

УДК 621.373.826:535.3

П.А. Бакут, Ю.П. Шумилов

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ В РАССЕИВАЮЩИХ СРЕДАХ
(Точное решение одномерного уравнения переноса)**

Рассматривается задача распространения излучения в неоднородных рассеивающих средах на основе аппарата уравнений переноса. Получено точное решение одномерного уравнения переноса для такой среды. Аналитические выражения для сигнала, распространяющегося в среде, и сигнала обратного рассеяния получены в частных случаях непрерывного сигнала и импульсного для однородной среды. Даны анализ и интерпретация приложений результатов для дистанционного зондирования распределенных образований, слоистых сред и т.д.

Введение

В настоящее время в связи с задачами дистанционного зондирования распределенных образований большой интерес приобретают теоретическое исследование распространения сигнала в рассеивающей среде и расчет сигнала обратного рассеяния. Для разработки алгоритмов диагностики сред особенно важно выявить зависимость сигнала обратного рассеяния от параметров среды. Математическим аппаратом решения такого рода задач является аппарат уравнений переноса излучения. Уравнениям переноса посвящено много публикаций, из которых отметим монографии [1–5]. Однако из-за сложности задачи явных аналитических решений получено мало. Вместе с тем при распространении узкого лазерного луча можно пренебречь рассеянием излучения в стороны и свести дело к одномерному уравнению переноса, которое допускает точные решения. В настоящей статье строятся точные решения одномерного уравнения переноса для однородной и кусочно-неоднородной рассеивающих сред. Получены явные аналитические формулы, описывающие деформацию лазерного импульса при распространении в рассеивающей среде и форму сигнала обратного рассеяния.

1. Решение одномерного уравнения переноса

Рассмотрим одномерную задачу распространения излучения в рассеивающей среде. Пусть фотоны движутся вдоль оси z и не рассеиваются в стороны. На пути $(z, z + dz)$ фотон может поглотиться с вероятностью $\gamma(z) dz$ ($\gamma(z)$ – показатель поглощения), отразиться с вероятностью $\sigma(z) dz$ ($\sigma(z)$ – показатель отражения) либо «выжить» с вероятностью $1 - \gamma(z) dz - \sigma(z) dz = 1 - \varepsilon(z) dz$ ($\varepsilon(z) dz$ – показатель ослабления). В одномерном случае ситуация характеризуется двумя функциями: $p(t, z)$ – среднее число фотонов в точке z в момент времени t , движущихся в направлении возрастания z , и $q(t, z)$ – среднее число

фотонов, движущихся в противоположном направлении. Уравнение переноса излучения в данном случае представляет собой систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{1}{V(z)} \frac{\partial p(t, z)}{\partial t} + \frac{\partial p(t, z)}{\partial z} + \varepsilon(z) p(t, z) = \sigma(z) q(t, z) + \frac{1}{V(z)} f(t, z), \tag{1}$$

$$\frac{1}{V(z)} \frac{\partial q(t, z)}{\partial t} - \frac{\partial q(t, z)}{\partial z} + \varepsilon(z) q(t, z) = \sigma(z) p(t, z) + \frac{1}{V(z)} g(t, z), \tag{2}$$

где $f(t, z) dt$ – среднее число «положительно направленных» фотонов, генерируемых в точке z за время dt внешним источником (излучателем); $g(t, z) dt$ – аналогичное число «отрицательно направленных» фотонов; $V(z)$ – скорость движения фотонов.

Предположим, что передатчик расположен в точке $z = 0$ и генерирует только «положительно направленные» фотоны, т.е. $f(t, z) = \delta(z) f(t)$, $g(t, z) = 0$, $f(t)$ – функция, характеризующая форму и энергию сигнала, $\delta(z)$ – дельта-функция Дирака, $i = \sqrt{-1}$.

Преобразуя (1), (2) по Фурье, получим

$$\tilde{\varepsilon}(i\omega, z) P(i\omega, z) + \frac{\partial P(i\omega, z)}{\partial z} = \sigma(z) Q(i\omega, z) + \frac{1}{V} F(i\omega) \delta(z), \tag{3}$$

$$\tilde{\varepsilon}(i\omega, z) Q(i\omega, z) - \frac{\partial Q(i\omega, z)}{\partial z} = \sigma(z) P(i\omega, z), \tag{4}$$

где

$$\tilde{\varepsilon}(i\omega, z) = \frac{i\omega}{V(z)} + \varepsilon(z);$$

$$P(i\omega, z) = \int p(t, z) e^{-i\omega t} dt;$$

$$F(i\omega) = \int f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Из системы уравнений (3), (4) следует, что $P(i\omega, z)$ имеет разрыв только в точке $z = 0$, а функция $Q(i\omega, z)$ непрерывна.

Отметим, что на однородных ($\varepsilon = \text{const}$, $\sigma = \text{const}$) и свободных от источников участках функции P, Q удовлетворяют одному и тому же простому уравнению

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - \lambda^2 P = 0, \quad (5)$$

где $\lambda^2 = \tilde{\varepsilon}^2 - \sigma^2$.

Решения этого уравнения имеют вид

$$P = A e^{\lambda z} + B e^{-\lambda z} \quad (\text{Re} \lambda > 0), \quad (6)$$

где A и B – произвольные константы.

Рассмотрим кусочно-неоднородную среду с границами раздела (N – число границ раздела сред): $a_0 = 0 < a_1 < a_2 < \dots < a_N$. Пусть на отрезках (a_n, a_{n+1}) , $(a_{N+1} = \infty)$ среда однородна и имеет параметры: $\varepsilon(z) = \text{const} = \varepsilon_{n+1}$, $\sigma(z) = \text{const} = \sigma_{n+1}$, $V(z) = \text{const} = V_{n+1}$. На этих отрезках согласно (5) имеем

$$\begin{aligned} P(i\omega, z) &= A_{n+1} e^{\lambda_{n+1} z} + B_{n+1} e^{-\lambda_{n+1} z}; \\ Q(i\omega, z) &= C_{n+1} e^{\lambda_{n+1} z} + D_{n+1} e^{-\lambda_{n+1} z}. \end{aligned} \quad (7)$$

В силу уравнения (4)

$$\begin{aligned} A_{n+1} e^{\lambda_{n+1} z} + B_{n+1} e^{-\lambda_{n+1} z} &= \frac{\tilde{\varepsilon}_{n+1} - \lambda_{n+1}}{\sigma_{n+1}} C_{n+1} e^{\lambda_{n+1} z} + \\ &+ \frac{\tilde{\varepsilon}_{n+1} + \lambda_{n+1}}{\sigma_{n+1}} D_{n+1} e^{-\lambda_{n+1} z}, \end{aligned}$$

т.е.

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= \frac{\tilde{\varepsilon}_{n+1} - \lambda_{n+1}}{\sigma_{n+1}} C_{n+1} = \frac{\sigma_{n+1}}{\tilde{\varepsilon}_{n+1} + \lambda_{n+1}} C_{n+1}, \\ B_{n+1} &= \frac{\tilde{\varepsilon}_{n+1} + \lambda_{n+1}}{\sigma_{n+1}} D_{n+1} = \frac{\sigma_{n+1}}{\tilde{\varepsilon}_{n+1} - \lambda_{n+1}} D_{n+1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Поскольку в точках a_1, a_2, \dots, a_N функции $P(i\omega, z)$ и $Q(i\omega, z)$ непрерывны, имеем следующие соотношения:

$$C_{n+1} e^{\lambda_{n+1} a_n} + D_{n+1} e^{-\lambda_{n+1} a_n} = C_n e^{\lambda_n a_n} + D_n e^{-\lambda_n a_n}, \quad (9)$$

$$C_{n+1} \frac{\sigma_{n+1}}{\tilde{\varepsilon}_{n+1} + \lambda_{n+1}} e^{\lambda_{n+1} a_n} + D_{n+1} \frac{\sigma_{n+1}}{\tilde{\varepsilon}_{n+1} - \lambda_{n+1}} e^{-\lambda_{n+1} a_n} =$$

$$= C_n \frac{\sigma_n}{\tilde{\varepsilon}_n + \lambda_n} e^{\lambda_n a_n} + D_n \frac{\sigma_n}{\tilde{\varepsilon}_n - \lambda_n} e^{-\lambda_n a_n}. \quad (10)$$

Используя матричные обозначения, можем эти соотношения переписать в виде

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \frac{\sigma_{n+1}}{\tilde{\varepsilon}_{n+1} + \lambda_{n+1}} e^{\lambda_{n+1} a_n} & \frac{\sigma_{n+1}}{\tilde{\varepsilon}_{n+1} - \lambda_{n+1}} e^{-\lambda_{n+1} a_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{n+1} \\ D_{n+1} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sigma_n}{\tilde{\varepsilon}_n + \lambda_n} e^{\lambda_n a_n} & \frac{\sigma_n}{\tilde{\varepsilon}_n - \lambda_n} e^{-\lambda_n a_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_n \\ D_n \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (11)$$

Полагая

$$\begin{pmatrix} \tilde{C}_n \\ \tilde{D}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\sigma_n}{\tilde{\varepsilon}_n + \lambda_n} & \frac{\sigma_n}{\tilde{\varepsilon}_n - \lambda_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda_n a_{n-1}} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda_n a_{n-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_n \\ D_n \end{pmatrix}, \quad (12)$$

соотношение (11) можно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} \tilde{C}_{n+1} \\ \tilde{D}_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left\{ e^{\lambda_n \Delta a_n} \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_n + 1 & -\frac{\sigma_n}{\lambda_n} \\ \frac{\sigma_n}{\lambda_n} & -\tilde{\varepsilon}_n + 1 \end{pmatrix} + e^{-\lambda_n \Delta a_n} \begin{pmatrix} -\frac{\tilde{\varepsilon}_n + 1}{\lambda_n} & \frac{\sigma_n}{\lambda_n} \\ -\frac{\sigma_n}{\lambda_n} & \tilde{\varepsilon}_n + 1 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \tilde{C}_n \\ \tilde{D}_n \end{pmatrix} = g_n^* \begin{pmatrix} \tilde{C}_n \\ \tilde{D}_n \end{pmatrix},$$

где $\Delta a_n = a_n - a_{n-1}$;

$$\begin{aligned} g_n &= \left\{ e^{\lambda_n \Delta a_n} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} (x_n - y_n) + e^{-\lambda_n \Delta a_n} \begin{pmatrix} y_n \\ x_n \end{pmatrix} (-y_n - x_n) \right\} = \\ &= \sum_{\theta=\pm 1} e^{\theta \lambda_n \Delta a_n} \begin{pmatrix} \frac{u_n + \theta v_n}{2} \\ \frac{u_n - \theta v_n}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{v_n + \theta u_n}{2} & \frac{v_n - \theta u_n}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь использованы обозначения:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\tilde{\varepsilon}_n + \sigma_n}{\lambda_n}} + \sqrt{\frac{\tilde{\varepsilon}_n - \sigma_n}{\lambda_n}} \right) = \frac{u_n + v_n}{2}; \\ y_n &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\tilde{\varepsilon}_n + \sigma_n}{\lambda_n}} - \sqrt{\frac{\tilde{\varepsilon}_n - \sigma_n}{\lambda_n}} \right) = \frac{u_n - v_n}{2}, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$u_n = \sqrt{\frac{\tilde{\varepsilon}_n + \sigma_n}{\lambda_n}}, \quad v_n = \sqrt{\frac{\tilde{\varepsilon}_n - \sigma_n}{\lambda_n}} = \frac{1}{u_n}.$$

Следовательно,

$$\begin{pmatrix} \tilde{C}_{N+1} \\ \tilde{D}_{N+1} \end{pmatrix} = \prod_{n=1}^N g_n \begin{pmatrix} \tilde{C}_1 \\ \tilde{D}_1 \end{pmatrix}.$$

Используя (13), получаем

$$\prod_{n=1}^N g_n = \sum_{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N = \pm 1} e^{\sum_{n=1}^N \theta_n \lambda_n \Delta a_n} \prod_{n=2}^N \frac{1}{2} (u_{n-1} v_n + \theta_n \theta_{n-1} v_{n-1} u_n) \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \frac{u_N + \theta_N v_N}{2} \\ \frac{u_N - \theta_N v_N}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{v_1 + \theta_1 u_1}{2}, \frac{v_1 - \theta_1 u_1}{2} \end{pmatrix}.$$

В целом получаем

$$C_{N+1} = \frac{\sigma_{N+1}}{2\lambda_{N+1}} e^{-\lambda_{N+1} a_N} \sum_{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N = \pm 1} e^{\sum_{n=1}^N \theta_n \lambda_n \Delta a_n}$$

$$\times \prod_{n=2}^N \frac{1}{2} (u_{n-1} v_n + \theta_n \theta_{n-1} v_{n-1} u_n) \frac{1}{2} \frac{v_{N+1} u_N + \theta_N u_{N+1} v_N}{u_{N+1} - v_{N+1}} \times$$

$$\times \left(\left[\frac{1 + \theta_1}{u_1 + v_1} \frac{\sigma_1}{\tilde{\varepsilon} + \lambda_1} \right] C_1 + \left[\frac{1 - \theta_1}{u_1 - v_1} \frac{\sigma_1}{\tilde{\varepsilon} - \lambda_1} \right] D_1 \right). \quad (15)$$

$$0 = \sum_{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N = \pm 1} e^{\sum_{n=1}^N \theta_n \lambda_n \Delta a_n} \prod_{n=2}^{N+1} (u_{n-1} v_n + \theta_n \theta_{n-1} v_{n-1} u_n) \left(\frac{1 + \theta_1}{u_1 + v_1} C_1 + \frac{1 - \theta_1}{u_1 - v_1} \frac{\sigma_1}{2\lambda_1 V_1} F(i\omega) \right).$$

Отсюда

$$C_1 = -\frac{u_1 + v_1}{u_1 - v_1} \frac{\sigma_1}{2\lambda_1 V_1} F(i\omega) e^{-2\lambda_1 \Delta a_1} \left\{ \frac{\sum_{\theta_2, \dots, \theta_N = \pm 1} e^{\sum_{n=2}^N \theta_n \lambda_n \Delta a_n} \prod_{n=3}^{N+1} (u_{n-1} v_n + \theta_n \theta_{n-1} v_{n-1} u_n)}{\sum_{\theta_2, \dots, \theta_N = \pm 1} e^{\sum_{n=2}^N \theta_n \lambda_n \Delta a_n} \prod_{n=2}^{N+1} (u_{n-1} v_n + \theta_n \theta_{n-1} v_{n-1} u_n)} \right\} =$$

$$= -\frac{\tilde{\varepsilon}_1 + \lambda_1}{\sigma_1} \frac{\sigma_1}{2\lambda_1 V_1} F(i\omega) e^{-2\lambda_1 \Delta a_1} \left\{ \frac{\sum_{\theta_2, \dots, \theta_N = \pm 1} e^{\sum_{n=2}^N \theta_n \lambda_n \Delta a_n} \theta_2 \prod_{n=3}^{N+1} \left(\frac{\tilde{\varepsilon}_{n-1} + \sigma_{n-1}}{\lambda_{n-1}} + \theta_n \theta_{n-1} \frac{\tilde{\varepsilon}_n + \sigma_n}{\lambda_n} \right)}{\sum_{\theta_2, \dots, \theta_N = \pm 1} e^{\sum_{n=2}^N \theta_n \lambda_n \Delta a_n} \prod_{n=2}^{N+1} \left(\frac{\tilde{\varepsilon}_{n-1} + \sigma_{n-1}}{\lambda_{n-1}} + \theta_n \theta_{n-1} \frac{\tilde{\varepsilon}_n + \sigma_n}{\lambda_n} \right)} \right\}. \quad (17)$$

Обратный сигнал Q в точке $z = 0$ равен

$$Q(i\omega, 0) = C_0 = C_1 + D_1.$$

Таким образом, C_1 и D_1 найдены.

Наибольший интерес представляет нахождение обратного числа в точке, где расположен излучатель, т.е. в точке $z = 0$. Очевидно, обратный сигнал в точке $z = 0$ равен

Для нахождения D_1 воспользуемся следующими соображениями. Очевидно, что

$$P(i\omega, z) = \begin{cases} \frac{\tilde{\varepsilon}_1 - \lambda_1}{\sigma_1} C_0 e^{\lambda_1 z}, & -\infty < z \leq 0, \\ \frac{\tilde{\varepsilon}_1 - \lambda_1}{\sigma_1} C_1 e^{\lambda_1 z} + \frac{\tilde{\varepsilon}_1 + \lambda_1}{\sigma_1} D_1 e^{-\lambda_1 z}, & 0 \leq z \leq a_1. \end{cases}$$

При этом в точке $z = 0$ $P(i\omega, z)$ терпит разрыв, равный $F(i\omega)/V_1$. Отсюда получаем

$$(C_1 - C_0) \frac{\tilde{\varepsilon}_1 - \lambda_1}{\sigma_1} + D_1 \frac{\tilde{\varepsilon}_1 + \lambda_1}{\sigma_1} = \frac{1}{V_1} F(i\omega).$$

Далее

$$Q(i\omega, z) = \begin{cases} C_0 e^{\lambda_1 z}, & -\infty < z \leq 0, \\ C_1 e^{\lambda_1 z} + D_1 e^{-\lambda_1 z}, & 0 \leq z \leq a_1. \end{cases}$$

Функция $Q(i\omega, z)$ непрерывна в точке $z = 0$. Поэтому $C_1 - C_0 + D_1 = 0$. Отсюда

$$D_1 = \sigma_1 / (2 \lambda_1 V_1) F(i\omega). \quad (16)$$

Физически ясно, что на интервале (a_N, ∞) $Q(i\omega, z) = D_{N+1} e^{-\lambda_{N+1} z}$, т.е. $C_{N+1} = 0$. Отсюда из (15) получаем следующее уравнение для нахождения C_1 :

$$C_0 = C_1 + D_1 = \sigma_1 / (2\lambda_1 V_1) F(i\omega) \left\{ 1 + \frac{\tilde{\varepsilon}_1 + \lambda_1}{\sigma_1} \exp \{-2 \lambda_1 \Delta a_1\} - 2 \left(\frac{\tilde{\varepsilon}_1 + \lambda_1}{\sigma_1} \right) \frac{\tilde{\varepsilon}_1 + \sigma_1}{\lambda_1} \exp \{-2 \lambda_1 \Delta a_1\} \times \right. \\ \left. \times \frac{\sum_{\theta_2, \dots, \theta_N = \pm 1} \exp \left\{ \sum_{n=2}^N \theta_n \lambda_n \Delta a_n \right\} \prod_{n=3}^{N+1} \left(\frac{\tilde{\varepsilon}_{n-1} + \sigma_{n-1}}{\lambda_{n-1}} + \theta_n \theta_{n-1} \frac{\tilde{\varepsilon}_n + \sigma_n}{\lambda_n} \right)}{\sum_{\theta_2, \dots, \theta_N = \pm 1} \exp \left\{ \sum_{n=2}^N \theta_n \lambda_n \Delta a_n \right\} \prod_{n=2}^{N+1} \left(\frac{\tilde{\varepsilon}_{n-1} + \sigma_{n-1}}{\lambda_{n-1}} + \theta_n \theta_{n-1} \frac{\tilde{\varepsilon}_n + \sigma_n}{\lambda_n} \right)} \right\}, \quad (18)$$

причем предполагается, что $\theta_1 = \theta_{N+1} = 1$.

2. Анализ решения

2.1. Для случая стационарного сигнала постоянного уровня формула для C_0 будет иметь вид

$$C_0(t, z = 0) = C_0(t) = C_0 = \frac{\sigma_1}{2\lambda_1 V_1} f \left\{ 1 + \frac{\varepsilon_1 + \lambda_1}{\sigma_1} \exp \{-2 \lambda_1 \Delta a_1\} - 2 \frac{\varepsilon_1 + \lambda_1}{\sigma_1} \frac{\varepsilon_1 + \sigma_1}{\lambda_1} \exp \{-2 \lambda_1 \Delta a_1\} \times \right. \\ \left. \times \frac{\sum_{\theta_2, \dots, \theta_N = \pm 1} \exp \left\{ \sum_{n=2}^N \theta_n \lambda_n \Delta a_n \right\} \prod_{n=3}^{N+1} \left(\frac{\varepsilon_{n-1} + \sigma_{n-1}}{\lambda_{n-1}} + \theta_n \theta_{n-1} \frac{\varepsilon_n + \sigma_n}{\lambda_n} \right)}{\sum_{\theta_2, \dots, \theta_N = \pm 1} \exp \left\{ \sum_{n=2}^N \theta_n \lambda_n \Delta a_n \right\} \prod_{n=2}^{N+1} \left(\frac{\varepsilon_{n-1} + \sigma_{n-1}}{\lambda_{n-1}} + \theta_n \theta_{n-1} \frac{\varepsilon_n + \sigma_n}{\lambda_n} \right)} \right\}. \quad (19)$$

В дальнейшем обозначим

$$\frac{C_0}{f(2V_1)} = \hat{C}_0. \quad (20)$$

Рассмотрим случай 3-слойной среды. По формуле (19) при $N = 3$ получаем

$$\hat{C}_0 = \frac{\sigma_1}{\lambda_1} \left\{ 1 + \frac{\varepsilon_1 + \lambda_1}{\sigma_1} \exp \{-2 \lambda_1 \Delta a_1\} - 2 \frac{\varepsilon_1 + \lambda_1}{\sigma_1} \frac{\varepsilon_1 + \sigma_1}{\lambda_1} \exp \{-2 \lambda_1 \Delta a_1\} \times \right. \\ \times \exp \{ \lambda_2(a_2 - a_1) + \lambda_3(a_3 - a_2) \} \left(\frac{\varepsilon_2 + \sigma_2}{\lambda_2} + \frac{\varepsilon_3 + \sigma_3}{\lambda_3} \right) \times \\ \times \exp \{ \lambda_2(a_2 - a_1) + \lambda_3(a_3 - a_2) \} \left(\frac{\varepsilon_1 + \sigma_1}{\lambda_1} + \frac{\varepsilon_2 + \sigma_2}{\lambda_2} \right) \left(\frac{\varepsilon_2 + \sigma_2}{\lambda_2} + \frac{\varepsilon_3 + \sigma_3}{\lambda_3} \right) \times \\ \times \left(\frac{\varepsilon_3 + \sigma_3}{\lambda_3} + \frac{\varepsilon_4 + \sigma_4}{\lambda_4} \right) + \exp \{ \lambda_2(a_2 - a_1) - \lambda_3(a_3 - a_2) \} \times \\ \times \left(\frac{\varepsilon_3 + \sigma_3}{\lambda_3} + \frac{\varepsilon_4 + \sigma_4}{\lambda_4} \right) + \exp \{ \lambda_2(a_2 - a_1) - \lambda_3(a_3 - a_2) \} \times \\ \times \left(\frac{\varepsilon_2 + \sigma_2}{\lambda_2} - \frac{\varepsilon_3 + \sigma_3}{\lambda_3} \right) \left(\frac{\varepsilon_3 + \sigma_3}{\lambda_3} - \frac{\varepsilon_4 + \sigma_4}{\lambda_4} \right) + \\ \times \left(\frac{\varepsilon_1 + \sigma_1}{\lambda_1} + \frac{\varepsilon_2 + \sigma_2}{\lambda_2} \right) \left(\frac{\varepsilon_2 + \sigma_2}{\lambda_2} - \frac{\varepsilon_3 + \sigma_3}{\lambda_3} \right) \left(\frac{\varepsilon_3 + \sigma_3}{\lambda_3} - \frac{\varepsilon_4 + \sigma_4}{\lambda_4} \right) + \\ \left. + \exp \{ -\lambda_2(a_2 - a_1) + \lambda_3(a_3 - a_2) \} \left(\frac{\varepsilon_2 + \sigma_2}{\lambda_2} - \frac{\varepsilon_3 + \sigma_3}{\lambda_3} \right) \times \right. \\ \left. + \exp \{ -\lambda_2(a_2 - a_1) + \lambda_3(a_3 - a_2) \} \left(\frac{\varepsilon_1 + \sigma_1}{\lambda_1} - \frac{\varepsilon_2 + \sigma_2}{\lambda_2} \right) \left(\frac{\varepsilon_2 + \sigma_2}{\lambda_2} - \frac{\varepsilon_3 + \sigma_3}{\lambda_3} \right) \times \right\}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\frac{\varepsilon_3 + \sigma_3}{\lambda_3} + \frac{\varepsilon_4 + \sigma_4}{\lambda_4} \right) + \exp \{ -\lambda_2(a_2 - a_1) - \lambda_3(a_3 - a_2) \} \times \\
& \times \left(\frac{\varepsilon_3 + \sigma_3}{\lambda_3} + \frac{\varepsilon_4 + \sigma_4}{\lambda_4} \right) + \exp \{ -\lambda_2(a_2 - a_1) + \lambda_3(a_3 - a_2) \} \times \\
& \times \left(\frac{\varepsilon_2 + \sigma_2}{\lambda_2} + \frac{\varepsilon_3 + \sigma_3}{\lambda_3} \right) \left(\frac{\varepsilon_3 + \sigma_3}{\lambda_3} - \frac{\varepsilon_4 + \sigma_4}{\lambda_4} \right) \\
& \times \left(\frac{\varepsilon_1 + \sigma_1}{\lambda_1} - \frac{\varepsilon_2 + \sigma_2}{\lambda_2} \right) \left(\frac{\varepsilon_2 + \sigma_2}{\lambda_2} + \frac{\varepsilon_3 + \sigma_3}{\lambda_3} \right) \left(\frac{\varepsilon_3 + \sigma_3}{\lambda_3} - \frac{\varepsilon_4 + \sigma_4}{\lambda_4} \right)
\end{aligned} \tag{21}$$

При $\frac{\varepsilon_3 + \sigma_3}{\lambda_3} \ll \frac{\varepsilon_4 + \sigma_4}{\lambda_4}$ можно сократить в (21) члены, содержащие $(\varepsilon_4 + \sigma_4)/\lambda_4$, тогда выражение (21) примет более простой вид:

$$\begin{aligned}
\hat{C}_0 = & \frac{\sigma_1}{\lambda_1} \left\{ 1 + \frac{\varepsilon_1 + \lambda_1}{\sigma_1} \exp \{ -2 \lambda_1 \Delta a_1 \} - 2 \frac{\varepsilon_1 + \lambda_1}{\sigma_1} \frac{\varepsilon_1 + \sigma_1}{\lambda_1} \exp \{ -2 \lambda_1 \Delta a_1 \} \times \right. \\
& \exp \{ \lambda_2(a_2 - a_1) + \lambda_3(a_3 - a_2) \} \left(\frac{\varepsilon_2 + \sigma_2}{\lambda_2} + \frac{\varepsilon_3 + \sigma_3}{\lambda_3} \right) - \\
& \times \frac{\exp \{ \lambda_2(a_2 - a_1) + \lambda_3(a_3 - a_2) \} \left(\frac{\varepsilon_1 + \sigma_1}{\lambda_1} + \frac{\varepsilon_2 + \sigma_2}{\lambda_2} \right) \left(\frac{\varepsilon_2 + \sigma_2}{\lambda_2} + \frac{\varepsilon_3 + \sigma_3}{\lambda_3} \right) -}{\exp \{ \lambda_2(a_2 - a_1) + \lambda_3(a_3 - a_2) \} \left(\frac{\varepsilon_1 + \sigma_1}{\lambda_1} + \frac{\varepsilon_2 + \sigma_2}{\lambda_2} \right) \left(\frac{\varepsilon_2 + \sigma_2}{\lambda_2} + \frac{\varepsilon_3 + \sigma_3}{\lambda_3} \right) -} \\
& - \exp \{ \lambda_2(a_2 - a_1) - \lambda_3(a_3 - a_2) \} \left(\frac{\varepsilon_2 + \sigma_2}{\lambda_2} - \frac{\varepsilon_3 + \sigma_3}{\lambda_3} \right) + \\
& - \exp \{ \lambda_2(a_2 - a_1) - \lambda_3(a_3 - a_2) \} \left(\frac{\varepsilon_1 + \sigma_1}{\lambda_1} + \frac{\varepsilon_2 + \sigma_2}{\lambda_2} \right) \left(\frac{\varepsilon_2 + \sigma_2}{\lambda_2} - \frac{\varepsilon_3 + \sigma_3}{\lambda_3} \right) + \\
& + \exp \{ -\lambda_2(a_2 - a_1) + \lambda_3(a_3 - a_2) \} \left(\frac{\varepsilon_2 + \sigma_2}{\lambda_2} - \frac{\varepsilon_3 + \sigma_3}{\lambda_3} \right) - \\
& + \exp \{ -\lambda_2(a_2 - a_1) + \lambda_3(a_3 - a_2) \} \left(\frac{\varepsilon_1 + \sigma_1}{\lambda_1} - \frac{\varepsilon_2 + \sigma_2}{\lambda_2} \right) \left(\frac{\varepsilon_2 + \sigma_2}{\lambda_2} - \frac{\varepsilon_3 + \sigma_3}{\lambda_3} \right) - \\
& - \exp \{ -\lambda_2(a_2 - a_1) - \lambda_3(a_3 - a_2) \} \left(\frac{\varepsilon_2 + \sigma_2}{\lambda_2} + \frac{\varepsilon_3 + \sigma_3}{\lambda_3} \right) \\
& \left. - \exp \{ -\lambda_2(a_2 - a_1) - \lambda_3(a_3 - a_2) \} \left(\frac{\varepsilon_1 + \sigma_1}{\lambda_1} - \frac{\varepsilon_2 + \sigma_2}{\lambda_2} \right) \left(\frac{\varepsilon_2 + \sigma_2}{\lambda_2} + \frac{\varepsilon_3 + \sigma_3}{\lambda_3} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{22}$$

На рис. 1 приведены результаты расчетов по формуле (22) для различных параметров ε_i , σ_i , которые позволяют, в частности, сделать вывод, что при определенном сочетании параметров слоев не смешивающихся сред объект с характеристиками ε_4 , σ_4 будет лучше виден при наблюдении со стороны поглощающей («черной») среды с ε_2 , σ_2 (при условии что среда с ε_3 , σ_3 — отражающая («белая»)), чем при обратном сочетании.

Полученные зависимости являются теоретической основой для разработки управляемых слоистых сред с заданными характеристиками.

Приведем также вид прямого и отраженного непрерывного сигнала в случае однородной среды:

$$P(t, z) = \frac{1}{2V} f \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} + \text{sign}(z) \right) \exp(-\lambda|z|);$$

$$Q(t, z) = \frac{1}{2V} f \frac{\sigma}{\lambda} \exp(-\lambda|z|),$$

$$Q(t, z=0) = \frac{f \sigma}{2V \lambda}. \tag{23}$$

2.2. Для нестационарного случая передатчик излучает δ -импульс, т.е. $f(t) = f\delta(t)$ и $f(i\omega) = \text{const} = f$.

Обратное преобразование Фурье удастся вычислить для однородной среды:

$$\begin{aligned}
P(t, z) = & \frac{f}{V} e^{-\varepsilon|z|} \delta \left(t - \frac{z}{V} \right) \eta(z) + \frac{1}{2} f \sigma \sqrt{\frac{Vt+z}{Vt-z}} \times \\
& \times I_1 \left(\sigma \sqrt{(Vt)^2 - z^2} \right) e^{-\varepsilon|t|} \eta(Vt - |z|);
\end{aligned} \tag{24}$$

$$Q(t, z) = \frac{1}{2} f \sigma e^{-\varepsilon|t|} I_0 \left(\sigma \sqrt{(Vt)^2 - z^2} \right) \eta(Vt - |z|), \tag{25}$$

где $I_1(\dots)$ и $I_0(\dots)$ – соответственно модифицированные функции Бесселя первого рода соответственно первого и нулевого порядка.

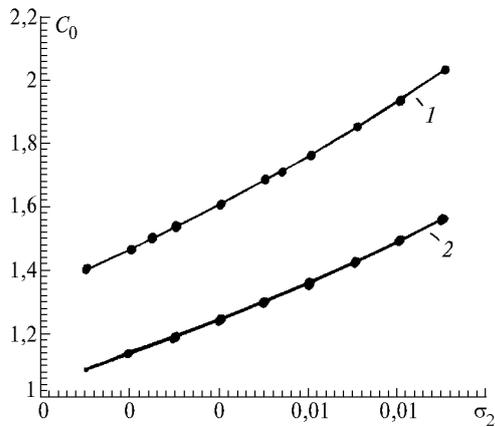


Рис. 1. Зависимость \hat{C}_0 от σ_2 : 1 – $\sigma_3 = 0,8 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}$; 2 – $\sigma_3 = 0,2 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}$; для $a_1 = 1000 \text{ м}$, $a_2 = 1020 \text{ м}$, $a_3 = 1040 \text{ м}$, $\epsilon_3 = 10^{-4} \text{ м}^{-1}$; $\sigma_1 = 0,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^{-1}$; $\epsilon_2 = \epsilon_3 = 10^{-2} \text{ м}^{-1}$

Это есть точные решения одномерного уравнения переноса для задачи распространения импульса в однородной рассеивающей среде.

Принимаемый в точке $z=0$ сигнал обратного рассеяния будет равен

$$Q(t, 0) = \frac{1}{2} f \sigma e^{-\epsilon V t} I_0(\sigma V t) \eta(t). \quad (26)$$

Здесь $\eta(t)$ – единичная ступенчатая функция.

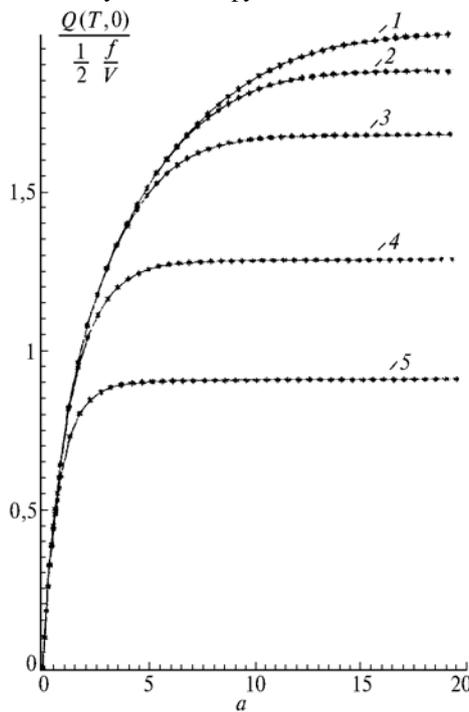


Рис. 3. Результаты расчетов: a – зависимость $Q(T, 0)/(f/2V)$ от a при $b = 1,1$ для $k = 8$ (1), 6 (2), 4 (3), 2 (4), 0 (5); b – зависимость $Q(T, 0)/(f/2V)$ от a при $b = 4,4$ для $k = 4, 6, 8$ (1), 2 (2), 0 (3)

Отметим, что прямой (24) и обратный (25) сигналы заполняют интервал $-Vt < z < Vt$, расширяющийся с ростом t . При этом обратный сигнал симметричен относительно $z = 0$. График распределения относительного значения прямого сигнала P/P_{\max} в произвольный момент времени в зависимости от z рассчитан численно и изображен на рис. 2.

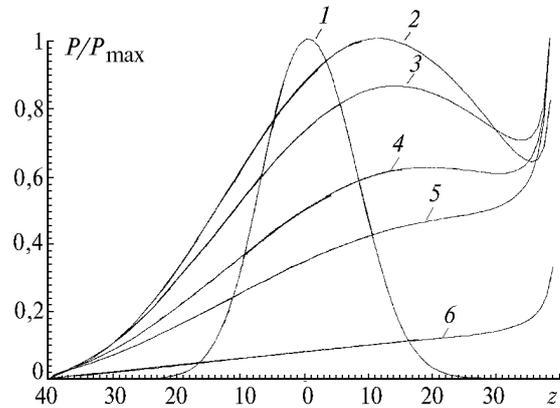
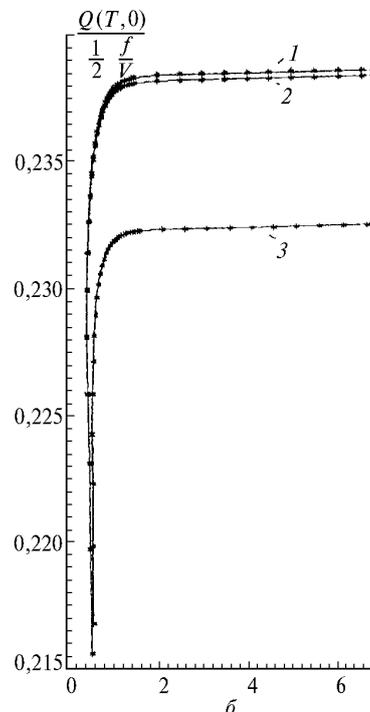


Рис. 2. Зависимость P/P_{\max} от расстояния z , м, до источника излучения при $Vt = 40$ для $a = 30$ (1), 4 (2), 3,5 (3), 3 (4), 2,5 (5), 2 (6), $a = \sigma V t$

Любопытно отметить возникающую при больших значениях показателя отражения σ немонотонность распределения прямого сигнала в интервале $-Vt < z < Vt$: экстремумы значения сигнала находятся в некоторых точках внутри интервала $-Vt < z < Vt$.



Хотя результаты получены для «всего» рассеяния, т.е. всех кратностей, всегда интересен вопрос, особенно при оценках в многомерных моделях и экспериментах, какой же необходимо учитывать порядок кратности или какую роль играет учет того или иного порядка кратности, что существенно влияет на сложность модели и объем расчетов. Формула (26), вернее ее модификация, позволяет сделать это более полезно и просто, чем в [5]. Обозначая через T время регистрации обратного рассеянного излучения в точке $z = 0$, получим

$$Q(T, 0) = \frac{1}{2} f \frac{1}{V} \int_0^a e^{-bx} I_0(x) dx, \quad (27)$$

где $a = \sigma VT$; $b = \varepsilon/\sigma$. Имея в виду, что

$$I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k},$$

и при $k = 0$, $Q(T, 0)|_{k=0}$ – однократное рассеяние;
 $k = 2$, $Q(T, 0)|_{k=2}$ – двукратное рассеяние (хотя в

обычном понимании это уже трехкратное рассеяние). На рис. 3 показаны результаты расчетов зависимости $Q(T, 0)/[f/(2V)]$ для набора параметров a, b, k . Видно, что для большинства наборов параметров достаточен учет трехкратного рассеяния, а во многих случаях и двукратного. Полученные результаты могут быть использованы при разработке методов диагностики сред, разработке оптимальных слоистых несмешивающихся маскировочных сред и покрытий, анализе характеристик обнаружения объектов, наблюдаемых через рассеивающие среды, синтезе информационных сред для управляемых экранов и т.д.

1. Чандрасекар С. Перенос лучистой энергии. М.: ИЛ, 1953. 431 с.
2. Сапожников Р.А. Теоретическая фотометрия. М.: Наука, 1977. 473 с.
3. Апресян Л.А., Кравцов Ю.А. Теория переноса излучения. М.: Наука, 1983. 216 с.
4. Соболев В.В. Перенос лучистой энергии в атмосфере звезд и планет. М.: ГИТТЛ, 1956. 136 с.
5. Иванов А.П. Оптика рассеивающих сред. Минск: Наука и техника, 1975. 504 с.
6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1973. 832 с.

ГП «НПО Астрофизика», Москва

Поступила в редакцию
11 июня 1998 г.

P.A. Bakut, Yu.P. Shumilov. Radiation Propagation through Scattering Media. (The Exact Solution of One-Dimensional Transfer Equation).

A problem of radiation propagation through inhomogeneous scattering media is treated based on transfer equations means. The exact solution of the equation for such medium is obtained. Analytical expressions are obtained for a signal propagated in the medium and the backscattered one in special cases of continuous and pulsed signals in homogeneous media. The applications of the obtained results have been analyzed and interpreted for remote sounding of distributed formations, stratified media and so on.