

ТУРБУЛЕНТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В АТМОСФЕРЕ И ОКЕАНЕ

УДК 535.416.3

Ю.Н. Исаев, Е.В. Захарова

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО БАЗИСА ДЛЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ

Представлены алгоритмы для расчетов матриц преобразования, связывающих коэффициенты оптимального базиса Карунена–Лоэва–Обухова с базисами Уолша и Хаара в разложениях фазы оптической волны. Численное моделирование проводилось для колмогоровского спектра турбулентности и круглой апертуры. Анализ результатов численного эксперимента показывает, что разработанные алгоритмы позволяют рассчитывать матрицы преобразования с точностью, приемлемой для управления волновыми фронтами.

Оптическое излучение при распространении в турбулентной атмосфере искажается случайным образом на неоднородностях среды. При исследовании таких случайных волновых полей часто используют разложение фазы волны по заданной системе базисных функций [1, 2].

Оптимальной для представления волны, прошедшей случайно-неоднородную среду, является ортонормированная система функций, удовлетворяющая условиям теоремы Карунена–Лоэва–Обухова (КЛО) [3, 4]. Базис КЛО является решением вариационной задачи по минимизации нормы ошибки разложения случайной фазы в пределах приемной апертуры с априорной информацией в виде корреляционной функции фазы. Задача нахождения функций КЛО для колмогоровской турбулентности среды распространения решена в работах авторов [2, 5].

Однако базис КЛО, будучи оптимальным, не обладает свойствами быстрых преобразований, что не позволяет отслеживать динамику волны в реальном масштабе времени. Поэтому авторами найдены аналитические соотношения [6], позволяющие осуществить переход в разложениях фазы оптической волны из базисов функций Уолша и вэйвлетов Хаара, чьи разложения относятся к классу быстрых, к статистически оптимальному базису КЛО.

Для круглой приемной апертуры функции КЛО удобнее представлять в факторизованном виде, разделяя радиальную и азимутальную компоненты:

$$\psi_k(\mathbf{p}) = R_j(\rho) \Theta^l(\theta), \tag{1}$$

где $\mathbf{p} = \{x, y\} = (\rho, \theta)$. Функции Уолша $Wal(\mathbf{p})$ и Хаара $H(\mathbf{p})$ в этом случае представляются аналогично:

$$Wal_{nm}(\mathbf{p}) = Wal_n(\rho)Wal_m(\theta),$$

$$H_{nm}(\mathbf{p}) = H_n(\rho)H_m(\theta).$$

Азимутальная компонента функций КЛО $\Theta^l(\theta)$ имеет следующий вид:

$$\Theta^l(\theta) = \exp(il\theta), l \in \mathbf{Z}. \tag{2}$$

Разложение в ряд функций $\Theta^l(\theta)$ по функциям Уолша дает азимутальную матрицу преобразования $\mathbf{b}^l = (b_1^l, b_2^l, \dots, b_N^l)$:

$$\Theta^l(\theta) = \sum_{n=0}^N b_n^l Wal_n(\theta). \tag{3}$$

Связь экспоненциальных функций с функциями Уолша, определяемая матрицей \mathbf{b}^l , широко используется в быстрых преобразованиях и хорошо освещена в литературе [7, 8].

Аналогичным образом вычисляются матрицы преобразования для азимутальных компонент функций КЛО через функции Хаара $H_m(\theta)$.

Радиальная компонента функций КЛО через функции Уолша представляется следующим образом:

$$R_j^l(\rho) = \sum_{n=0}^N d_n^l Wal_n(\rho), \tag{4}$$

где коэффициенты $\mathbf{d}_j^l = (d_{j1}^l, d_{j2}^l, \dots, d_{jN}^l)$ являются собственными векторами матрицы Грама с элементами

$$A_{ps}^l = \frac{1}{N^2} \int_0^1 \int_0^1 \rho M_l(\rho, \rho') Wal_p(\rho) Wal_s(\rho') d\rho d\rho'. \tag{5}$$

Здесь $M_l(\rho, \rho')$ – ядро однородного интегрального уравнения Фредгольма второго рода [6, формула (10)], координата ρ нормирована на радиус апертуры.

При проведении численного эксперимента для нахождения собственных чисел и собственных век-

торов матрицы Грама использовался метод Якоби [9].

Численное моделирование функций КЛО через функции Уолша и Хаара проводилось для колмогоровского спектра турбулентности. Для этой модели структурная функция имеет вид [1]

$$D(\rho) = \frac{6,88}{r_0^{5/3}} \rho^{5/3},$$

где r_0 – радиус Фрида. Вид ядра $M(\rho, \rho')$ для колмогоровской модели турбулентности приводится в [6].

На рис. 1 показан вид радиальных компонент для первых функций КЛО, разложенных по 8 (рис. 1, *a*) и 32 (рис. 1, *б*) функциям Уолша. Из рисунка видно, что для $N = 32$ радиальные компоненты функций КЛО $R'_j(\rho)$ практически совпадают с радиальными компонентами функций КЛО, вычисленными с высокой точностью в [5] и [10], и намного превышают точность оптимальных функций, вычисленных в [11].

Ниже приводится явный вид матриц преобразования для радиальных компонент функций КЛО $R'_j(\rho)$ через функции Уолша для $j = \overline{1, N}$, $N = 8$, и нескольких первых азимутальных индексов l .

Следует отметить, что сумма квадратов элементов в каждой строке и столбце есть норма функции $R'_j(\rho)$. Эта величина постоянна и в данном случае равна единице, поскольку базис является ортонормированным:

$$\sum_{n=1}^N (d_{jn}^l)^2 = 1.$$

Очевидно, что близость к единице может служить критерием точности вычисления коэффициентов разложения базиса КЛО.

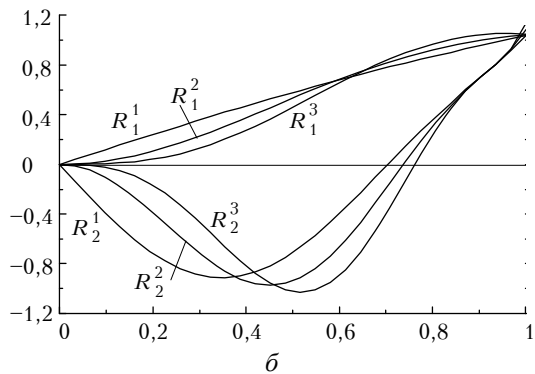
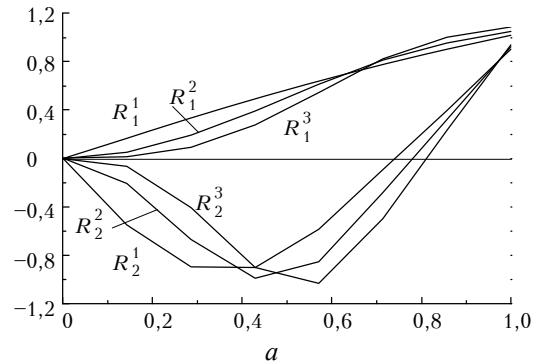


Рис. 1. Вид радиальных компонент функций КЛО в разложении по N функциям Уолша: $a - N = 8$; $б - N = 32$

Коэффициенты разложения $R'_j(\rho)$ по вэйвлетам Хаара были определены с помощью аналогичной процедуры.

Однако при наличии коэффициентов разложения радиальной компоненты $R'_j(\rho)$ через функции Уолша коэффициенты разложения $R'_j(\rho)$ в базисе Хаара можно определить другим способом, используя тесную связь между функциями Уолша и Хаара, выражающуюся в матрице преобразования [12].

$$\begin{pmatrix} R_1^{\pm 1} \\ R_2^{\pm 1} \\ R_3^{\pm 1} \\ R_4^{\pm 1} \\ R_5^{\pm 1} \\ R_6^{\pm 1} \\ R_7^{\pm 1} \\ R_8^{\pm 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,850 & -0,461 & -0,228 & -0,029 & -0,114 & -0,014 & -0,006 & 0,002 \\ 0,340 & 0,584 & 0,144 & -0,632 & 0,086 & -0,306 & -0,109 & -0,106 \\ 0,127 & 0,501 & -0,528 & 0,414 & -0,148 & 0,121 & 0,009 & -0,496 \\ -0,052 & -0,096 & 0,166 & -0,313 & -0,329 & 0,259 & 0,740 & -0,374 \\ -0,017 & -0,223 & 0,027 & 0,110 & 0,723 & -0,377 & 0,226 & -0,470 \\ -0,027 & -0,097 & -0,087 & -0,336 & 0,374 & 0,747 & -0,347 & -0,227 \\ -0,134 & 0,051 & -0,698 & -0,283 & 0,250 & -0,017 & 0,381 & 0,454 \\ 0,354 & 0,354 & 0,355 & 0,354 & 0,353 & 0,354 & 0,353 & 0,353 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Wal_1 \\ Wal_2 \\ Wal_3 \\ Wal_4 \\ Wal_5 \\ Wal_6 \\ Wal_7 \\ Wal_8 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} R_1^{\pm 2} \\ R_2^{\pm 2} \\ R_3^{\pm 2} \\ R_4^{\pm 2} \\ R_5^{\pm 2} \\ R_6^{\pm 2} \\ R_7^{\pm 2} \\ R_8^{\pm 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,798 & -0,550 & -0,219 & 0,010 & -0,107 & 0,008 & 0,010 & 0,050 \\ -0,346 & -0,389 & -0,183 & 0,753 & -0,126 & 0,334 & -0,015 & -0,029 \\ -0,178 & -0,478 & 0,575 & -0,133 & 0,131 & -0,051 & -0,359 & 0,493 \\ 0,082 & 0,236 & -0,440 & 0,280 & 0,399 & -0,358 & -0,523 & 0,324 \\ 0,112 & 0,003 & 0,084 & -0,131 & 0,398 & 0,544 & -0,504 & -0,506 \\ 0,017 & 0,259 & -0,230 & -0,221 & -0,524 & 0,522 & -0,282 & 0,454 \\ -0,252 & -0,257 & -0,450 & -0,374 & 0,498 & 0,262 & 0,382 & 0,257 \\ 0,360 & 0,360 & 0,364 & 0,362 & 0,341 & 0,348 & 0,344 & 0,348 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Wal_1 \\ Wal_2 \\ Wal_3 \\ Wal_4 \\ Wal_5 \\ Wal_6 \\ Wal_7 \\ Wal_8 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} R_1^{\pm 3} \\ R_2^{\pm 3} \\ R_3^{\pm 3} \\ R_4^{\pm 3} \\ R_5^{\pm 3} \\ R_6^{\pm 3} \\ R_7^{\pm 3} \\ R_8^{\pm 3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,754 & -0,604 & -0,212 & 0,071 & -0,110 & 0,032 & -0,003 & 0,071 \\ -0,340 & -0,202 & -0,286 & 0,776 & -0,135 & 0,354 & -0,051 & -0,117 \\ -0,189 & -0,344 & 0,411 & 0,056 & 0,178 & -0,019 & -0,612 & 0,517 \\ -0,111 & -0,288 & 0,567 & -0,234 & -0,429 & 0,494 & 0,225 & -0,225 \\ -0,208 & -0,409 & 0,275 & 0,229 & 0,218 & -0,573 & 0,531 & -0,060 \\ -0,123 & 0,086 & -0,165 & -0,010 & -0,615 & -0,144 & 0,284 & 0,687 \\ 0,254 & 0,269 & 0,356 & 0,358 & -0,485 & -0,428 & -0,328 & -0,286 \\ 0,382 & 0,384 & 0,392 & 0,392 & 0,305 & 0,312 & 0,321 & 0,326 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Wal_1 \\ Wal_2 \\ Wal_3 \\ Wal_4 \\ Wal_5 \\ Wal_6 \\ Wal_7 \\ Wal_8 \end{pmatrix},$$

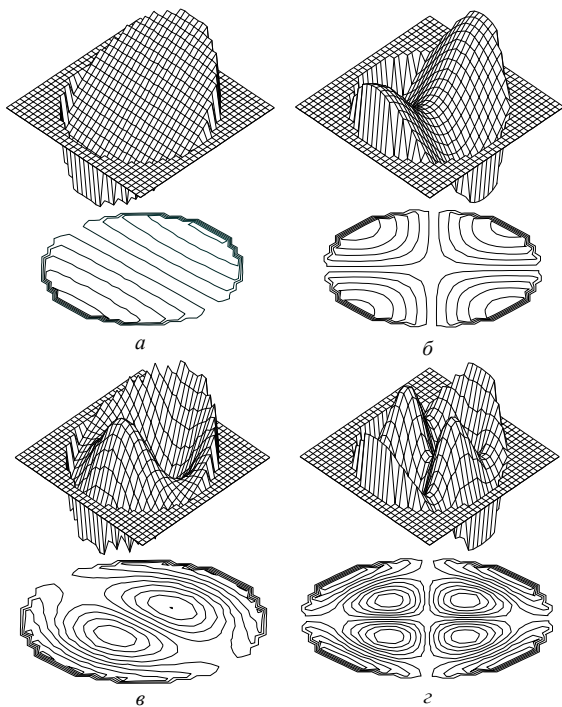


Рис. 2. Пространственный вид функций КЛО $\psi_k(\rho)$, представленных в базисе функций Хаара $H_{nm}(\rho)$, $N=32$: а, б, в, г – при k , равных соответственно 2, 4, 8, 13

На рис. 2 показан пространственный вид первых функций КЛО $\psi_k(\rho)$, представленных через ограниченное число функций Хаара. Из рисунка видно, что данные функции КЛО практически совпадают с функциями КЛО, вычисленными через полиномы Цернике с высокой точностью в [5].

В работах, посвященных оптимальному базису разложения фазы волны, функции КЛО определяются из численного решения интегрального уравнения [10], либо для их вычисления используются аппроксимации [11, 13]. Авторы разработали эффективный метод вычисления функций оптимального базиса и рассчитали в численном эксперименте функции КЛО через функции Уолша и через вэйлеты Хаара для колмогоровской модели атмосферной турбулентности в пределах круглой апертуры с высокой точностью.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 96-02-18791, и Института «Открытое общество» (ISSEP), грант N a97-1388.

1. Воронцов М.А., Шмальгаузен В.И. Принципы адаптивной оптики. М.: Наука, 1985. 336 с.
2. Аксенов В.П., Исаев Ю.Н. Оптимальное модовое разложение фазы, восстановленной по измерениям наклонов волнового фронта в турбулентной атмосфере. Ч. I. Представление аббераций в базисе Карунена-Лозва-Обухова // Оптика атмосферы и океана. 1994. Т. 7. № 7. С. 947–954.

3. *Обухов А. М.* Турбулентность и динамика атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1988. 414 с.
4. *Ван Трис Г.* Теория обнаружения оценок и модуляции. М.: Сов. радио, 1972. 744 с.
5. *Аксенов В.П., Банах В.А., Захарова Е.В., Исаев Ю.Н.* Оптимальное модовое разложение фазы, восстановленной по измерениям наклонов волнового фронта в турбулентной атмосфере. Ч. II. Погрешность алгоритмов и численный эксперимент // Оптика атмосферы и океана. 1994. Т. 7. №7. С. 955–959.
6. *Исаев Ю.Н., Захарова Е.В.* Представление функций Карунена–Лоэва–Обухова в базисах Уолша и Хаара // Оптика атмосферы и океана. 1997. Т. 10. № 8. С. 959–966.
7. *Залмазон Л.А.* Преобразование Фурье, Уолша, Хаара и их применения в управлении, связи и других областях. М.: Наука, 1989. 496 с.
8. *Трахтман А.М., Трахтман В.А.* Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. М.: Сов. радио, 1975. 208 с.
9. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
10. *Wang J. Y., Markey J. K.* Modal compensation of atmospheric turbulence phase distortion // JOSA. 1978. V. 68. N 1. P. 78.
11. *Ярославский Л.П.* Цифровая обработка сигналов в оптике и голографии: Введение в цифровую оптику. М.: Радио и связь, 1987. 296 с.
12. *Шишаков К.В., Шмальгаузен В.И.* Полиномиальное разложение атмосферных аберраций // Оптика атмосферы и океана. 1990. Т.3. № 12. С.1244–1248.
13. *Dai Guang-ming.* Modal compensation of atmospheric turbulence with the use of Zernike polynomials and Karhunen–Loeve functions // JOSA A. 1995. V. 12. N 10. P. 2182–2193.

Институт оптики атмосферы СО РАН,
Томск

Поступила в редакцию
18 ноября 1997 г.

Yu.N. Isaev, E.V. Zakharova. **Synthesis of the Optimal Basis to Reconstruct Random Wave Fields.**

Algorithms to calculate transformation matrixes connecting coefficients of the optimal Karhunen–Loeve–Obukhov basis with the Walsh and Haar bases in expansions of optical wave phase are presented. Numerical simulation was performed for the Kolmogorov spectrum of turbulence and circle aperture. Analysis of the numerical experiment results shows that the algorithms developed allow the transformation matrixes to be calculated with the accuracy which is admissible to control wavefronts.