

УДК 535.5

В.А. Тартаковский, Н.Н. Майер

### СВЕТОВОЙ ПУЧОК С АЗИМУТАЛЬНОЙ НЕСУЩЕЙ В ВАКУУМЕ И НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Рассматривается задача распространения гауссова пучка с действительным нулем в начальных условиях. Получено решение уравнения Гельмгольца, описывающего данную задачу для вакуума. В численном эксперименте определена вероятность сохранения вносимой нулем азимутальной несущей частоты при распространении в неоднородной среде.

#### 1. Введение

Пусть световая волна распространяется вдоль вертикальной координатной оси и имеет действительный нуль в горизонтальной плоскости. Вокруг этого нуля возникает азимутальное колебание, фаза которого имеет вид вихря. Размер вихря определяется размером окрестности нуля, в которой фаза является монотонной функцией азимутального угла. Производная линейной составляющей фазового вихря по углу имеет смысл азимутальной несущей частоты, которая принимает только целочисленные значения, равные порядку нуля.

Распространение волны в неоднородной среде приводит к модуляции азимутальной несущей. При усилении турбулентности, в конечном итоге, будет нарушена монотонность изменения фазы вокруг нулевой точки и азимутальная несущая исчезнет.

Описанные явления отчасти рассмотрены в [1–3]. В данной статье будет получено очень простым способом решение задачи распространения гауссова пучка с азимутальной несущей в вакууме и исследовано методом численного моделирования распространение такого пучка в турбулентной среде.

#### 2. Распространение пучка с азимутальной несущей частотой в вакууме

Монохроматическое скалярное поле в цилиндрической системе координат  $r, \vartheta, z$  может быть представлено в форме

$$W(r, \vartheta, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\vartheta} \int_0^{\infty} S_m(\rho, z) J_m(\rho r) \rho d\rho. \quad (1)$$

В этом выражении переменная  $z$  – направление распространения волны; угол  $\vartheta$  – азимут;  $m$  имеет смысл азимутальной частоты, а  $\rho$  – радиальной частоты;  $S_m(\rho, z)$  – пространственный спектр в плоскости  $z$ . Символом  $J_m(\rho r)$  обозначена функция Бесселя первого рода порядка  $m$ .

Поле (1) должно удовлетворять уравнению Гельмгольца

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) W(r, \vartheta, z) = 0. \quad (2)$$

Подставив (1) в (2), получим выражение

$$0 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\vartheta} \int_0^{\infty} \left\{ \left[ \frac{\partial^2 S_m(\rho, z)}{\partial z^2} + k^2 S_m(\rho, z) \right] J_m(\rho r) + \rho^2 \left[ \frac{\partial^2 J_m(\rho r)}{\partial (r r)^2} + \frac{1}{r r} \frac{\partial J_m(\rho r)}{\partial (r r)} - \frac{m^2}{(r r)^2} J_m(\rho r) \right] S_m(\rho, z) \right\} \rho d\rho. \quad (3)$$

Учитывая, что содержимое второй квадратной скобки в (3) равно  $-J_m(\rho r)$ , запишем дифференциальное уравнение для пространственного спектра

$$\frac{\partial^2 S_m(\rho, z)}{\partial z^2} + (k^2 - \rho^2) S_m(\rho, z) = 0 \quad (4)$$

и частное решение этого уравнения при распространении волны в положительном направлении оси  $z$  с начальным условием  $S_m(\rho)$

$$S_m(\rho, z) = S_m(\rho) \exp iz \sqrt{k^2 - \rho^2}. \quad (5)$$

Квадратный корень в этом выражении для проведения дальнейших вычислений представим первыми членами степенного ряда, предполагая малой радиальную пространственную частоту  $\rho$  по сравнению с волновым числом  $k$ :

$$\sqrt{k^2 - \rho^2} = k \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{k^2}} \rightarrow k \left( 1 - 2 \frac{\rho^2}{k^2} \right). \quad (6)$$

Зададим поле в плоскости  $z = 0$  в виде функции Гаусса с множителем  $r^n e^{in\vartheta}$ , который представляет собой действительный нуль порядка  $n$  в начале координат:

$$W(r, \vartheta) = r^n e^{in\vartheta} \exp\left(-\frac{r^2}{2c} - i\frac{r^2 k}{2R}\right) = W(r) e^{in\vartheta}. \quad (7)$$

Здесь  $c$  и  $R$  – константы, характеризующие начальную ширину пучка и кривизну волнового фронта.

Спектр  $S_m(\rho)$  в плоскости источника определяется разложением функции  $W(r) e^{in\vartheta}$ :

$$\begin{aligned} S_m(\rho) &= \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\vartheta} d\vartheta \int_0^\infty W(r) J_m(\rho r) r dr = \\ &= \int_0^\infty \delta_{mn} W(r) J_m(\rho r) r dr = S_n(\rho). \end{aligned} \quad (8)$$

Подставив в это разложение радиальную часть поля (7) и вычислив интеграл, получим следующее выражение для спектра в плоскости источника:

$$\begin{aligned} S_n(\rho) &= \int_0^\infty J_n(\rho r) \exp\left(-\frac{r^2}{2c} - i\frac{r^2 k}{2R}\right) r^{n+1} dr = \\ &= \rho^n c^{2(n+1)} \left(1 + ic^2 \frac{k}{R}\right)^{-(n+1)} \exp\left(-\frac{\rho^2 c^2}{2}\right) \left(1 + ic^2 \frac{k}{R}\right). \end{aligned} \quad (9)$$

При этом использовался табличный интеграл из [4]:

$$\int_0^\infty r^{n+1} \exp(-ar^2) J_n(\rho r) dr = \frac{\rho^n}{(2a)^{n+1}} \exp\left(-\frac{\rho^2}{4a}\right), \quad (10)$$

$$\operatorname{Re} a > 0, \operatorname{Re} n > -1, \rho > 0.$$

Таким образом, для всех  $m$ , кроме  $m = n$ , спектр  $S_m(\rho, 0)$  равен нулю и из суммы в (1) остается только поле, обусловленное спектром  $S_n(\rho, z)$ , что позволяет найти поле в плоскости приемника, используя аппроксимацию (6) и интеграл (10):

$$\begin{aligned} W(r, \vartheta, z) &= \int_0^\infty J_n(\rho r) S_n(\rho) \exp ikz \left(1 - 2\frac{r^2}{k}\right) \rho d\rho = \\ &= r^n e^{in\vartheta} e^{ik} \left(1 - \frac{z}{R} + iD\right)^{-(n+1)} \exp\left(\frac{r^2 \left(1 + i\frac{z}{RD}\right)}{2c^2 \left(1 + \frac{z}{R} + iD\right)}\right), \end{aligned} \quad (11)$$

где  $D = z/kc^2$  – безразмерная дифракционная длина.

Видно, что нуль в центре пучка присутствует при любом  $z$ , порядок нуля при распространении не изменяется и сохраняется азимутальная несущая частота  $n$ . Это соответствует результату в работе [1]. При  $n = 0$  выражение (11) превращается в поле обычного гауссова пучка [5] без нулевого множителя.

Отметим, что аналитическое решение только для фазового винтового множителя  $e^{in\vartheta}$  получить не удалось. При численном моделировании распространения пучка с таким множителем возникают артефакты в виде высокочастотных амплитудных и фазовых модуляций. Это связано, по-видимому, с неопределенностью функции  $e^{in\vartheta}$  в точке  $r = 0$ , что отмечено в [2].

Исследуем фокальные пятна, создаваемые гауссовым пучком с нулевым множителем более общего вида,  $x + (a + ib)y$ , который представляет собой линейные члены степенного разложения в окрестности нулевой точки. Пучок в декартовой системе координат зададим в форме

$$W(x, y) = [x + (a + ib)y] \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2q^2}\right), \quad (12)$$

где  $q^2 = c^2 R/(R + ikc^2)$  – комплексная константа.

Используя соотношения:

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{x^2}{2q^2}\right) \frac{\mathbf{F}_{x\alpha}}{2q^2} &\rightarrow \sqrt{2\pi} q \exp\left(-\frac{q^2 \alpha^2}{2}\right), \\ x \exp\left(-\frac{x^2}{2q^2}\right) \frac{\mathbf{F}_{x\alpha}}{2q^2} &\rightarrow i\sqrt{2\pi} q^3 \alpha \exp\left(-\frac{q^2 \alpha^2}{2}\right), \end{aligned}$$

где  $\mathbf{F}_{x\alpha}$  – оператор одномерного преобразования Фурье, произведем двумерное преобразование Фурье в декартовых координатах выражения (12) и найдем представление пространственного спектра плоских волн для гауссова пучка с нулем в центре

$$S(\alpha, \beta) = i2\pi q^4 [\alpha + (a + ib)\beta] \exp[-(\alpha^2 + \beta^2)q^2/2]. \quad (13)$$

Фокальное пятно найдем как квадрат модуля этого спектра

$$\begin{aligned} |S(\alpha, \beta)|^2 &= (2\pi)^2 |q|^8 [\alpha^2 + (a^2 + b^2)\beta^2 + 2a\alpha\beta] \times \\ &\times \exp[-|q|^8 (\alpha^2 + \beta^2)/c^2], \end{aligned} \quad (14)$$

где  $a, b, c$  – действительные константы.

Пространственный спектр (13) гауссова пучка с винтовым множителем имеет такой же множитель в области частот  $\alpha\beta$ . Из этого, в частности, следует, что обе эти функции не имеют постоянной составляющей. В силу центральной симметрии функции  $|S(\alpha, \beta)|^2$  ее осевые моменты инерции первого порядка будут равны нулю. Следовательно, поле в малой окрестности нуля не имеет общего наклона волнового фронта.

Выражение для фокального пятна (14) содержит в виде множителя в квадратных скобках поверхность второго порядка в системе координат  $\alpha\beta$ , что и объясняет дихотомию фокальных пятен [2, 3], а также их кольцевую форму (рис. 1, кадры 3, 5, 7).

### 3. Распространение пучка с азимутальной несущей частотой в неоднородной среде

Проведен численный эксперимент для исследования фазы пучка с винтовым множителем, распространяющегося в неоднородной среде. Использовалась известная численная модель, описанная в [6]. Гауссов пучок и его пространственный спектр аппроксимировались периодическими функциями и представлялись в компьютере двумерными матрицами отсчетов. Порядок матрицы был равен 100, что обеспечивало адекватность дискретных функций их непрерывным прототипам. Использовались два фазовых экрана для моделирования неоднородной среды со спектральной плотностью показателя преломления, соответствующего атмосферной турбулентности в инерционном интервале. Закон сохранения энергии выполнялся в модели с машинной точностью. Спектральная плотность флуктуаций фазы и другие параметры модели определялись соотношениями:

$$F_s(\kappa) = 0,489 r_o^{-5/3} (\kappa^2 + \kappa_o^2)^{-11/6};$$

$$\kappa_o = \frac{2p}{L_o}; r_o = \left\{ 0,423 k^2 \int_L C_n^2(l) dl \right\}^{-3/5}, \quad (15)$$

где  $r_o$  – радиус когерентности Фрида;  $C_n^2$  – структурная постоянная показателя преломления;  $\kappa$  – пространственная частота;  $L$  – длина трассы, внешний масштаб турбулентности  $L_o$  равен 1м;  $k = 2\pi/\lambda$ , длина волны  $\lambda$  равна 0,6328 мкм.

На рис. 1 можно видеть, что волна, прошедшая неоднородную среду ( $C_n^2 = 10^{-14} \text{ м}^{-2/3}$ ,  $L = 2000$  м) с действительным нулем в гартмановской субапертуре без аподизации, формирует фокальные пятна также с нулем. Обе эти функции имеют азимутальную несущую частоту в окрестности нуля. Это свойство не зависит от размера субапертуры, по крайней мере тогда, когда нуль находится внутри субапертуры, а ее размер меньше размера фазового вихря.

Размер вихря можно оценить диаметром наибольшей окружности с центром в точке нуля, на которой фаза все еще остается монотонной функцией азимутального угла. В плоскости  $z = \text{const}$ , вблизи нуля, фаза волновых функций (11) и (12), так же как и пространственного спектра (13), является фазой нулевого множителя  $x + (a + ib)y$ , в системе координат  $r \vartheta$  она не зависит от  $r$  и имеет вид

$$\varphi_o(\vartheta) = \arctg \frac{b \sin \vartheta}{\cos \vartheta + a \sin \vartheta}. \quad (16)$$

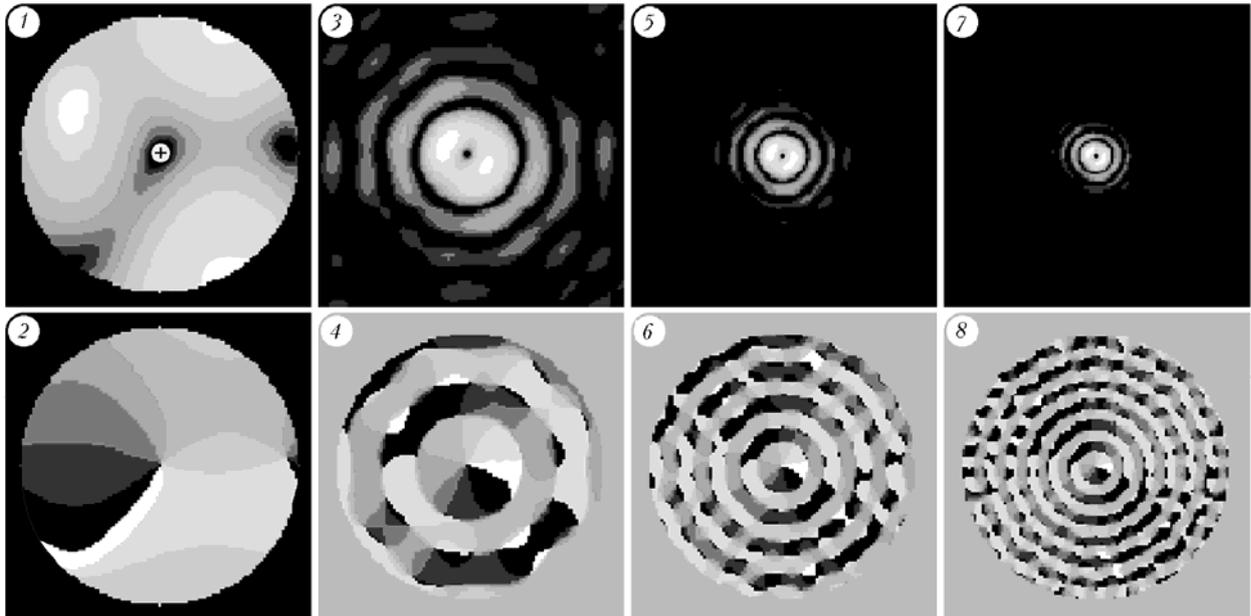


Рис. 1. Нули и фазовые вихри волны и ее преобразования Фурье при распространении в неоднородной среде ( $C_n^2 = 10^{-14} \text{ м}^{-2/3}$ ,  $L = 2000$  м). Интенсивность волны с нулем в центре гартмановской субапертуры (+) 1, соответствующая ей фаза 2. Фокальные пятна 3, 5, 7 и фазы 4, 6, 8, соответствующие фокальным пятнам, расположенным напротив, от волны с нулем 1, 2 при увеличении размера субапертуры

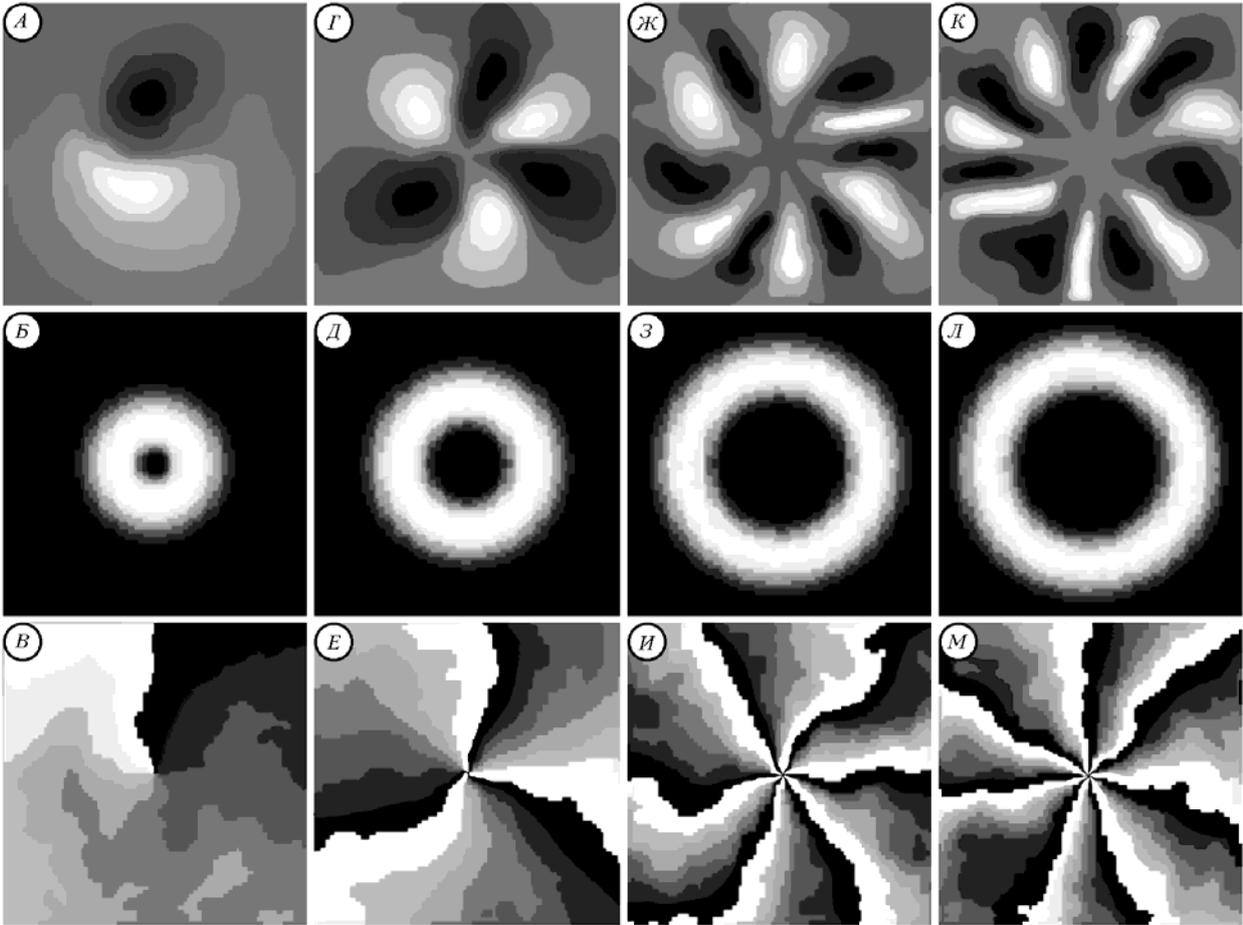


Рис. 2. Пучок с азимутальной несущей в неоднородной среде. Каждый столбец относится к одной реализации. В верхнем ряду показана действительная часть волны, в среднем – интенсивность, в нижнем – фаза. Порядок азимутальной несущей равен единице для первого столбца, трем для второго, шести для третьего и семи для четвертого.  $C_n^2 = 10^{-15} \text{ м}^{-2/3}$ ,  $r_o = 0,74 \text{ м}$ ,  $L = 100 \text{ м}$ ,  $\beta_o^2 = 0,0005$  для первого и второго столбцов.  $C_n^2 = 10^{-15} \text{ м}^{-2/3}$ ,  $r_o = 0,27 \text{ м}$ ,  $L = 500 \text{ м}$ ,  $\beta_o^2 = 0,009$  для третьего и четвертого столбцов. Размер матрицы равен 1 м

**Выборочная вероятность  $p_c$  сохранения азимутальной несущей порядка  $n$  в зависимости от длины трассы  $L$  и турбулентных характеристик  $C_n^2, r_o, \beta_o^2$**

$r_o, \text{ м}$	$C_n^2, \text{ м}^{-2/3}$	$\beta_o^2$	$L, \text{ м}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$n$
0,74	$10^{-15}$	0,0005	100	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	$p_c$
0,27	$10^{-15}$	0,0090	500	<b>0,3</b>	0,6	0,6	1	1	1	1	1	1	1	
0,18	$10^{-15}$	0,0330	1000	<b>0,2</b>	0,3	0,4	0,6	0,8	1	1	1	1	1	
0,14	$10^{-15}$	0,0690	1500	<b>0,2</b>	0,2	0,4	0,5	0,9	1	1	1	1	1	
0,12	$10^{-15}$	0,1200	2000	<b>0,2</b>	<b>0,9</b>	0,4	0,4	0,6	0,8	1	1	1	1	
0,18	$10^{-14}$	0,0050	100	<b>0,6</b>	<b>1</b>	0,3	0,7	1	1	1	1	1	1	
0,70	$10^{-14}$	0,0920	500	<b>0,2</b>	<b>0,2</b>	<b>0,6</b>	<b>0,9</b>	<b>0,9</b>	0,2	0,3	0,8	0,6	0,7	

*Примечание.* Значения вероятности, набранные жирным шрифтом, соответствуют наличию несущей в малой окрестности вокруг нулевой точки, остальные значения вероятности соответствуют наличию несущей в кольцевой области (см. рис. 2, кадры Б, Д, З, Л). Объем выборки равен 10.

Найдем производную этой фазы по азимутальному углу  $\vartheta$ :

$$\frac{d\varphi_o}{d\vartheta} = \frac{b}{(b \sin \vartheta)^2 + (\cos \vartheta + a \sin \vartheta)^2}. \quad (17)$$

Из этого выражения видно, что производная не меняет знак при изменении  $\vartheta$ . Следовательно, фаза волны в окрестности действительного нуля является монотонной функцией азимутального угла с вершиной в точке нуля.

Таким образом, одновременное наличие нуля, азимутальной несущей в волне и в ее спектре плоских волн имеет место как в вакууме, так и в неоднородной среде.

В численном эксперименте определялась длина трассы в неоднородной среде, на которой сохраняется азимутальная несущая частота гауссова пучка с винтовым множителем в форме (7) и (11). Присутствие азимутальной несущей частоты в пучке при его распространении в неоднородной среде устанавливалось визуально по наличию или отсутствию монотонной функции фазы вокруг точки нуля. Рассматривались два варианта: наличие монотонной фазы в кольцевой области, где велика интенсивность волны, и в малой окрестности точки нуля, где интенсивность мала. Вероятность сохранения азимутальной несущей определялась отношением благоприятных случаев к объему выборки, равному 10. Реализации действительной части волны, ее интенсивности и фазы для различных порядков несущей показаны на рис. 2. Результаты представлены в таблице.

Анализ данных в этой таблице показывает, что азимутальная несущая с более высоким порядком лучше сохраняется при распространении в неоднородной среде. Это понятно, так как чем выше несущая частота, тем более широкий спектр может иметь модулирующее колебание без потери свойств аналитического сигнала [7]. Большую устойчивость несущей в центральной части пучка, нежели в кольцевой области, можно объяснить степенным спектром неоднородностей показателя преломления среды, из-за чего крупномасштабные неоднородности сильнее влияют на флуктуации фазы волны.

Институт оптики атмосферы СО РАН,  
Томск

#### 4. Выводы

Заданная начальными условиями азимутальная несущая частота сохраняется при распространении светового пучка в вакууме.

Чем выше порядок азимутальной несущей, тем на трассе большей длины она сохраняется при распространении в неоднородной среде.

Азимутальная несущая присутствует в фокальной плоскости или в области пространственных частот для пучков, распространяющихся в вакууме и в неоднородной среде.

Форма фокального пятна от гартмановской субапертуры с действительным нулем определяется преимущественно первыми членами двумерного степенного разложения волновой функции в окрестности этого нуля.

1. Abramochkin E., Volostnikov V. Spiral-type beams // Optics Communications 1993. V. 102. № 3,4. P. 336—350.
2. Лукин В.П., Фортес Б.В. О влиянии дислокаций волнового фронта на нестабильность фазового сопряжения при компенсации теплового самовоздействия // Оптика атмосферы и океана. 1995. Т. 8. № 9. С. 435—447.
3. Тартаковский В.А., Майер Н.Н. Дислокации фазы и фокальные пятна // Оптика атмосферы и океана. 1996. № 11. Т. 9. С. 1457—1461.
4. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. 6.631(4).
5. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука, 1979. 384 с.
6. Лукин В.П., Майер Н.Н., Фортес Б.В. Численное моделирование наземного адаптивного телескопа // Оптика атмосферы. 1991. Т. 4. № 12. С. 1298—1302.
7. Тартаковский В.А. Определение фазы оптической волны и многомерный аналитический сигнал // Оптика атмосферы и океана. 1997. № 3. Т. 10. С. 301—315.

Поступила в редакцию  
31 июля 1998 г.

*V.A. Tartakovskii, N.N. Mayer. Light Beam with Azimuth Carrier Frequency in Vacuum and Inhomogeneous Medium.*

Propagation of Gaussian beam with real zero in initial condition is treated. Helmholtz equation, describing the problem for vacuum, has been solved. A probability of preservation of the azimuth carrier frequency, introduced by zero, is determined numerically for the case of the beam propagation in inhomogeneous medium.