«Оптика атмосферы и океана», **12**, № 9 (1999)

УДК 535.33:34

Л.И. Несмелова, О.Б. Родимова, С.Д. Творогов

К ВОПРОСУ ОБ УТОЧНЕНИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ЧАСТОТЕ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ РАДИАЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Институт оптики атмосферы СО РАН, г. Томск

Поступила в редакцию 8.07.99 г.

Расчеты line-by-line радиационных потоков в ИК-области спектра, обусловленных водяным паром, показывают, что как сами потоки, так и скорости выхолаживания мало чувствительны к величине шага интегрирования по частоте. Этот факт находит свое объяснение с позиций теории вероятностей. Если рассматривать спектральную функцию поглощения молекул воды как реализацию случайной функции, то характеристики «спектра» этой функции позволяют использовать для ее восстановления небольшое число точек. Дальнейшее уменьшение расстояния между точками будет давать лишнюю информацию в смысле теоремы Шеннона.

1. Расчет line-by-line потоков и скоростей выхолаживания, обусловленных водяным паром

Расчет радиационных характеристик в климатических моделях требует большого количества времени главным образом потому, что при вычислении пропускания методом line-by-line предъявляются очень жесткие требования к интегрированию по частоте – шаг, равный 0,01 см$^{-1}$, при средних давлениях является вполне рядовым, а на больших высотах он, как правило, еще меньше (см., например, [1, 2]).

В то же время расчеты line-by-line радиационных потоков в ИК-области спектра, обусловленных водяным паром, показывают, что как сами потоки, так и скорости выхолаживания не слишком чувствительны к величине шага интегрирования по частоте. Проиллюстрируем это утверждение примерами расчета полных потоков и скоростей выхолаживания, обусловленных водяным паром, в двух спектральных интервалах: 1,5–340 и 980–1100 см$^{-1}$ с фойгтовским контуром для ряда величин шага интегрирования по частоте. Первый интервал характеризуется сильным, а второй – слабым поглощением. Результаты расчета приведены на рис. 1 и 2.

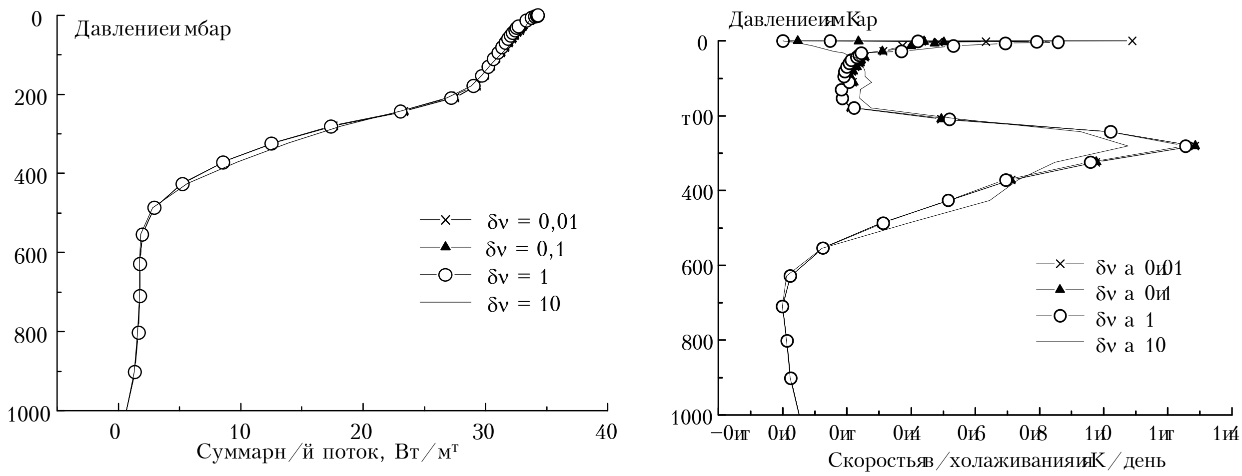

Рис. 1. Рассчитанный методом line-by-line высотный ход радиационных потоков (*а*) и скоростей выхолаживания (*б*), обусловленных водяным паром, в интервале 1,5–340 см$^{-1}$ для различных шагов интегрирования по частоте δν

Видно, что в спектральном интервале 1,5–340 см$^{-1}$ изменение шага интегрирования в широких пределах мало сказывается на значениях потоков и скоростей выхолаживания в средней области давлений. Только шаг δν = 10,0 см$^{-1}$ дает видимые различия. На больших высотах – выше ~ 100 км (т.е. при малых давлениях менее ~ 10^{-1-2} мбар) действительно нужен малый шаг интегрирования, даже величина его, равная 0,01 см$^{-1}$, оказывается недостаточной. Рисунок, отвечающий интервалу 980–1100 см$^{-1}$, несколько менее впечатляющ, но и здесь шаг, равный 0,1 см$^{-1}$, уже хорошо описывает потоки и скорости, а для предварительных оценок достаточен и шаг, равный 1 см$^{-1}$.

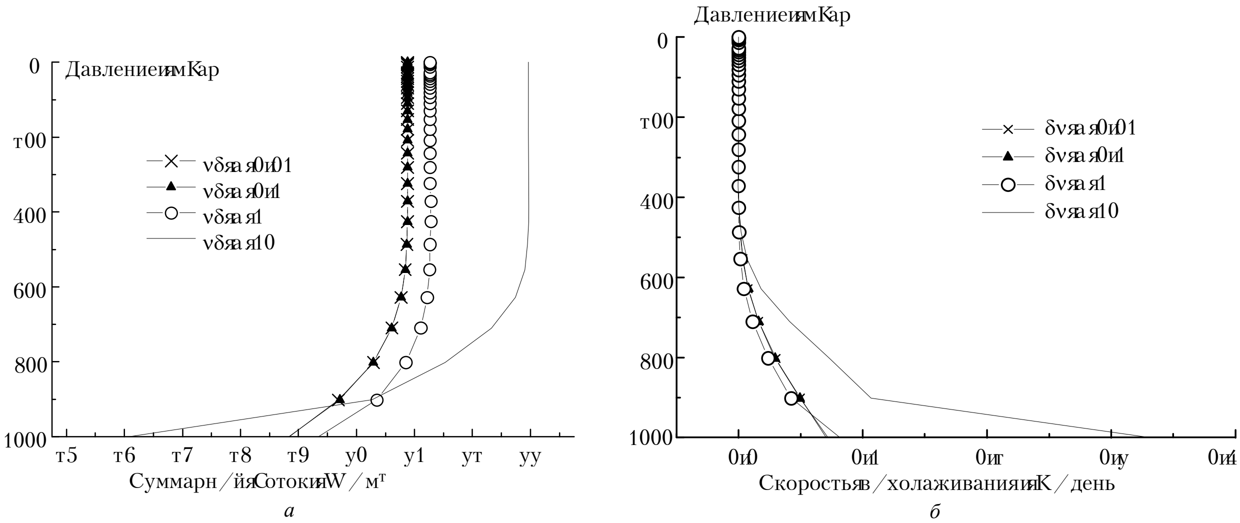

Рис. 2. Рассчитанный методом line-by-line высотный ход радиационных потоков (*а*) и скоростей выхолаживания (*б*), обусловленных водяным паром, в интервале 980–1100 см$^{-1}$ для различных шагов интегрирования по частоте $\delta\nu$

Этот факт не является удивительным, если вспомнить, что статистические модели для полос поглощения водяного пара в докомпьютерное время применялись с большим успехом [3]. Возможность применения не очень подробного шага по частоте в случае водяного пара находит свое объяснение с позиций теории вероятностей. Оказывается, если рассматривать спектральную функцию поглощения молекул воды как реализацию некоторой случайной функции, то характеристики «спектра» этой функции позволяют использовать для ее восстановления небольшое число точек. Дальнейшее уменьшение расстояния между точками будет давать лишнюю информацию в смысле теоремы Шеннона.

2. Введение в проблему на основании теории вероятностей

Положим, что имеем случайную функцию $f(x; a)$ для (условного пока) переменного x; совокупность случайных параметров (например, коэффициентов разложения случайной функции по ортогональным детерминированным функциям – то, что именуется разложением Карунена–Лоэва). Пусть $F(a)$ – функция распределения параметров a, так что можно написать статистическое среднее

$$A_{\mathrm{st}} = \int f(x; a)\,\Phi(a)\,da\,. \qquad (1)$$

Будем полагать ситуацию «стационарной» – величина (1) от x не зависит.

Реализации случайной функции $f^{(j)}(x)$ возникают, когда a обретают некоторые «разрешенные» $F(a)$ значения $a^{(j)}$. Можно ввести среднее по x (Δx – область усреднения):

$$A_{av}^{(j)} = \frac{1}{\Delta x}\int dx\; f^{(j)}(x), \qquad (2)$$

которое, при формальном определении (2), должно зависеть от j (номера реализации).

Обычно рассматривается эргодическая ситуация: независимо от j (т.е. для любой реализации)

$$A_{av}^{(j)} = A_{\mathrm{st}}\,. \qquad (3)$$

Напомним еще, что если $K(x)$ есть корреляционная функция случайной функции $f(x; a)$ и $S(t)$ – ее преобразование Фурье:

$$S(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} K(x)\cos xt\; dx\,,$$

то дисперсии этих функций Δx и Δt связаны между собой «соотношением неопределенности»

$$\Delta x\, \Delta t \cong 2\pi\,. \qquad (4)$$

В рамках этих определений существует вопрос: в каких точках надо измерить f как функцию x, чтобы затем посчитать среднее точно? Ответ дает теорема Шеннона:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{\pi n}{\Delta s}\right)\frac{\sin(\pi n - x\,\Delta s)}{\pi n - x\,\Delta s}\,, \qquad (5)$$

где Δs – ширина спектра случайной функции. Эта связь может быть разной, но, конечно же, $\Delta s > \Delta t$. Для часто встречающихся (канонических) распределений [4]:

$$\Delta s \cong 3\,\Delta t\,. \qquad (6)$$

Формула (5) гласит, что «измерения» должны быть сделаны для точек

$$x_n = \pi n/(\Delta s)\,. \qquad (7)$$

Поскольку

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin by}{y}\,dy = \pi, \quad b > 0\,,$$

то интеграл (2) окажется суммой $f(x_n)$.

Величина Δs оценивается из соотношения, следующего из (4), (6):

$$\Delta x \, \Delta s \cong 6\pi, \tag{8}$$

в котором

$$(\Delta x)^{\text{т}} = \frac{\int x^{\text{т}} f(x|a)\,\Phi(a)\,da\,dx}{\int f(x|a)\,\Phi(a)\,da\,dx} \geq (\Delta a)^{\text{т}}, \tag{9}$$

где Δa – ширина распределения $F(a)$. Неравенство (9) появляется из-за того, что входящие в (9) интегралы трактуются как свертка двух распределений, всегда увеличивающая дисперсию.

Из (9) и (8) следует, что чем шире Δa, тем меньше Δs, и в силу (7) точки, по которым «восстанавливается» f, оказываются дальше друг от друга расположенными.

3. Применение к функции поглощения

Положим, что хорошо исполняется статистическая модель спектра. Роль x играет частота ω; a – совокупность центров линий и их интенсивностей; $f(x, a)$ – бугеровская экспонента для случайных центров линий и интенсивностей. В рамках этой модели функции поглощения соответствует (1). Мы же фактически считаем (2). Кстати, при вычислениях по статистической модели из (1) исчезает ω, так что на эргодичность (3) вполне можно ориентироваться.

Но для статистической модели Δs можно считать весьма малой. Дело в том, что положение линий вообще полагается равновероятным – широкое распределение Δa в этом смысле. Аналогично обстоит дело с интенсивностями S – часто пишется экспоненциальное распределение ~ exp (S/S_0) с параметром S_0, а это тоже «широкое» распределение ($\Delta S = 0(S)$).

Можно попытаться оценить «ширину распределения» Δx непосредственно, используя банк спектроскопической информации.

Расчет коэффициентов поглощения, оценка корреляционной функции распределения коэффициентов поглощения и ее дисперсии, проведенная для нескольких спектральных интервалов в ИК-области спектра, приводят к значению $\Delta x \sim 100$ см$^{-1}$. Отсюда следует $\Delta S \approx 5$ см$^{-1}$, что дает, очень грубо, верхнюю границу для шага интегрирования 1,0–0,1 см$^{-1}$.

Поэтому точки (7) могут располагаться достаточно далеко друг от друга и уменьшение расстояния между ними – просто «лишняя» информация в смысле теоремы Шеннона.

Таким образом, не всегда стремление к уменьшению шага интегрирования в радиационных расчетах оправданно с точки зрения повышения точности.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант № 97-05-65985.

1. *Ellingson R.G., Ellis J., Fels S.* // J. Geophys. Res. 1991. V. 96. N D5. P. 8929–8953.
2. *Feigelson E.M., Fomin B.A., Gorchakova I.A., Rozanov E.V., Timofeev Yu.M., Trotsenko A.N., Schwarzkopf M.D.* // J. Geophys. Res. 1991. V. 96. N D5. P. 8985–9001.
3. *Гуди Р.М.* Атмосферная радиация. I. Основы теории. М.: Мир, 1966. 522 с.
4. *Пугачев В.С.* Теория случайных функций. М.: ГИФМЛ, 1960. 883 с.

L.I. Nesmelova, O.B. Rodimova, S.D. Tvorogov. **On Refinement of Integration over Frequency when Calculating the Radiation Characteristics.**

The line-by-line calculations of radiation fluxes due to the water vapor in the IR region of spectrum show that both the fluxes themselves and the cooling rates are only slightly sensitive to the value of a step of the frequency integration. This fact finds its explanation in the context of the probability theory. If the spectral absorption function of water molecules is considered as a realization of a random function, characteristics of its «spectrum» allow one to use a small number of points for its retrieving. The further decrease of distance between points will give the «extra» information by the Shannon theorem.