

АДАПТИВНАЯ И ИНТЕГРАЛЬНАЯ ОПТИКА

УДК 535.375:551.521

Д.А. Безуглов, Р.А. Забродин

Методика аппроксимации гибкого адаптивного пьезокерамического зеркала ограниченным числом полиномов Цернике

Ростовский институт сервиса (филиал) ГОУ ВПО
«Южно-Российский государственный университет экономики и сервиса»

Поступила в редакцию 27.02.2006 г.

Разработана и исследована на примере пьезоэлектрического зеркала методика минимизации числа полиномов Цернике, используемых при описании его профиля с учетом геометрических характеристик функций отклика и вклада каждого из полиномов в итоговую ошибку аппроксимации фазового фронта в соответствии со статистикой фазовых флуктуаций. При этом для аппроксимации aberrаций турбулентной атмосферы и функций отклика использован близкий к оптимальному базис полиномов Цернике. Предложенный подход позволяет существенно упростить конструкцию датчика фазового фронта – уменьшить число его каналов в малопараметрических адаптивных оптических системах.

Введение

При компенсации нестационарных фазовых искажений, которые возникают при распространении волнового фронта в оптически неоднородной среде, в качестве исполнительного устройства адаптивных оптических систем апертурного зондирования и фазового сопряжения применяются гибкие зеркала со сплошной деформируемой поверхностью [1–3]. Они являются ключевыми элементами многих современных систем управления и коррекции излучения. При этом параметры системы и спектр решаемых задач во многом определяются возможностями таких зеркал [4, 5].

Одним из основных требований к корректору фазового фронта является возможность внесения требуемых искажений в фазу падающего излучения. В работах [3–5] показано, что применение корректоров фазового фронта на основе пьезокерамических пластин обеспечивает лучшую аппроксимацию профиля фазы по сравнению с сегментированным корректором, так как фазовые искажения обычно являются плавными. В [3–6] были разработаны и исследованы адаптивные зеркала на основе пьезоэлектрических пластин и математический аппарат для их описания, а также получены эмпирические профили отклика исследуемых гибких адаптивных зеркал.

При создании адаптивных оптических систем фазового сопряжения проводят, как правило [7, 8], измерения фазового распределения на апертуре адаптивной оптической системы. Затем эти измерения одним из численных методов пересчитывают в базис функций отклика гибкого зеркала. Следует отметить, что универсальным разложением, отвечающим ряду условий оптимальности, является разложение Карунена–Лоэва [2]. Оно характеризуется следующими свойствами, обусловливающими его оптимальность: минимальной среднеквадратической ошиб-

кой при удержании заданного числа членов в бесконечном ряде разложения, получением наибольшего по сравнению с любым другим разложением количества информации о представляемой усеченным рядом функции, какое бы число членов ряда ни удерживалось, а также некоррелированностью коэффициентов разложения, что упрощает дальнейшее использование результатов разложения и их анализ.

Однако разложение в ряд Карунена–Лоэва обладает и существенными недостатками: оно требует большого объема априорных сведений, т.е. знания корреляционной функции измеряемой характеристики, которые часто отсутствуют или недостаточны. При этом собственные функции разложения характеристики искаженного поля имеют весьма сложную структуру, а практическая реализация их в виде корректирующих устройств с переменным базисом функций оказывается затруднительной [2].

Для аппроксимации aberrаций турбулентной атмосферы близкой к оптимальной является система полиномов Цернике, ортогональных (ортонормированных) внутри единичной окружности или окружности радиусом R [1, 2, 9]. При этом оказывается удобным с помощью датчика фазового фронта [7, 8] сразу измерить распределение фазы в виде ограниченного числа полиномов Цернике и, имея разложение функций отклика гибкого адаптивного зеркала в виде линейной комбинации тех же полиномов, пересчитать соответствующие сигналы управления. При этом очень часто оказывается, что функции отклика отдельных электродов корректоров фазового фронта достаточно точно описываются ограниченным числом полиномов Цернике, а вклад самих этих полиномов в итоговую ошибку аппроксимации фазового распределения нелинейно зависит от номера полинома. Таким образом, возникает задача правильного выбора набора полиномов для

организации управления в конкретной адаптивной оптической системе.

В данной статье представлена разработанная нами методика минимизации числа полиномов Цернике, используемых при описании профиля гибкого зеркала с учетом геометрических характеристик функций отклика и вклада каждого из полиномов в итоговую ошибку аппроксимации фазового фронта в соответствии со статистикой фазовых флуктуаций.

1. Аппроксимация функций отклика корректора

Для аппроксимации функций отклика гибкого адаптивного зеркала используем систему полиномов Цернике, ортогональных (ортонормированных) внутри единичной окружности или окружности радиусом R , представленных в полярных координатах r, θ [1, 2, 9]:

$$Z_j(r, \theta) = \begin{cases} \sqrt{n+1}R_n^m(r)\sqrt{2}\cos m\theta & \text{для четных полиномов и } m \neq 0, \\ \sqrt{n+1}R_n^m(r)\sqrt{2}\sin m\theta & \text{для нечетных полиномов и } m \neq 0, \\ \sqrt{n+1}R_n^0(r), & \text{для } m = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где

$$R_n^m(r) = \sum_{s=0}^{(n-m)/2} \frac{(-1)^s(n-s)!r^{n-2s}}{s![(n+m)/2-s]![(n-m)/2-s]!}.$$

Величины n и m – всегда целые и удовлетворяют условию $n \leq m$, $n - |m| =$ четно. Индекс j является порядковым номером моды и зависит от n и m . Условие ортогональности в круге единичного радиуса имеет вид

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 Z_j(r, \theta) Z_{j'}(r, \theta) dr d\theta = \delta_{j'}, \quad (2)$$

где

$$W(r) = \begin{cases} 1/\pi & \text{при } |r| \leq 1, \\ 0 & \text{при } |r| > 1; \end{cases}$$

$\delta_{j'}$ – символ Кронекера.

Функции отклика фазового корректора можно представить в базисе Цернике следующим образом:

$$S_i(r, \theta) = \sum_{j=1}^N a_{ij} Z_j(r, \theta), \quad i = \overline{1, M}, \quad (3)$$

где a_{ij} – коэффициент разложения Цернике при j -й функции базиса для i -й функции отклика корректора $S_i(r, \theta)$; N – число полиномов; M – число функций отклика корректора.

Фазовый фронт, описываемый корректором:

$$\varphi_k(r, \theta) = \sum_{i=1}^M S_i(r, \theta) b_i, \quad (4)$$

где b_i – коэффициенты разложения фазового фронта по функциям отклика корректора, т.е. пьезоэлектрического зеркала.

При работе адаптивной оптической системы фактически величины b_i являются сигналами управления. Фазовый фронт, измеренный датчиком [7, 8], в базисе Цернике имеет следующий вид:

$$\varphi_{\text{изм}}(r, \theta) = \sum_{j=1}^N Z_j(r, \theta) c_j, \quad (5)$$

где c_j – коэффициенты разложения фазового фронта по полиномам Цернике (сигналы с выхода датчика фазового фронта).

Подставив (4) в (3), получим

$$\varphi_k(r, \theta) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N a_{ij} Z_j(r, \theta) b_i. \quad (6)$$

При этом следует отметить, что число функций отклика M является конструктивным параметром, а число полиномов N может быть определено на основании известных соотношений [3]:

$$N = \left\lceil \left(\frac{-0,2944(D/r_0)^{\frac{5}{3}}}{\ln R_{\text{III}}} \right)^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \right\rceil, \quad (7)$$

где D – диаметр апертуры; R_{III} – число Штреля, определяющее качество адаптивной коррекции и выбираемое обычно в пределах $0,7 \div 0,8$; $[*]$ – оператор вычисления целой части числа; r_0 – радиус Фрида, определяемый выражением [2, 3]:

$$r_0 = \left(0,423 k_1^2 \int_0^L C_n^2(l) dl \right)^{\frac{3}{5}}, \quad (8)$$

где L – толщина турбулентного слоя; $C_n^2(l)$ – структурная постоянная атмосферы; $k_1 = 2\pi/\lambda$ – волновое число излучения.

Для определения коэффициентов разложения фазового фронта по функциям отклика корректора b_i приравняем выражения (5) и (6):

$$\varphi_k(r, \theta) = \varphi_{\text{изм}}(r, \theta). \quad (9)$$

Или с учетом (4), (5)

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N a_{ij} Z_j(r, \theta) b_i = \sum_{j=1}^N Z_j(r, \theta) c_j. \quad (10)$$

Решение последнего уравнения получим, минимизируя следующую квадратичную форму:

$$\sum_{j=1}^N \left(\sum_{i=1}^M a_{ij} b_i - c_j \right)^2 \rightarrow \min. \quad (11)$$

Вычислив соответствующие частные производные и приравняв их к нулю:

$$\frac{\partial}{\partial b_i} \sum_{j=1}^N \left(\sum_{i=1}^M a_{ij} b_i - c_j \right)^2 = 0, \quad (12)$$

получим систему линейных уравнений из N уравнений:

$$\sum_{i=1}^M a_{ik} a_{ji} b_i = \sum_{i=1}^M c_j a_{ji}, \quad i, k = \overline{1, N}; \quad (13)$$

$$A_1 \cdot \mathbf{B} = \mathbf{D}, \quad (14)$$

где A_1 – матрица $N \times N$; \mathbf{B} , \mathbf{D} – вектор-столбцы размером N , причем элементы A_1 и \mathbf{D} определяются следующим образом:

$$A_{lkj} = \sum_{i=1}^M a_{ik} a_{ji}, \quad D_j = \sum_{i=1}^M c_j a_{ji}. \quad (15)$$

Таким образом, найденные коэффициенты разложения фазового фронта по функциям отклика корректора b_i могут быть использованы для организации управления в адаптивной оптической системе, а матрица A_1 является, по существу, матрицей перехода между базисом Цернике и базисом функций отклика.

Следует отметить, что количество полиномов Цернике, используемых при описании соответствующих функций отклика (5), можно уменьшить, учитя при этом вклад каждого из них в аппроксимацию собственно функции отклика $S_i(r, \theta)$, а также вклад соответствующего полинома в описание статистики фазовых флуктуаций. При этом могут быть снижены аппаратурные затраты на построение адаптивной оптической системы, так как при незначительном ухудшении в допустимых пределах качества функционирования (числа Штреля) можно уменьшить число каналов в датчике фазового фронта. Это связано с тем, что нет смысла вычислять те коэффициенты разложения фазового фронта c_j , которые в дальнейшем в силу конструкции используемого корректора не могут быть использованы при построении адаптивной оптической системы.

Для этого с помощью метода наименьших квадратов рассчитаем коэффициенты разложения функции отклика $S_i(r, \theta)$ в ряд Цернике в полярных координатах с точностью до N членов, где первоначально N определяется в соответствии с выражением (7). При этом базис Цернике в данном случае удобен тем, что в нем могут быть представлены как функции отклика $S_i(r, \theta)$, так и статистика фазовых атмосферных флуктуаций [1, 2]. Минимизируем квадратичную форму для i -й функции отклика:

$$\sum_{j=1}^N \left(\sum_{k=1}^K a_{ij} Z_j(r_k, \theta_k) - w_k \right)^2 \rightarrow \min, \quad (16)$$

где w_k – экспериментально измеренные значения функций отклика в точках апертуры зеркала; $Z_j(r_k, \theta_k)$ – соответственно значения полиномов в этих точках; $k = \overline{1, K}$; K – число точек, в которых производят измерение значений функций отклика

$$\frac{\partial}{\partial a_{ij}} \sum_{j=1}^N \left(\sum_{k=1}^K a_{ij} Z_j(r_k, \theta_k) - w_k \right)^2 = 0. \quad (17)$$

В результате получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных:

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} \left[\sum_{k=1}^K Z_l(r_k, \theta_k) Z_j(r_k, \theta_k) \right] = \sum_{j=1}^N w_k z_l(r_k, \theta_k), \\ l = \overline{1, N}, \quad (18)$$

где коэффициенты матрицы системы имеют вид

$$M_{lj} = \sum_{k=1}^K Z_l(r_k, \theta_k) Z_j(r_k, \theta_k),$$

а элементы вектора свободных членов определяются соотношением

$$B_{l1} = \sum_{k=1}^K w_k z_l(r_k, \theta_k).$$

В силу ортогональности полиномов Цернике матрица коэффициентов M при стремлении количества точек измерений K к бесконечности, т.е. перехода к интегральной сумме вида (2), должна иметь в общем случае диагональный вид. Однако ввиду того что количество точек измерений конечно, это условие не выполняется и матрица M , строго говоря, не диагональна. Так, проведенный авторами вычислительный эксперимент показал, что даже при увеличении числа точек измерений до 10^5 в матрице M присутствуют недиагональные члены: a_{38} , a_{27} и т.д., хотя число их мало.

В результате решение системы (18) может быть получено любым известным способом, например методом Гаусса. Однако при некоторых условиях (неправильном выборе точек для аппроксимации) полученная система может быть плохо обусловлена ($|M| \approx 0$). В этом случае задача обращения матрицы является неустойчивой в смысле Адамара и метод Гаусса не применим ввиду быстрого накопления погрешности вычисления. Тогда при выборе сетки аппроксимации необходимо минимизировать число точек, в которых выполняется условие $Z_j(r_k, \theta_k) = 0$. Это можно сделать при построении алгоритма вычислений, введя небольшой угловой сдвиг в выбранной системе координат $\Delta\theta$.

Для оценки числа необходимых полиномов после восстановления профиля зеркала воспользуемся следующими соображениями. Пронормируем полученные коэффициенты:

$$a_{ij}^* = a_{ij} / \sum_{j=1}^N a_{ij}. \quad (19)$$

Вычислим вклад каждого члена в разложении Цернике в качестве коррекции колмогоровской турбулентности, используя выражения из [3]:

$$\Delta J^{j,j+1} \left(\frac{D}{r_0} \right) = \Delta_{j+1} \left(\frac{D}{r_0} \right) - \Delta_j \left(\frac{D}{r_0} \right), \quad j = \overline{1, N-1}, \quad (20)$$

где $\Delta_j \left(\frac{D}{r_0} \right) = 0,2944 j^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{D}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}}$ – среднеквадратическая остаточная погрешность. Пронормируем полученные разности:

$$\Delta J^{*j,j+1} = \Delta J^{j,j+1} / \sum_{j=1}^N \Delta J^{j,j+1}. \quad (21)$$

Итоговое выражение для нормированных коэффициентов разложения с учетом весовых коэффициентов вклада каждого полинома в остаточную ошибку аппроксимации фазового фронта имеет вид

$$a_{ij}^n = \Delta J^{*j,j+1} a_{ij}^*. \quad (22)$$

Выбрав порог Δa_{ij}^n , можно последовательно исключать из выражения (3) коэффициенты Цернике, вносящие наименьший вклад, оценивая при этом ухудшение качества коррекции фазового фронта в соответствии со следующим выражением:

$$\sigma^2 = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (a_{ij}^* - a_{ij}^n) Z_j(r_k, \theta_k)^2, \quad (23)$$

где соответствующие j -е значения a_{ij}^n заменены на 0; σ – среднеквадратическое отклонение.

2. Численный эксперимент

Для исследования возможности реализации предложенной методики использованы результаты экспериментальных исследований гибкого адаптивного зеркала на основе пьезоэлектрических пластин из пьезокерамики ЦТБС-3 [3, 5]. Отражающая поверхность зеркала диаметром 50 мм образована серебряными электродами, напыленными на поверхность пластины из пьезокерамики толщиной 1 мм. На рис. 1 представлен образец с пятью управляющими электродами. Измерения [3, 5] проводились в плоскостях a , b , c и d с шагом $h = 5$ мм. Рассмотрим использование предложенной методики на примере использования только четырех боковых управляющих электродов.

На рис. 2 представлены профили отклика образца при приложении напряжения к управляющему электроду № 2.

В нашем случае рассмотрим базис из девяти полиномов Цернике в полярной системе координат, так как этого базиса достаточно для компенсации основных aberrаций [3]. При этом среднюю fazу учитывать не будем:

$$\begin{aligned} Z_2(r, \theta) &= 2r \cos(\theta), \quad Z_3(r, \theta) = 2r \sin(\theta), \\ Z_4(r, \theta) &= \sqrt{6}r^2 \sin(2\theta), \quad Z_5(r, \theta) = \sqrt{3}(2r^2 - 1), \\ Z_6(r, \theta) &= \sqrt{6}r^2 \cos(2\theta), \quad Z_7(r, \theta) = 2\sqrt{2}r^3 \sin(3\theta), \\ Z_8(r, \theta) &= 2\sqrt{2}(3r^3 - 2r) \sin(\theta), \\ Z_9(r, \theta) &= 2\sqrt{2}(3r^3 - 2r) \cos(\theta), \\ Z_{10}(r, \theta) &= 2\sqrt{2}r^3 \cos(3\theta). \end{aligned} \quad (24)$$

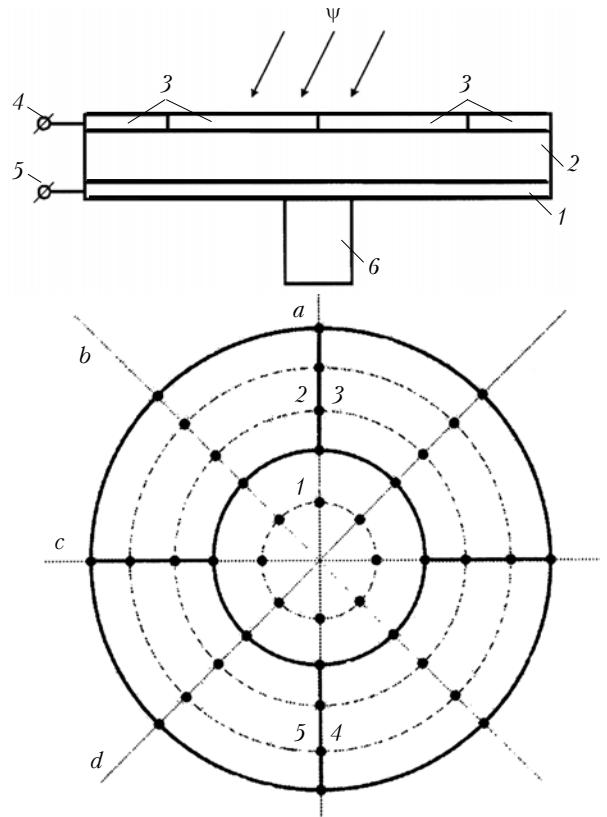


Рис. 1. Конструкция гибкого зеркала: 1 – металлическая подложка; 2 – пьезокерамическая пластина; 3 – управляющие электроды; 4, 5 – клеммы; 6 – опора

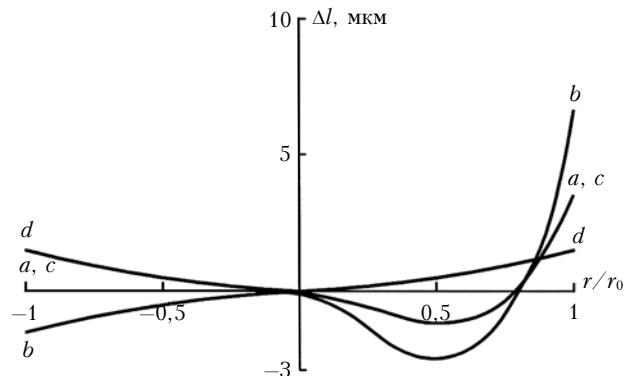


Рис. 2. Профили отклика пьезокерамического зеркала

На основе полученных данных методом математического моделирования с использованием математического пакета Mathcad 11 была построена функция отклика зеркала (см. рис. 1) при подаче управляющего напряжения к боковому электроду. По имеющимся экспериментальным данным [3, 5] методом, описанным выше, были получены коэффициенты разложения Цернике для рассмотренных в эксперименте управляющих воздействий. Полученные коэффициенты были пронормированы в соответствии с выражениями (19), (21) и (22). При этом были определены наиболее значимые для компенсации атмосферных искажений моды Цернике, используемые при описании функций отклика исследуемого

Коэффициент	Номер моды										СКО
	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
a_{ij}^*	0,254	0,254	-0,043	0,713	0	0,222	0,635	0,635	-0,222	-	
a_{ij}	0,104	0,104	-0,018	0,291	0	0,091	0,259	0,259	-0,091	-	
$\Delta J^{*,j+1}$	0,407	0,222	0,127	0,080	0,054	0,039	0,029	0,023	0,018	-	
$a_{ij}^* \cdot 10^{-2}$ (нет 6)	4,227	2,305	-0,225	2,338	0	0,354	0,757	0,585	-0,162	0,892	
$a_{ij}^* \cdot 10^{-2}$ (нет 6, 10)	4,227	2,305	-0,225	2,338	0	0,354	0,757	0,585	0	0,921	
$a_{ij}^* \cdot 10^{-2}$ (нет 4, 6, 10)	4,227	2,305	0	2,338	0	0,354	0,757	0,585	0	0,922	
$a_{ij}^* \cdot 10^{-2}$ (нет 4, 6, 7, 10)	4,227	2,305	0	2,338	0	0	0,757	0,585	0	0,949	

пьезоэлектрического зеркала. Значение числа Штреля было принято равным 0,8. Оценка показала, что в данном случае значимыми для квазиоптимальной коррекции ВФ являются моды: 2, 3, 5, 8, 9. Результаты расчетов для наглядности сведены в таблицу.

Как следует из приведенной таблицы, предложенный подход позволяет обоснованно минимизировать число полиномов Цернике в описании функций отклика пьезоэлектрического зеркала. При этом удаление из базиса коэффициентов разложения с номерами 4, 6, 10 приводит к увеличению СКО на 3%, а удаление из базиса коэффициентов разложения с номерами 4, 6, 7, 10 к увеличению СКО на 6%. В силу симметричности управляющих электродов полученные результаты могут быть использованы и для остальных управляющих электродов.

Выходы

Нами разработана и исследована на примере пьезоэлектрического зеркала [3, 5] методика минимизации числа полиномов Цернике, используемых при описании его профиля с учетом геометрических характеристик функций отклика и вклада каждого из полиномов в итоговую ошибку аппроксимации фазового фронта в соответствии со статистикой фазовых флуктуаций.

При этом для аппроксимации aberrаций турбулентной атмосферы и функций отклика использован близкий к оптимальному базис полиномов Цернике, ортогональных (ортонормированных) внутри единичной окружности. С учетом того что для данного базиса известна статистика фазовых флуктуаций, предложенный в работе подход позволяет существенно упростить конструкцию датчика фазового фронта – уменьшить число его каналов. В том случае, когда особенности корректора фазового фронта не позволяют воспроизводить те или иные моды Цернике, а требуется повысить качество коррекции, можно поступить следующим образом. Первоначально нужно

выбрать число полиномов N не в соответствии с выражением (7), а больше на 20–30% и затем, воспользовавшись предложенной методикой, минимизировать базис, последовательно удаляя из него полиномы, вносящие минимальный вклад в отклик корректора с учетом статистики турбулентных искаажений.

С учетом того что на практике используется ограниченное число полиномов, предложенный подход можно применять в малопараметрических адаптивных оптических системах.

1. Воронцов М.А., Шмальгаузен В.И. Принципы адаптивной оптики. М.: Наука, 1985. 336 с.
2. Лукьянов Д.П., Корниенко А.А., Рудницкий Б.Е. Оптические адаптивные системы / Под ред. Д.П. Лукьянова. М.: Радио и связь, 1989. 240 с.
3. Безуглов Д.А., Мастропас З.П., Мищенко Е.Н., Мясников Э.Н., Толстоусов С.В. Исследование возможности компенсации перекрестного влияния приводов гибкого адаптивного зеркала // Оптика атмосф. 1989. Т. 2. № 12. С. 1305–1309.
4. Соболев А.С., Черезова Т.Ю., Кудряшов А.В. Аналитическая и численная модели гибкого адаптивного зеркала // Оптика атмосф. и океана. 2005. Т. 18. № 3. С. 277–281.
5. А.с. 1695252 СССР, МКИ5 Г 02 В 5/10. Зеркальный корректор волнового фронта / Д.А. Безуглов, З.П. Мастропас, Е.Н. Мищенко, Э.Н. Мясников, С.В. Толстоусов, В.Л. Тюриков. Опубл. в БИ. 1991. № 44.
6. Исаев Ю.Н., Захарова Е.В. Критерии эффективности адаптивных оптических систем при различных базисах разложения фазы случайной волны // Оптика атмосф. и океана. 1999. Т. 12. № 8. С. 708–711.
7. А.с. 1720051 СССР, МКИ5 Г 02 В 26/06. Датчик волнового фронта / Д.А. Безуглов, Е.Н. Мищенко, М.И. Крымский, О.В. Серпенинов. Опубл. в БИ. 1992. № 10.
8. А.с. 1647496 СССР, МКИ5 Г 02 В 27/00. Датчик волнового фронта / Д.А. Безуглов, Е.Н. Мищенко, В.Л. Тюриков. Опубл. в БИ. 1991. № 17.
9. Noll R.J. Zernike polynomials and atmospheric turbulence // J. Opt. Soc. Amer. 1976. V. 66. N 3. P. 207–211.

D.A. Bezuglov, R.A. Zabrodin. Technique of approximation of floppy adaptive piezoceramic mirrors by a limited number of Zernike polynomials.

A technique of minimization of a number of polynomials Zernike is developed and investigated by the example of a piezoelectric mirror in view of geometrical characteristics of the response functions and the contribution of each polynomials in a final error of approximation of phase front according to statistics of phase fluctuation. Thus, for approximation of aberrations of a turbulent atmosphere and functions of the response the basis of polynomials Zernike is used close to optimum. The approach suggested in this work allows one to simplify essentially a design of the gauge of phase front: to reduce the number of its channels in few parametrical adaptive optical systems.