

А.А. Землянов, Ю.Э. Гейнц, А.В. Пальчиков

## Использование динамического рассеяния света на вынужденных колебаниях частиц полидисперсного жидкокапельного аэрозоля для определения спектра их размеров

*Институт оптики атмосферы СО РАН, г. Томск*

Поступила в редакцию 6.05.2000 г.

Проведены численные расчеты частотной зависимости интенсивности динамической составляющей рассеянного света на вынужденных (пондеромоторных) колебаниях частиц полидисперсного жидкокапельного аэрозоля. На основе численного решения обратной задачи методом гистограмм показана возможность восстановления функции распределения частиц по размерам с удовлетворительной точностью.

### Введение

Изменение формы поверхности жидких частиц, вызванное их колебаниями, приводит к появлению динамической составляющей излучения, рассеянного на аэрозоле. Эти колебания возникают либо в силу естественных причин при движении частиц в атмосфере, либо могут быть стимулированы световым излучением. Собственные частоты колебаний капель однозначно определяются их размерами и физико-химическими свойствами жидкости, что предоставляет возможность получения количественной информации о характеристиках функции распределения аэрозоля по размерам, исходя из частотного поведения динамической составляющей рассеяния.

Возможность практического использования для определения размеров дождевых капель модулированного на колеблющихся частицах электромагнитного (СВЧ) излучения обсуждалась в экспериментальной работе Брука по исследованию флуктуаций радарного эха от облаков [1], где была отмечена необходимость учета случайной фазы при рассеянии электромагнитного излучения на произвольно ориентированных частицах. В [2] были проведены лабораторные измерения переменной составляющей интенсивности рассеянного СВЧ-излучения, на колебаниях обдуваемых потоком воздуха одиночных капель (диаметр ~ 0,3 – 0,5 см). В работе [3] исследовалось рассеяние света на колебаниях дождевых капель (диаметр ~ 0,1 – 0,3 см), которые подсвечивались снизу прожектором. Рассеянный на каплях свет регистрировался фотокамерой в виде последовательности ярких вспышек (треков). По периоду следования вспышек определялся диаметр данной капли, затем по всем каплям, попавшим в поле зрения фотоаппарата, строилось распределение по размерам.

Действие мощного лазерного излучения на каплю приводит к деформациям ее поверхности за счет пондеромоторных сил. Теоретические основы данного эффекта заложены в работе [4]. Воздействуя на частицы модулированным лазерным излучением и изменяя частоту его модуляции, можно добиваться раскачки колебаний различных групп капель определенного размера [5]. В экспериментальной работе [6] были получены частотные зависимости интенсивности

света, рассеянного на вынужденных колебаниях аэрозоля, однако восстановления функции распределения аэрозоля по размерам проведено не было.

Резонансная раскачка колебания капель вызывает увеличение амплитуды динамической составляющей рассеянного излучения. Кроме того, использование модулированного излучения накачки приводит к сфазированности колебаний капель, что в свою очередь приводит к лучшему детектированию динамической составляющей рассеянного излучения по сравнению со спонтанными колебаниями капель. В [7, 8] были проведены теоретические исследования резонансной раскачки и динамического рассеяния света на пондеромоторных колебаниях поверхности одиночных капель произвольных размеров.

В настоящей статье проведено численное моделирование рассеяния группой колеблющихся частиц, а также рассмотрена возможность восстановления функции распределения частиц по размерам, исходя из динамической составляющей рассеянного излучения.

### Основные соотношения для расчета пондеромоторных колебаний прозрачных капель и динамической составляющей интенсивности рассеянного излучения

Общая постановка задачи о деформации жидкой прозрачной капли в световом поле приведена в [6–9]. Она включает в себя уравнения динамики несжимаемой жидкости, сформулированные с учетом действия пондеромоторных сил. Уравнением, описывающим пространственно-временную эволюцию деформаций поверхности капли, является уравнение вынужденных колебаний слабовязкой жидкости, записанное для коэффициентов разложения смещения поверхности по сферическим гармоникам:

$$\frac{d^2 \xi_l}{dt^2} + \frac{2}{t_l} \frac{d \xi_l}{dt} + \Omega_l^2 \xi_l = \frac{l f_l(t)}{a_0 \rho_a}, \quad (1)$$

при этом радиус деформированной частицы задан соотношением

$$a(t, \theta) = a_0 + \xi(t, \theta) = a_0 + \operatorname{Re} \left\{ \sum_{l=2}^{\infty} \xi_l(t) Y_{l0}(\theta) \right\},$$

где  $\xi_l$  – коэффициенты разложения смещения поверхности частицы;  $a_0$  – радиус невозмущенной капли;  $Y_{l0}(\theta)$  – сферические гармоники;  $\theta$  – полярный угол;  $t_l = a_0^2 / [2(2l+1)(l-1)\nu]$  – характерное время затухания колебаний за счет вязких сил;  $\nu = \eta/\rho_a$  – кинематическая вязкость жидкости;

$$\Omega_l = \sqrt{l(l+2)(l-1)\sigma / (\rho_a a_0^3)} \quad (2)$$

– собственные колебательные частоты капли;  $\sigma$ ,  $\rho_a$ ,  $\eta$  – коэффициент поверхностного натяжения, плотность и динамическая вязкость жидкости соответственно.

Правой частью (1) выражена «вынуждающая сила»

$$f(t) = \int_0^{\pi} f(t, \theta) Y_{l0}^*(\theta) \sin\theta d\theta,$$

где  $f(t, \theta) = (\varepsilon_a - 1)/(8\pi)[(\varepsilon_a - 1)(\mathbf{E}(t, \theta) \mathbf{n})^2 + E^2(t, \theta)]$  – скачок нормальной составляющей натяжения электрического поля на поверхности частицы [10];  $\varepsilon_a$  – диэлектрическая проницаемость вещества капли;  $E(\theta)$  – напряженность электрического поля на поверхности частицы;  $\mathbf{n}$  – вектор внешней нормали к поверхности частицы.

Значение коэффициентов  $f_l$  определяется распределением электромагнитного поля на поверхности капли. Для больших частиц, как известно, данное распределение имеет резко неоднородную структуру, и поэтому  $f_l$  можно определить лишь из численных расчетов.

Колеблющиеся частицы представляют собой рассеиватели с динамически изменяющейся формой поверхности. Очевидно, что интенсивность света, рассеянного на таких частицах, также будет испытывать временные колебания. Для малых возмущений поверхности капли  $|\xi| \ll a_0$ , как показано в [8], интенсивность рассеянного излучения может быть представлена в виде суммы, где первое слагаемое определяет упругое рассеяние на недеформированной капле, а остальные слагаемые учитывают вклад в рассеяние света на комбинационных частотах:

$$\begin{aligned} I_s(\mathbf{r}, t) &= \frac{c\sqrt{\varepsilon_a}}{8\pi} \mathbf{E}_s(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}_s^*(\mathbf{r}, t) \approx \frac{c\sqrt{\varepsilon_a}}{8\pi} \left( \frac{k^2(\varepsilon_a - 1)}{4\pi r} \right)^2 \times \\ &\times [T(t)T^*(t) + T^*(t)a_0^2 \int \mathbf{E}(a_0, \theta', t) \exp\{ikr' \cos\gamma_1\} \times \\ &\times \operatorname{Re} \left\{ \sum_l \xi_l(t) Y_{l0}(\theta') \right\} + T(t)a_0^2 \int \mathbf{E}^*(a_0, \theta', t) \times \\ &\times \exp\{-ikr' \cos\gamma_1\} \operatorname{Re} \left\{ \sum_l \xi_l(t) Y_{l0}(\theta') \right\} d\theta'], \quad (3) \end{aligned}$$

где

$$T(t) = \int_{V_{a_0}} \mathbf{E}(\mathbf{r}', t) \exp\{ikr' \cos\gamma_1\} d\mathbf{r}';$$

$k$  – волновое число;  $\gamma_1$  – угол между векторами  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$ .

При изменении частоты модуляции воздействующего излучения  $\Omega$  каждый всплеск интенсивности рассеянного излучения будет соответствовать резонансной раскочке механических колебаний частиц определенного размера. Квадратичная зависимость  $I_s$  от  $a_0$  показывает, что с увеличением размера частицы увеличивается и ее вклад в интенсивность рассеянного излучения.

Проведенные по (3) численные расчеты угловых зависимостей интенсивности рассеянного излучения показали, что относительное изменение интенсивности по сравнению с уровнем невозмущенного (упругого) рассеяния на частотах механических колебаний капли максимально в направлении поперек воздействия ( $\theta = 90^\circ$ ), а также в направлении угла первой дуги ( $\theta \approx 137^\circ$ ). Это определяет диапазон углов оптимального приема динамической составляющей рассеянного излучения.

### Восстановление функции распределения частиц аэрозоля по размерам

Проведем оценки возможности восстановления функции распределения частиц аэрозоля по размерам, используя следующие предположения. Будем считать, что все частицы в объеме зондируемого аэрозоля  $V$  находятся в одинаковых энергетических условиях. Это подразумевает равенство интенсивностей, попадающих на частицы, а также приблизительно один и тот же угол на приемник. Тогда, очевидно, интенсивность света  $I$ , рассеянного аэрозолем в приближении однократного рассеяния, равна

$$I(\Omega) = N_0 V \int_0^{\infty} I_s(a_0, \Omega) f(a_0) da_0, \quad (4)$$

где  $N_0$  – концентрация капель;  $f(a_0)$  – нормированная функция распределения частиц по размерам;  $\Omega$  – частота модуляции воздействующего излучения;  $I_s$  – интенсивность рассеяния одной частицей.

Как видно из (4), данное уравнение является уравнением Фредгольма первого рода. Решить его возможно, используя какой-либо стандартный прием, например метод гистограмм [11]. При этом площадь под кривой заменяется прямоугольниками и интеграл преобразуется в сумму:

$$I(\Omega) = N_0 V \sum_{i=1}^n N_{i,i+1} I_s^{i,i+1} \Delta a_0,$$

где  $N_{i,i+1}$  – относительная концентрация частиц размерами, попадающими в диапазон  $i, i+1$ , ширина которого равна  $\Delta a_0$ ;  $I_s^{i,i+1}$  – интенсивность рассеянного излучения на одиночной частице из выбранного интервала (размер частицы обычно принимается соответствующим центру данного интервала). Рассмотрим ситуацию, когда внутри выделенного объема находятся частицы только определенных размеров, соответствующих центрам интервалов. Суммарная интенсивность, излучаемая данным объемом, будет складываться из интенсивностей, рассеянных отдельными частицами:

$$I = N_0 V \sum_{i=1}^n N_i I_s^i, \quad (5)$$

где  $N_1, \dots, N_n$  – относительная концентрация частиц определенного радиуса;  $I_s^1, \dots, I_s^n$  – интенсивность излучения, рассеянного на каждой капле данного размера.

Модуляция интенсивности излучения накачки осуществляется на нескольких частотах, которые выбираются резонансными для каждого выделенного размера частиц. Для каждой из частот модуляции  $\Omega_j$  можно записать аналитические уравнения вида (5). Следовательно, для нескольких частот имеем систему алгебраических уравнений:

$$I(\Omega_j) = N_0 V \sum_{i=1}^n N_i I_s^i(\Omega_j), \quad (6)$$

где  $\Omega_1, \dots, \Omega_n$  – собственные резонансные частоты механических колебаний капель радиусом  $a_1, \dots, a_n$ .

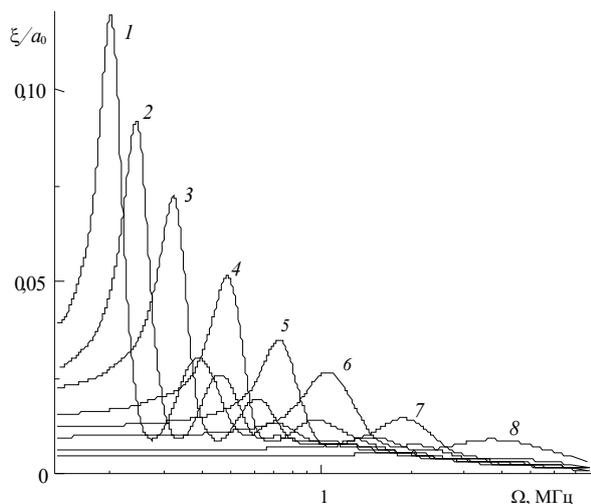


Рис. 1. Зависимость относительной амплитуды установившихся колебаний капель различных размеров от частоты модуляции воздействующего излучения: 1 –  $a_0 = 11,4$  мкм; 2 – 9,5; 3 – 8,2; 4 – 6,2; 5 – 4,7; 6 – 3,7; 7 – 2,4; 8 – 1,6 мкм

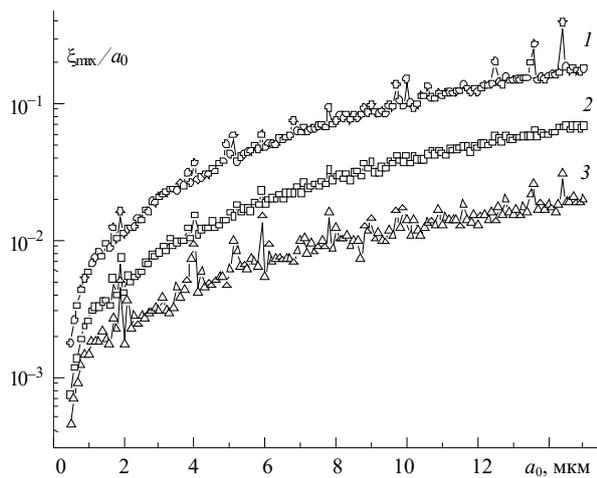


Рис. 2. Зависимость максимальной относительной амплитуды колебаний от размера капли для нескольких собственных частот: 1 –  $\Omega_2$ ; 2 –  $\Omega_3$ ; 3 –  $\Omega_4$

На рис. 1 показаны частотные зависимости амплитуды установившихся колебаний частиц нескольких размеров. Именно такое поведение обуславливает зависимость

$I_s^n(\Omega)$ . Из рисунка четко прослеживается монотонная зависимость величины максимумов резонансных кривых от радиуса частиц. Зависимость величин максимального смещения поверхности капель разных размеров для ряда колебательных мод капель (основной  $l=2$  и высших гармоник  $l=3, 4$ ) приведена на рис. 2.

Как показывает численный анализ, данные кривые хорошо аппроксимируются степенной зависимостью  $\sim a_0^{3/2}$ . Некоторый разброс точек вызван, прежде всего, неоднородностью распределения поверхностной интенсивности электромагнитного поля для оптически крупных капель. Кроме того, наличие резонансов внутреннего оптического поля [12] может приводить к значительному усилению поверхностной интенсивности электромагнитного поля и, соответственно, к увеличению амплитуды деформаций.

На рис. 3 в качестве примера приведены зависимости интенсивности излучения, рассеянного группой частиц, от частоты модуляции накачивающего излучения. При этом в качестве модельной функции распределения частиц по размерам выбиралось стандартное гамма-распределение.

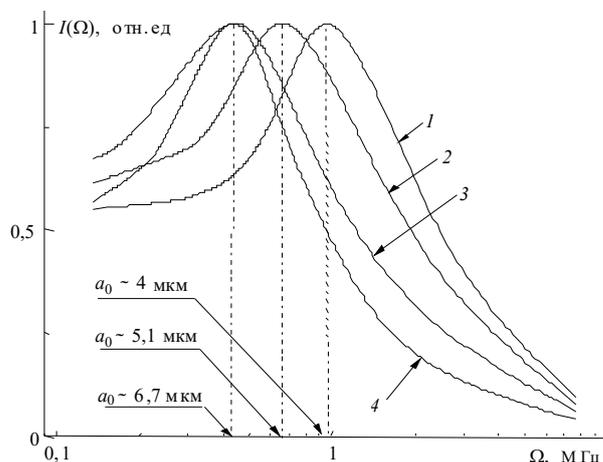


Рис. 3. Частотная зависимость интенсивности рассеянного группой частиц излучения, для исходных гамма-распределений с параметрами: 1 –  $r_m = 3$  мкм,  $\mu = 20$ ; 2 –  $r_m = 3$  мкм,  $\mu = 10$ ; 3 –  $r_m = 3$  мкм,  $\mu = 5$ ; 4 –  $r_m = 5$  мкм,  $\mu = 20$ . Выделено частотное положение максимумов интенсивности и отмечены размеры частиц, соответствующие данным частотам

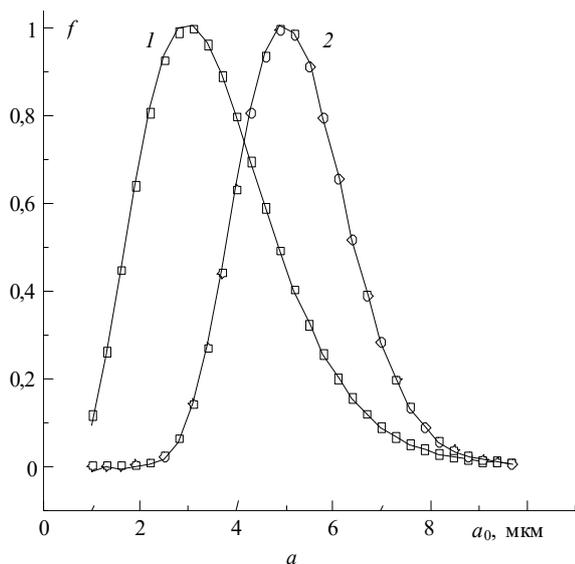
При неизменном модальном радиусе  $r_m$  и увеличении полуширины распределения  $\mu$  не только изменяется полуширина в частотном поведении интенсивности рассеяния, но и сам максимум смещается в сторону меньших частот, что вызвано усилением вклада больших частиц в рассеяние. Поэтому в реальных экспериментах максимум в частотной зависимости рассеянного излучения будет приходиться на меньшую частоту, чем частота, соответствующая модальному радиусу исходного распределения. Исключение составляют монодисперсные и близкие к монодисперсным распределения, где данные частоты будут совпадать. Этот эффект приводит к тому, что максимумы частотного поведения для двух распределений с различными полуширинами и модальными радиусами могут наблюдаться при одном и том же значении частоты модуляции (см. рис. 3, кривые 3 и 4). Однако полуширины данных зависимостей все же будут

различными, что указывает на потенциальную возможность восстановления истинного распределения путем решения обратной задачи в полном объеме.

Таким образом, можно отметить, что в частотном поведении амплитуды низкочастотной составляющей рассеянного на полидисперсном аэрозоле излучения содержится информация о свойствах функции распределения частиц по размерам. Однако получение информации о параметрах функции распределения путем прямого пересчета величин из частотной характеристики, без решения обратной задачи, является некорректным.

Главная диагональ матрицы  $I_s^i(\Omega_j)$  в (6) содержит члены, величина которых определяется максимумами в зависимостях амплитуды колебаний от частоты (см. рис. 1). Однако наличие зависимостей, показанных на рис. 2, приводит к плохой обусловленности данной системы, т.е. определитель матрицы  $I_s^i(\Omega_j)$  близок к нулю. Чтобы улучшить восстановление, следует выровнять значения по главной диагонали. Это осуществляется следующей процедурой:

$$I(\Omega) = N_0 V \int_0^\infty \frac{I_s(a_0, \Omega)}{a_0^s} a_0^s f(a_0) da_0, \quad (7)$$



где  $s$  – показатель степени, который выбирается соответствующим образом.

Система уравнений (6) с учетом (7) была решена численно с использованием стандартных библиотек IMSL для языка FORTRAN 90 (процедура LSARG), при этом полагалось  $s = 1$ . Кроме данной методики, для решения системы (6) использовался итеративный алгоритм, предложенный в работе [13]. Подобный алгоритм прост и легко реализуется на компьютере. При каждой итерации функция распределения преобразуется в соответствии с формулой

$$N_i^{p+1} = N_i^p I(\Omega_i) / I^p(\Omega_i),$$

где  $I(\Omega_i)$  – исходная частотная зависимость интенсивности рассеянного излучения;  $I^p(\Omega_i)$  – частотная зависимость, полученная с использованием функции распределения  $N_i^p$  –  $p$ -й итерации. Восстановление функции распределения обоими способами показали схожие результаты, которые приведены на рис. 4. Для приведенных на рисунках распределений максимумы в частотных зависимостях совпадают, но восстановление позволило вполне удовлетворительно разрешить исходные функции распределения.

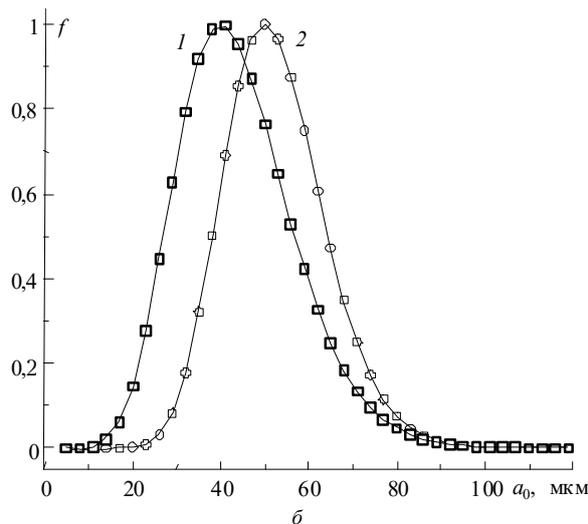


Рис. 4. Восстановленные распределения (кривая) и модельное распределение (точки): а – 1 –  $r_m = 3$  мкм,  $\mu = 5$ ; 2 –  $r_m = 5$  мкм,  $\mu = 20$ ; б – 1 –  $r_m = 40$  мкм,  $\mu = 10$ ; 2 –  $r_m = 50$  мкм,  $\mu = 20$

Важной задачей является оценка устойчивости решения, т.е. анализ влияния ошибок в интенсивности рассеяния на восстановление функции распределения. Для моделирования случайных шумов использовался генератор случайных чисел из процедур IMSL. На рис. 5 приведено частотное поведение интенсивности рассеянного излучения. В трех точках выделен среднеквадратический разброс значений, взятый по десяти выборкам, причем его величина не превышает 10% от величины интенсивности в данной точке. На рис. 6 представлены: модельное распределение, восстановленное распределение не зашумленной задачи, усредненное восстановленное распределение при наличии ошибок в частотном

поведении и среднеквадратический разброс в нескольких точках. В области больших размеров величины ошибок восстановления соответствуют ошибкам в частотной зависимости. И хотя в области малых размеров ошибки восстановления сильнее, усреднение полученного распределения даст результат, лежащий достаточно близко к исходному распределению.

Уменьшение модального радиуса в модельных распределениях приводит к увеличению ошибок восстановления. Так, для размеров частиц  $a_0 < 1$  мкм наблюдается практически полная потеря информации об исходном распределении, что вызвано расплыванием резонансных зависимостей для таких частиц (см. рис. 1).

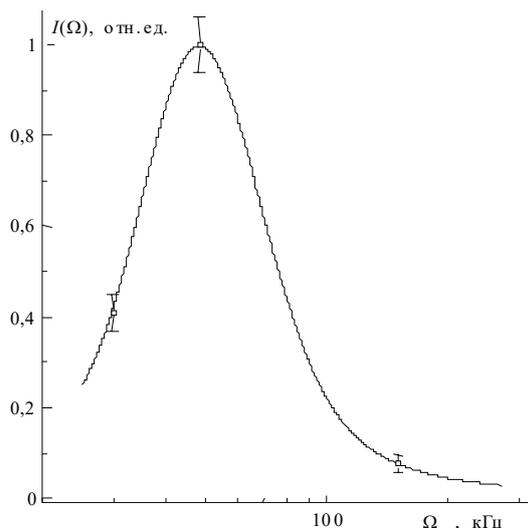


Рис. 5. Частотные характеристики интенсивности рассеяния для модельного распределения (рис. 6). Сплошная линия определяет исходную зависимость интенсивности рассеяния и среднее значение интенсивности, взятое по 10 выборкам, в условиях зашумления, в трех точках указан разброс значений

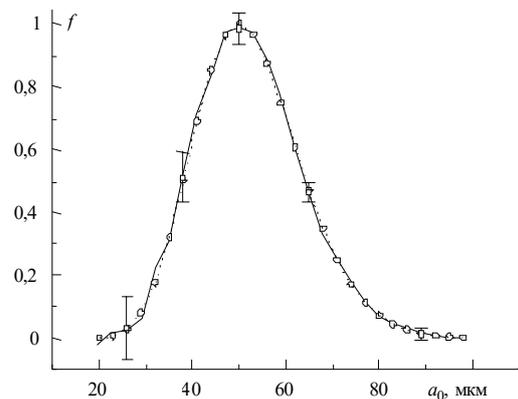


Рис. 6. Восстановленные распределения, пунктирная линия соответствует невозмущенной задаче, модельное распределение (светлые точки). Сплошная кривая соответствует среднему по 10 выборкам, когда частотная зависимость зашумлена (см. рис. 5), в выделенных точках показан разброс значений

## Заключение

Проведенное решение обратной задачи позволяет с удовлетворительной точностью восстанавливать функцию распределения частиц по размерам. Анализ устойчивости решения показал, что для частиц размером  $> 1$  мкм восстановленная функция распределения устойчива к малым ошибкам в частотном поведении интенсивности рассеянного излучения.

Таким образом, проведенные исследования показали реальную возможность практического применения эффекта динамического рассеяния света на пондеромоторных колебаниях поверхности капель для восстановления функции распределения частиц жидкокапельного аэрозоля по размерам.

Авторы выражают искреннюю признательность д.ф.-м.н. В.В. Веретенникову за ценные рекомендации и замечания.

1. Brook M., Latham D.J. // J. Geophys. Res. 1968. V. 73. P. 7137–7144.
2. Brook M., Latham D.J. // J. Atmospheric Sci. 1975. V. 32. P. 2001–2007.
3. Стерлядкин В.В. // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1988. Т. 24. С. 613–621.
4. Землянов А.А. // Квантовая электроника. 1974. Т. 1. № 9. С. 2085–2088.
5. Быковский Ю.А., Манькин Э.А. и др. // Квантовая электроника. 1976. Т. 3. С. 157–162.
6. Иванов Ю.В., Копытин Ю.Д. // Квантовая электроника. 1982. Т. 9. № 3. С. 591–593.
7. Землянов А.А., Гейнц Ю.Э. // Оптика атмосферы и океана. 1997. Т. 10. № 4–5. С. 500–515.
8. Землянов А.А., Гейнц Ю.Э., Пальчиков А.В. // Оптика атмосферы и океана. 1998. Т. 11. № 3. С. 959–966.
9. Zuev V.E., Zemlyanov A.A., Kopytin Yu.D., Kuzikovskii A.V. High-power laser radiation in atmospheric aerosols. Dordrecht, Holland: D. Reidel Publ. Corp., 1984. 291 p.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1957. 266 с.
11. Зув В.Е., Наац И.Э. Современные проблемы атмосферной оптики. Т. 7. Л.: Гидрометеониздат, 1990. 287 с.
12. Землянов А.А., Гейнц Ю.Э. // Оптика атмосферы и океана. 1999. Т. 12. № 10. С. 935–944.
13. Chahine M.T. // J. Opt. Soc. Am. 1968. V. 58. P. 1634–1637.

*A.A. Zemlyanov, Yu.E. Geints, A.V. Palchicov. The use of dynamical light scattering due to induced vibrations of polydispersed liquid-droplet aerosol particles for determination of their size spectra.*

Frequency dependence of intensity of scattering light dynamical component due to induced (ponderomotive) vibrations of polydispersed liquid-droplet aerosol particles has been numerically calculated. Based on numerical solving the inverse problem by the histogram method the possibility is shown to reconstruct the particle size distribution function with satisfactory accuracy.