие вопросы, а характеристики рассеяния, создающего главные математические сложности, не зависят от ω в довольно значительном спектральном интервале. Ситуация выглядит явно неудовлетворительной – придется многократно решать уравнение переноса, меняя каждый раз лишь фигурирующий как параметр коэффициент молекулярного поглощения, а затем еще и численно интегрировать по ω .

Один из популярных приемов разрешения возникающих здесь проблем связан с рядами экспонент. Начальная идея высказана В.А. Амбарцумяном еще в 1936 г., и ныне есть уже несколько статей обзорного характера – см., например, [3–19] и довольно обширную библиографию там.

Математические определения поясним примером функции пропускания (равной $1 - Q$)

$$F(x) = \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\omega'}^{\omega''} d\omega \exp(-x \kappa(\omega)) \quad (1)$$

для интервала $\Delta\omega = \omega'' - \omega'$ и трассы луча длиной x в однородной среде с молекулярным коэффициентом поглощения $\kappa(\omega)$. Ряд экспонент – представление (1) в виде

$$F(x) = \sum_{\nu} b_{\nu} \exp(-s_{\nu} x) \quad (2)$$

с абсциссами s_{ν} и ординатами b_{ν} .

Пример с уравнением переноса хорошо поясняет прагматическую значимость (2). Как выясняется [20], теперь интегральная интенсивность есть $\sum_{\nu} b_{\nu} I_{\nu}$, где I_{ν} – решение уравнения переноса, в котором «просто числа» s_{ν} заменяют $\kappa(\omega)$; и уравнение переноса надо решать лишь столько раз, сколько слагаемых в сумме (2).

Совершенно ясно, что эффективность (2) целиком регламентируется рациональным выбором b_{ν} и s_{ν} . Кратко обсудим некоторые существенные для истории вопроса аспекты.

Уже достаточно давно идея (2) ассоциируется с преобразованием Лапласа

$$F(x) = \int_0^{\infty} ds f(s) \exp(-sx), \quad (3)$$

ведь достаточно интеграл заменить подходящей квадратурной формулой. (Например, типа Гаусса для $f(s)$, чтобы минимизировать число слагаемых в (2)). Далее $f(s)$ полагается часто соответствующей $F(x)$ для определенных моделей полос поглощения с корректировкой их параметров по экспериментальным или расчетным данным с теоретическим $\kappa(\omega)$. Конечно, можно найти немало поводов для критики подобного приема, но в хорошей прагматической разумности ему отказать нельзя.

Весьма привлекательной выглядит идея трактовать b_{ν} как плотность вероятности ($\sum_{\nu} b_{\nu} = 1$ следует из (1) и (2) при $x = 0$) того, что $\kappa(\omega)$ равно s_{ν} – ведь тогда можно апеллировать (скажем, при рассмотрении перекрывающихся спектров) к формальным правилам теории вероятностей. И, казалось бы, (3) предоставляется шанс обосновать подобную позицию. Действительно, из (2) и (5) следует, что

$$f(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dx \exp(sx) \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\omega'}^{\omega''} d\omega \exp(-x\kappa(\omega)), \quad c > 0. \quad (4)$$

Если в (4) переставить интегрирования, то появится $f(s) = (\Delta\omega)^{-1} \int_{\omega'}^{\omega''} \delta(s - \kappa(\omega)) d\omega$. Возникающая

здесь δ -функция приводит по известному сценарию теории вероятности к функции распределения величины s . Однако, как несложно установить стандартными приемами математического анализа, перестановка интегралов в (4) невозможна, и поэтому вероятностное истолкование ординат формулы (2) остается лишь сугубо произвольным заявлением.

Значение обсуждаемого математического элемента (4) даже несколько шире. В самом деле, следствием последней (и, как выясняется, некорректной) редакции будет $f = \sum (\Delta\omega)^{-1} |\kappa'(\tilde{\omega}(s))|^{-1}$ с суммой по корням $\tilde{\omega}(s)$ уравнения $\kappa(\omega) = s$. В сущности, такое же выражение появится после замены $s = \kappa(\omega)$ в (1) переменной интегрирования. Но акция эта запретна, ибо экстремальные точки, где $\kappa'(\omega) = 0$, неизбежны в силу самой структуры $\kappa(\omega)$ как суммы спектральных линий. Собственно поэтому и оказался вынужденным окольным путь построения $f(s)$.

Несомненно, весьма желательна такая процедура для (2), когда, во-первых b_{ν} и s_{ν} вычисляются непосредственно через $\kappa(\omega)$, и, во-вторых, она инвариантна относительно всех представленных прежде проблем функции поглощения.

Далее, во многих статьях по поводу (2) господствует «физический уровень строгости», хотя современная теория [21–23] рядов Дирихле (так математики именуют разложения вида (2)) предоставляет возможность иметь куда более совершенный «математический климат». (В качестве примера можно сослаться на определенную популярность связи f и $\kappa'(\omega)$ – последствие математически неверного обращения с (4)).

Последние обстоятельства мы рассматриваем как свидетельство того, что потенциальные возможности метода «ряды экспонент» реализованы еще далеко не полностью, и иллюстрации тому – [24–29]. Обсуждение подобных новых элементов составляет позитивное содержание статьи.

2. Метод вычисления коэффициентов ряда экспонент по банкам спектроскопической информации

Суть предлагаемого приема проще пояснить для случая однородной среды, по-прежнему полагая (1) исходной величиной.

Прежде всего надобно преодолеть возникающую в (4) математическую проблему, чтобы сохранить очень конструктивную идею связи (2) и (3). Как выясняется, достигается это введением функции

$$g(s) = \int_0^s f(s) ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dx}{x} F(x) \exp(sx) \quad (5)$$

с очевидным следствием (3)–(5)

$$F(x) = \int_0^1 dg \exp(-xs(g)), \quad s(g) \equiv g^{-1}(g). \quad (6)$$

После замены в (5) F выражением (1) перестановка интегрирования уже возможна, и это влечет за собой основную формулу метода

$$g(s) = \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\kappa(\omega) \leq s; \omega \in [\omega', \omega'']} d\omega. \quad (7)$$

Переход от (6) к (2) – просто применение квадратурных формул –

$$F(x) = \sum_n b_v \exp(-xs(g_v)) \quad (8)$$

Как убеждают численные оценки, в ряде (8) достаточно не более 5–6 слагаемых при обращении к формулам типа Гаусса или Чебышева (g_v – их абсциссы).

Весьма существенно, что b_v в (8) – «просто числа» – ординаты формул численного интегрирования, а зависимость от термодинамических параметров среды полностью представлена в $s(g)$. Обстоятельство это весьма значимо при решении уже перечисленных проблем атмосферной спектроскопии и этим (8) выгодно отличается от следствия (3)

$$F(x) = \sum_v a_v \exp(-x s_v). \quad (9)$$

Здесь «просто числа» – абсциссы s_v квадратурных формул, но физические величины входят в ординаты g_v .

Интересны математические тонкости сравнения (8) и (9). Из теории рядов Дирихле явствует, что в (9)

$$s_v = \lambda_v, \quad a_v = \int_0^\infty \frac{L(s)f(s) ds}{\lambda - \lambda_v} \frac{1}{L'(\lambda_v)}.$$

Целая функция $L(\lambda)$ с простыми нулями λ_v должна фигурировать в разложении экспоненты

$$\exp(-\lambda x) = \sum_v \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_v} \frac{1}{L'(\lambda_v)} \exp(-x\lambda_v).$$

Конечно же, стремление иметь в (2) минимальное число слагаемых является доминирующим. И выражение для a_v гласит, что ради этого $L(\lambda)$ должно быть среди полиномов, ортогональных с весом $f(s)$ – тогда (9) превратится в формулу типа Гаусса. Но, с другой стороны, разложение экспоненты должно существовать – принадлежит оно к числу тех, которые начи-

наются со слов «Если найдено такое $L(\lambda)$, что ... ». И совмещение обоих условий происходит отнюдь не автоматически.

Между тем свойства $s(g)$ – следующие из (7) монотонность, непрерывность и ограниченность – как раз и представляют возможность привлечь формулы Гаусса, Чебышева и др., гарантируя тем самым эффективность (8).

Тему эту продолжает еще одно следствие

$$a_v = \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\omega \in \lambda_{v-1} \leq \kappa(\omega) \leq \lambda_v} d\omega$$

теории рядов Дирихле. Структура этого выражения почти такая же, как у (7), однако снова появляется прежний камень преткновения – надобность искать функцию $L(\lambda)$. Переход к (8) – математически точное исключение подобной проблемы.

Далее, уже отмеченные свойства $s(g)$ позволяют трактовать (6) как переход к одной «эффективной» линии, заменяющей «решетку» спектральных линий у $\kappa(\omega)$. В сущности, появляется некая основа для систематизации попыток (см., например, анализ в [30]) решить подобную задачу, опираясь на чисто физические аргументы. Существование же эффективной линии упрощает, и порой весьма серьезно, вычисление некоторых радиационных величин.

Ряды экспонент, и это даже несколько неожиданно, позволяют увидеть достаточно тонкие детали периферии контура, имея экспериментальные данные, по существу, о центральной части линии. В [3] показано, что после дисперсионного контура при некоей смещенной частоте $\delta\omega$ начинается экспоненциальный спад коэффициента поглощения и участки эти, как свидетельствует (7), не существенны для $g(s)$, а следовательно, и коэффициентов ряда (8). Сама $\delta\omega$ зависит от температуры, и функцию эту несложно восстановить, сопоставляя расчеты при вариации $\delta\omega$ с экспериментальными сведениями о Q – величину ее несомненно определяют соответствующие центральной части линии интервалы.

Теория рядов (2) дает еще математическую подоплеку для вычисления b_v и $k_v \equiv s(g_v)$ непосредственно через $F(x)$. Можно показать, что функция $K(\lambda) = \prod(1 - \lambda/k_v)$ пригодна на роль $L(\lambda)$ в разложении экспоненты, что влечет за собой систему уравнений

$$\frac{1}{\Delta\omega} \int_{\omega'}^{\omega''} \frac{K(\kappa(\omega)) d\omega}{\kappa(\omega) - k_v} = b_v K'(k_v)$$

относительно k_v . Левую часть несложно написать через «моменты» ($m = 1, 2 \dots$)

$$w_m = \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\omega'}^{\omega''} \kappa^{(m)}(\omega) d\omega = (-1)^m \frac{\partial^m F(x)}{\partial x^m}$$

и производные вычислять через $F(x)$ после ее аналитического продолжения. Прагматическая полезность подобной процедуры просто в том, что для климатических и геофизических приложений надобно в подавляющем большинстве случаев иметь только функцию поглощения, и надежнее поэтому использовать экспериментальные данные именно о ней.

Основное соотношение (7) оказывается полезным и при поиске коэффициентов довольно эффективного как вычислительный прием разложения $F(x)$ по ортогональным экспоненциальным функциям $D_m = \sum_{m'} C_{mm'} \exp(-x \zeta_{m'})$. Далее ζ_m объявляются параметрами, минимизирующими

$$\int_0^{\infty} D_m(x) D_{m'}(x) dx = \delta_{mm'}$$

– средство написать $C_{mm'}$ через ζ_m .

3. Обобщения метода

Достаточно очевидны применения предложенного приема разложения функции поглощения в ряд экспонент для уже перечисленных задач атмосферной спектроскопии.

а) Неоднородная среда

Здесь (1) заменяется выражением

$$H = \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\omega'}^{\omega''} d\omega \exp \left(- \int_{(l)} dl' \kappa(\omega, l') \right)$$

с криволинейным интегралом $\int_{(l)} dl' \dots$ по трассе луча длиной l ; κ – функция l' из-за зависимости коэффициента поглощения от термодинамических характеристик пространственно неоднородной атмосферы.

Для приведения H к виду (2) достаточно заменить τ на $x\tau$, применить (7) и затем положить $x = 1$. Тогда

$$H = \sum_{\nu} b_{\nu} \exp \left(- \tilde{s}(g_{\nu}, l) \right); \quad \tilde{g}(s, l) = \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\tau(\omega, l) \leq s; \omega \in [\omega', \omega'']} d\omega; \quad \tilde{s}(g, l) = \tilde{g}^{-1}(g, l)$$

с прежним определением b_{ν} .

Эти точные выражения делают сугубо математической проблему вычислительных упрощений H , и наиболее естественное из них

$$H = \sum_{\nu} b_{\nu} \exp \left(- \int_{(l)} dl' s(g, l') \right),$$

когда $s(g, l')$ определено по процедуре (7) для каждого l' . Последнее соотношение обсуждалось довольно энергично, однако на уровне только эвристическом.

Как выясняется, с рядами экспонент хорошо сочетается весьма распространенный прием редукции к (1), когда трасса луча проходит с зенитным углом θ в неоднородной по высоте Z (между Z_1 и Z_2) атмосфере; $P(Z)$, $\Theta(Z)$ – соответственно давление и температура. Достигается это введением аппроксимации

$$\tilde{\kappa}(\omega, Z) = \tilde{\kappa}(\omega, Z_0) \frac{P(Z)}{P(Z_0)} \left(\frac{\Theta(Z_0)}{\Theta(Z)} \right)^{\alpha} \equiv \tilde{\kappa}(\omega, Z_0) \xi(Z)$$

и заменой x в (1) на величину, пропорциональную $\sec \theta \int_{z_1}^{z_2} \xi(Z) \beta(Z) dZ$ с $\beta(Z)$ – парциальным

давлением поглощающего газа; α и Z_0 исполняют роль параметров, и $\kappa = \tilde{\kappa}\beta$.

б) Перекрывание полос поглощения различных газов

Теперь коэффициент поглощения $\kappa(\omega) = \sum_n \kappa_n(\omega)$ с суммированием по компонентам газовой смеси. Принципиальных проблем здесь нет – достаточно в (7) заменить κ только что выписанной суммой.

Конечно же, вычислительные неудобства вполне очевидны – κ_n зависит от парциального давления соответствующего газа, и для каждого набора их расчет по (7) с теперешней суммой должен проходить заново. Хотелось бы иметь дело с $s_n(g)$ – величинами (7) для отдельного κ_n – и приближение

$$F(x) = \sum_{\nu} b_{\nu} \exp \left(-x \sum_n s_n(g_{\nu}) \right)$$

выглядит вполне разумным. По своему математическому содержанию оно близко к рассмотренному в подп. За и устанавливается аналогичными средствами. (Правда, надежность его не-

сколько меньше). Добавим еще, что в обоих случаях то обстоятельство, что b_v – только числа, как раз и подчеркивает определенные математические преимущества варианта (8).

Более изощренный вариант связан с тем, что, например, в смеси двух газов жертвуем монотонностью функции (7) для компоненты с меньшим поглощением ($n = 2$, ради определенности).

Вместо $s_2(g)$ вводим $z(g)$ в аналогичное (6) соотношение

$$\tilde{F}(x_1, x_2) = \int_0^1 dg \exp(-x_1 s_1(g) - x_2 z(g)).$$

Здесь $x_{1,2} = \beta_{1,2} x$, $\beta_{1,2}$ – парциальные давления газов в смеси. (Конечно же, переход к \tilde{F} полагается совершенным). Относительно $z(g)$ формулируется вариационная задача: минимизируется

различие между \tilde{F} и F в стиле метода наименьших квадратов при дополнительном условии перехода к точному варианту при $x_1 = 0$. Как выясняется, функция $z(g)$ обретает максимум, и его положение оказывается хорошим параметром подгонки.

с) Функция источника

Величина, именуемая функцией источника, есть, по определению,

$$S = \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\omega'}^{\omega''} d\omega B(\omega) \exp(x \kappa(\omega))$$

с некоторой B . Чаще всего в качестве ее фигурирует производная по температуре от функции Планка – задача о потоках теплового излучения в атмосфере. (Обычно $x\kappa \rightarrow \tau$ как в подп. За, и тогда необходимы соответствующие коррективы). Другой вариант – аппаратная функция при измерениях спектральными приборами.

Точное разложение S в ряд экспонент имеет вид (8) с заменой $s(g_v)$ на $s_u(g_v)$, $s_u = g_u^{-1}(g)$,

$$g_u(s) = \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\omega'}^{\omega''} d\omega u(\omega) h(\omega), \quad h(\omega) = \begin{cases} 1, & \kappa(\omega) \leq s, \\ 0, & \kappa(\omega) > s \end{cases} \quad u(\omega) = B/\tilde{B}, \quad \tilde{B} = (\Delta\omega)^{-1} \int_{\omega'}^{\omega''} B(\omega) d\omega,$$

и перед суммой (8) надо написать \tilde{B} .

Выписанное соотношение для g_u вновь можно использовать при поиске сугубо вычислительных приближений. Надежным представляется вариант, когда $g_u \cong y(s)g(s)$ с прежним выражением (7), и

$$y(s) = \frac{1}{s \Delta\omega} \int_{\omega_1(s)}^{\omega_2(s)} u(\omega) d\omega; \quad \omega_1(s) = \omega' + (1/2)(1 - s/s'), \quad \omega_2 = \omega'' - (1/2)(1 - s/s').$$

4. Уравнение переноса для интегральных по частотам величин в аэрозольно-молекулярной среде с излучением

Пусть $I(\mathbf{p}, \mathbf{r}, \omega)$ – спектральная интенсивность луча, идущего в точке \mathbf{r} в направлении орта \mathbf{p} . Уравнение переноса

$$\mathbf{p} \text{ grad } I = -(\sigma(\mathbf{r}) + \kappa(\mathbf{r}, \omega)) I(\mathbf{p}, \mathbf{r}, \omega) + \int d\mathbf{p}'(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{p}') I(\mathbf{r}, \mathbf{p}', \omega) + \eta(\omega, \mathbf{r}). \quad (10)$$

Здесь ϕ – индикатриса рассеяния; σ и η – коэффициенты аэрозольного ослабления и полного излучения, $\eta = \eta^{(1)} + \eta^{(2)}$; и слагаемые относятся соответственно к аэрозолю и молекулам.

Необходима величина

$$A(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\omega'}^{\omega''} I(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \omega) d\omega, \quad (11)$$

и характеристики аэрозоля φ , σ , $\eta^{(1)}$ можно принять неменяющимися в пределах $\Delta\omega$.

Остроумнейший прием упрощения задачи (10), (11) придуман в [20], и ряды экспонент играют роль, хотя и не заглавную, но очень существенную. Однако решение [20] проходит лишь для однородной среды без излучения, и необходимые обобщения опираются на новые, обсуждаемые в этой статье, элементы.

Как выясняется, нельзя обойтись без небольших приближений. Первое из них – неравенство

$$\frac{1}{\sigma} \text{grad } \kappa(\mathbf{r}, \omega) \ll 1$$

во многих приложениях атмосферной оптики почти несомненно. Другое – фактически неизбежное привлечение аппроксимации с $s(g, l)$ из рядов экспонент для неоднородной молекулярной среды.

Для (10) $I = I^{(0)} + I'$; $I^{(0)}$ – решение однородной задачи ($\eta = 0$ в (10)) со стандартным для проблемы переноса граничным условием – входящим извне светом через поверхность занятого средой объема; I' – частное решение неоднородного уравнения со «свободным» слагаемым η и нулевым граничным условием – собственное излучение среды. Величина (11) в конечном счете обретает вид $A = \sum_{\nu} b_{\nu} A_{\nu}$ с теми же, как во всех аналогичных выражениях, ординатами

b_{ν} квадратурных формул. И, в соответствии со структурой интенсивности, $A_{\nu} = A_{\nu}^{(0)} + A'_{\nu}$. Здесь мы выпишем итоги вычисления слагаемых последних соотношений.

Величина $A_n^{(0)}$ – решение уравнения (10) с $\eta = 0$, граничным условием и, главное, с заменой селективного по частоте молекулярного коэффициента поглощения κ числом $s(g_{\nu}, \mathbf{r})$ – расчетом по подп. За с \mathbf{r} как параметром.

Появляется даже возможность снять (правда, эвристически) второе из упомянутых прежде приближений заменой $s(g, \mathbf{r})$ на $\mathbf{p} \text{ grad } \tilde{s}(g, \mathbf{r})$, где \tilde{s} – точный вариант (см. подп. За) для $\tau = \int_0^{\infty} (\omega, \mathbf{r} - \mathbf{p}R) dR$; аналогичная акция возможна и при построении решения неоднородного уравнения.

Далее, $A'_{\nu} = A_{\nu}^{(1)} + A_{\nu}^{(2)}$ в соответствии с уже отмеченным разделением коэффициента излучения. Первое слагаемое – частное решение (10), в котором $\eta \rightarrow \Omega(\mathbf{r})q$, $\kappa \rightarrow \gamma(g_{\nu}, \mathbf{r})$,

$$\Omega = (\Delta\omega)^{-1} \int_{\omega'}^{\omega''} B d\omega \text{ с функцией Планка } B, q - \text{ коэффициент аэрозольного поглощения; через } \gamma$$

обозначена функция s_{ii} из подп. Зс для \mathbf{r} . При вычислении второго слагаемого вместо η естественно фигурирует $\Omega\gamma$ (другие замены прежние), но не исключена надобность заменить B на $B\rho$, где множитель ρ описывает нарушение локального термодинамического равновесия. (Например, в верхних слоях атмосферы или в очень далеких крыльях полос поглощения [31]).

1. Зуев В.Е., Макушкин Ю.С., Пономарев Ю.Н. Спектроскопия атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1987. 247 с.
2. Зуев В.Е., Титов Г.А. Оптика атмосферы и климат. Томск: изд-во «Спектр» ИОА СО РАН, 1996. 271 с.
3. Yamamoto G., Tanaka M., Asano S. // J. Atmos. Sci. 1970. V. 27. P. 282.
4. Arking A., Grossman K. // J. Atmos. Sci. 1972. V. 29. P. 937.
5. Lacis A.A., Hansen J.E. // J. Atmos. Sci. 1974. V. 31. P. 118.
6. Lion K.N., Sasamori T. // J. Atmos. Sci. 1975. V. 32. P. 2166.
7. Chou M.D., Arking A. // J. Atmos. Sci. 1980. V. 37. P. 855.
8. Chou M.D., Arking A. // J. Atmos. Sci. 1981. V. 38. P. 798.
9. Isaacs R.G., Wang W.-C., Worsham R.D., Goldenberg S. // Appl. Opt. 1987. V. 26. P. 1272.
10. Wang W.-C., G.-Yu Shi // JQART. 1988. V. 39. P. 397.
11. Xun Zhu // J. Atmos. Sci. 1989. V. 46. P. 511.

12. Goody R., West R., Chen L., Grisp D. // JQSRT. 1989. V. 42. P. 539.
13. Phillips W.J. // JQSRT. 1990. V. 43. P. 13.
14. Si-Chee Tsay, Stamnes K., Jaywecre K. // JQSRT. 1990. V. 43. P. 133.
15. Laciš A. A., Oinas V. // J. Geophys. Res. 1991. V. 96D. P. 9027.
16. Xun Zhu // JQSRT. 1991. V. 45. P. 33.
17. Xun Zhu // JQSRT. 1992. V. 47. P. 159.
18. Riviere Ph., Siufiani A., Taine J. // JQSRT. 1992. V. 48. P. 187.
19. Hollweg H.-D. // J. Geophys. Res. 1993. V. 98D. P. 2747.
20. Van de Hulst H.C., Irvin W.M. // Meteor. Soc. Roy. Sci. Liege. 1963. Ser. 5-7. N 1. P. 78.
21. Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент. М.: Наука, 1976. 534 с.
22. Леонтьев А. Ф. Последовательность полиномов из экспонент. М.: Наука, 1980. 384 с.
23. Леонтьев А. Ф. Целые функции. Ряды экспонент. М.: Наука, 1980. 172 с.
24. Творогов С. Д. // Оптика атмосферы и океана. 1994. Т. 7. N 3. С. 315.
25. Firsov K.M., Mitsel A.A. // JQSRT. 1995. V. 54. P. 549.
26. Фирсов К. М., Смирнов А. Б. // Оптика атмосферы и океана. 1995. Т. 8. N 8. С. 1248.
27. Творогов С. Д., Несмелова Л. И., Родимова О. Б. // Оптика атмосферы и океана. 1996. Т. 9. N 3. С. 373.
28. Несмелова Л. И., Творогов С. Д. // Оптика атмосферы и океана. 1996. Т. 9. N 8. С. 1141.
29. Фирсов К. М., Смирнов А. Б. // Тез. докл. II Межреспубликанского симпозиума «Оптика атмосферы и океана». Томск, 1995. Ч. 1. С. 27.
30. Зуев В. Е. Распространение видимых и инфракрасных волн в атмосфере. М.: Сов. радио, 1970. 496 с.
31. Несмелова Л. И., Родимова О. Б., Творогов С. Д. Контур спектральной линии и межмолекулярное взаимодействие. Новосибирск: Наука, 1986. 215 с.

Институт оптики атмосферы СО РАН,
Томск

Поступила в редакцию
13 января 1997 г.

S. D. Tvorogov. Application of the Dirichle Series in Atmospheric Spectroscopy.

Problems appearing in applications of the Dirichle series for calculations of the characteristics integrated over spectrum are discussed. The review is given of the results obtained in the Institute of Atmospheric Optics SB of RAS which settle many of methodical and computational questions.