

Модовый изопланатизм фазовых флуктуаций

Л.А. Больбасова, В.П. Лукин*

Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН
634021, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1
Томский государственный университет
634050, г. Томск, пр. Ленина, 40

Поступила в редакцию 26.08.2008 г.

Рассматривается явление изопланатизма применительно к задачам адаптивной коррекции атмосферных искажений. На основе представления волновых aberrаций в виде разложения в ряд по полиномам Цернике рассчитывается угловая корреляция модовых составляющих фазовых флуктуаций оптического излучения, распространяющегося в турбулентной атмосфере. Определяется размер области изопланатизма, и анализируется влияние модели высотной зависимости структурного параметра флуктуаций показателя преломления атмосферы, внешнего масштаба атмосферной турбулентности и размера приемной апертуры телескопической системы.

Ключевые слова: изопланатизм, адаптивная коррекция атмосферных искажений, волновые aberrации.

Введение

В общей теории формирования изображения строгий, или глобальный, изопланатизм любого изображающего прибора заключается в инвариантности к сдвигу изображающего оператора [1]. Изображающий оператор для линейных приборов, как известно, может быть выражен через функцию рассеяния точки (ФРТ), которая в случае строгого изопланатизма не зависит от обобщенных координат на предмете и изображении. Так как строгий глобальный изопланатизм наблюдается на практике крайне редко, работа прибора рассматривается в отдельных изопланатических зонах [2], на которые разбивается поле зрения.

Условие изопланатизма заключается в равенстве нулю производной от ФРТ по смещению предмета, норма этой производной может служить мерой неизопланатизма, а задачей теории изопланатизма в оптических системах является оценка именно этой величины. ФРТ оптических систем полностью определяется aberrациями, а также формой, размерами и пропусканием зрачка [3]. Если считать, что последние факторы остаются постоянными с точностью до величин второго порядка малости при смещении точки предмета, то неизопланатизм определяется изменением aberrаций. Это приводит к использованию термина «изопланатический угол» в случае обычных оптических систем для выделения угловой области поля зрения, в котором сохраняется постоянство aberrаций оптической системы и, следовательно, оптической передаточной функции (ОПФ) [4].

При этом классическая теория изопланатизма [2, 4–6] развита для осевой зоны центрированных оптических систем с изображением на конечном расстоянии, что ограничивает применение этого понятия при проектировании современных оптико-электронных систем, таких как системы атмосферной адаптивной оптики, где aberrации обусловлены действием атмосферной турбулентности. Ввиду сильной зависимости таких систем от качества используемой информации угловой неизопланатизм становится фактором, налагающим серьезные ограничения на поле зрения адаптивных оптических систем и работу таких систем в целом [7].

Безусловно, понятие изопланатизма, ставшее традиционным, в приложении к адаптивным оптическим системам требует уточнения. В первую очередь это связано с тем, что практически всегда мы имеем дело с частичной фазовой адаптивной коррекцией. Понятие «угол изопланатизма» для атмосферной трассы было введено в начале 80-х гг. [8], при этом «угол изопланатизма» играет роль, например, предельно допустимого угла расположения опорного источника (нескольких источников) или определяет максимальный угловой размер объекта, который может корректироваться системой [9, 10].

Угол изопланатизма

Стандартное определение атмосферного изопланатического угла всей толщи атмосферы [7] записывается как

$$\theta_0 = \left\{ 2,91k^2 \int_0^\infty d\xi \xi^{5/3} C_n^2(\xi) \right\}^{-3/5}, \quad (1)$$

* Лидия Адольфовна Больбасова (sla@iao.ru); Владимир Петрович Лукин (lukin@iao.ru).

если определить этот параметр через радиус когерентности плоской волны [11]:

$$r_0^{\text{пл}} = \left\{ \frac{2,82}{6,88} k^2 \int_0^x d\xi C_n^2(\xi) \right\}^{-3/5}, \quad (2)$$

то получим

$$\theta_0 = 0,31 r_0^{\text{пл}} / h_\xi, \quad (3)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число излучения; ξ — высота; h_ξ имеет размерность длины и определяет толщину некоторого эффективного слоя атмосферы:

$$h_\xi = \int_0^\infty d\xi \xi C_n^2(\xi) / \int_0^\infty d\xi C_n^2(\xi) = \mu_1 / \mu_0, \quad (4)$$

$\mu_0 = \int_0^\infty d\xi C_n^2(\xi)$ и $\mu_1 = \int_0^\infty d\xi \xi C_n^2(\xi)$ — нулевой момент

и момент первого порядка вертикального профиля структурного параметра флюктуаций показателя преломления. Следовательно, можно определить угол изопланатизма как угол, под которым виден радиус когерентности в пределах эффективного слоя атмосферы с расстояния, равного толщине этого слоя.

Результаты численных расчетов в условиях вертикального распространения для различных моделей высотной зависимости $C_n^2(\xi)$ [11–13] обобщены в таблице ($\lambda = 0,5$ мкм). Проанализируем влияние увеличения высоты расположения телескопа на эти параметры (рис. 1).

Модель вертикального профиля турбулентности	$r_0^{\text{пл}}$, м	θ_0 , мкрад	h_ξ , м
Модель для обсерватории Сьерра Паранааль, Чили	0,1595	7,64546	665
Модель для обсерватории Мауна Кеа, о. Гавайи	0,1349	11,3797	1558
Модель для обсерватории AMOS о. Мауи, Гавайские острова	0,1802	17,5750	932
Модель Хафнагеля—Волли 5/7	0,0502	6,89989	989
Модель Гринвуда	0,1292	13,7097	1687

Как видно, это увеличение ведет к увеличению радиуса когерентности и эффективной высоты и не оказывает влияния на размер угла изопланатизма. Полученный результат свидетельствует, что традиционное определение угла изопланатизма для адаптивных оптических систем не отражает реальной картины изопланатизма и требует уточнения. В частности, из-за различия геометрических характеристик, в данном случае длины трассы, должны существовать различия в разности хода оптических пучков. Очевидно, что при частичной коррекции статистика остаточных aberrаций волнового фронта будет другой, поскольку спектр мощности уменьшен и угол изопланатизма должен увеличиваться. К тому же такое определение не учитывает размер апертуры и влияние внешнего масштаба турбулентности, который, как было показано во многих работах, обуславливает остаточные искажения в адаптивных оптических системах.

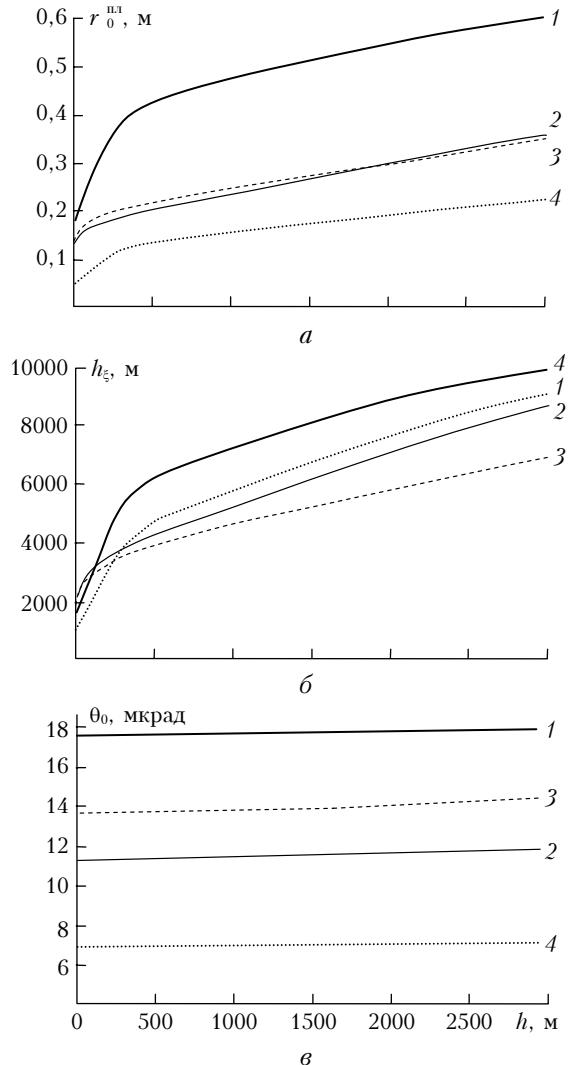


Рис. 1. Изменения с увеличением высоты расположения телескопа h : a — радиуса когерентности плоской волны, b — эффективной толщины турбулентной атмосферы, c — угла изопланатизма для различных моделей профиля турбулентности сверху вниз: 1 — модель AMOS; 2 — модель Мауна Кеа; 3 — модель Гринвуда; 4 — модель HV 5/7

Угловая корреляция фазовых флюктуаций

Определение изопланатизма в классической теории как постоянство aberrаций оптической системы по полю приводит к необходимости его описания с помощью aberrационной функции как функции координат луча, в геометрической оптике это либо волновая aberrация, либо эйконалы [5].

В системах атмосферной адаптивной оптики в этом качестве выступают волновые aberrации, обусловленные атмосферной турбулентностью. Значит, размер области изопланатизма в такой системе будет определяться существованием корреляции фазовых искажений волнового фронта излучения в турбулентной атмосфере. Поэтому рассчитаем угловую корреляцию модовых составляющих фазовых флюктуаций,

так как практически всегда мы имеем дело с частичной коррекцией, и рассмотрим практическое приложение наших результатов к работе адаптивных оптических систем.

Для этого воспользуемся представлением функции волновой aberrации в виде разложения в ряд по полиномам Цернике, которые содержат информацию о пространственных свойствах фазовых флуктуаций. Пусть оптическое излучение от двух внеатмосферных источников падает на апертуру телескопа диаметром D под углами 0 и θ соответственно. Представление фазы в виде разложения по ортогональным полиномам Цернике для волнового фронта, падающего под углом 0° , имеет вид [14]:

$$S(\rho) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j Z_j\left(\frac{2\rho_1}{D}\right), \quad (5)$$

и волновой фронт на угловом расстоянии θ

$$S(\rho, \theta) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(\theta) Z_j\left(\frac{2\rho_2}{D}\right). \quad (6)$$

Используя свойства ортогональности полиномов на круге, т.е.

$$\int d^2\rho Z_j\left(\frac{2\rho_1}{D}\right) Z_{j'}\left(\frac{2\rho_2}{D}\right) = c_j \delta_{jj'},$$

где ρ_1 и ρ_2 характеризуют положение в плоскости; R – радиус апертуры телескопа; $\delta_{jj'}$ – символ Кронекера, можем записать для коэффициентов разложения

$$a_j = \int_R d^2\rho W(\rho) S(\rho, \theta) Z_j\left(\frac{2\rho}{D}\right). \quad (7)$$

Корреляционная функция запишется тогда следующим образом:

$$\begin{aligned} B &= \langle a_j(\rho_1, 0) a_j(\rho_2, \theta) \rangle = \\ &= \int d^2\rho_1 d^2\rho_2 W(\rho_1) W(\rho_2) \langle S(\rho_1, 0) S(\rho_2) \rangle Z_j\left(\frac{2\rho_1}{D}\right) Z_j\left(\frac{2\rho_2}{D}\right) = \\ &= \left(\frac{1}{\pi R^2}\right)^2 \int_R d^2\rho_1 d^2\rho_2 \langle S(\rho_1, \theta) S(\rho_2) \rangle Z_j\left(\frac{2\rho_1}{D}\right) Z_j\left(\frac{2\rho_2}{D}\right). \end{aligned} \quad (8)$$

Используя представление случайного процесса в виде интеграла Фурье – Стильтьеса, с учетом дельта-коррелированности спектральных компонент и интегрируя по угловой координате [8], получаем следующее выражение для корреляционной функции:

$$B(\theta) = 8\pi \int_0^\infty \chi d\chi F(\chi) \frac{J_2^2(\chi)}{\chi^2} \left[J_0\left(\frac{2\theta h_\xi}{D}\chi\right) \mp J_2\left(\frac{2\theta h_\xi}{D}\chi\right) \right]. \quad (9)$$

Воспользуемся следующей моделью турбулентного спектра:

$$\Phi_n(\chi) = 0,033 C_n^2(\xi) \chi^{-11/3} \left(1 - \exp\left[-\chi^2/\chi_0^2\right]\right), \quad (10)$$

где $C_n^2(\xi)$ – высотная зависимость структурного параметра показателя преломления; χ – волновое число для турбулентных неоднородностей.

В результате получим следующее выражение для коэффициента угловой корреляции $b_{x,y}(\theta) = B(\theta)/B(0)$ случайных наклонов волнового фронта, которые проявляются как дрожание изображения при астрономических наблюдениях [15]:

$$\begin{aligned} b_{x,y}(\theta) &= \left[\int_0^\infty d\xi C_n^2(\xi) \int_0^\infty d\chi \chi^{-11/3} \left[1 - \exp\left(-\frac{\chi^2}{\chi_0^2}\right) \right] \times \right. \\ &\times \left. \frac{J_2^2(\chi)}{\chi} \left[J_0\left(\frac{2\theta h_\xi}{D}\chi\right) \mp J_2\left(\frac{2\theta h_\xi}{D}\chi\right) \right] \right] \Big/ \left[\int_0^\infty d\xi C_n^2(\xi) \int_0^\infty d\chi \chi^{-11/3} \times \right. \\ &\times \left. \left[1 - \exp\left(-\frac{\chi^2}{\chi_0^2}\right) \right] \frac{J_2^2(\chi)}{\chi} \right], \end{aligned} \quad (11)$$

где J_0 и J_2 – функции Бесселя. В этой формуле знак минус соответствует продольному (или параллельному углу разноса θ), т.е. наклону по оси X , а знак плюс – поперечному разносу, т.е. наклону по оси Y .

Воспользуемся следующей моделью высотного распределения $C_n^2(\xi)$:

$$C_n^2(h) = C_{n0}^2 \exp[-h/h_\xi]. \quad (12)$$

В случае бесконечного внешнего масштаба из (11) после интегрирования получим следующие выражения для наклонов волнового фронта по осям X и Y соответственно:

$$\begin{aligned} b_X(\theta) &= -0,1023 \left(\frac{h_\xi}{D} \theta \right)^{-2} + \\ &+ 0,7211 \left(\frac{h_\xi}{D} \theta \right)^{-1/3} {}_pF_q \left[\left\{ -\frac{5}{6}, \frac{5}{2} \right\}, \left\{ -\frac{1}{3}, 3, 5 \right\}, \frac{1}{4} \left(\frac{D}{h_\xi \theta} \right)^2 \right] - \\ &- 0,0092 \left(\frac{h_\xi}{D} \theta \right)^{-3} {}_pF_q \left[\left\{ \frac{1}{2}, \frac{23}{6} \right\}, \left\{ \frac{7}{3}, \frac{13}{3}, \frac{19}{3} \right\}, \frac{1}{4} \left(\frac{D}{h_\xi \theta} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} b_Y(\theta) &= 0,1023 \left(\frac{h_\xi}{D} \theta \right)^{-2} + \\ &+ 1,0816 \left(\frac{h_\xi}{D} \theta \right)^{-1/3} {}_pF_q \left[\left\{ -\frac{5}{6}, \frac{5}{2} \right\}, \left\{ \frac{2}{3}, 3, 5 \right\}, \frac{1}{4} \left(\frac{D}{h_\xi \theta} \right)^2 \right] - \\ &- 0,0363 \left(\frac{h_\xi}{D} \theta \right)^{-1} {}_pF_q \left[\left\{ -\frac{1}{2}, \frac{17}{6} \right\}, \left\{ \frac{4}{3}, \frac{10}{3}, \frac{16}{3} \right\}, \frac{1}{4} \left(\frac{D}{h_\xi \theta} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (14)$$

где параметр $\gamma = \theta h_\xi / D$ выступает в качестве аргумента; ${}_pF_q[\dots]$ – обобщенная гипергеометрическая функция.

Влияние внешнего масштаба турбулентности

Внешний масштаб инерционного интервала турбулентности определяет в основном дисперсию дрожания центра тяжести изображения [16]. Поэтому

учет внешнего масштаба турбулентности важен при проектировании простейших систем адаптивной оптики, корректирующих наклон волнового фронта. Во всяком случае для современных телескопов отношение диаметра апертуры к внешнему масштабу атмосферной турбулентности уже нельзя считать бесконечно малым.

Тогда масштабом задачи будут следующие параметры:

$$\gamma = \theta h_\xi / D \text{ и } \chi_0 = 2\pi / L_0^*,$$

где L_0^* – эффективный внешний масштаб турбулентности, введенный в работе [17] как

$$L_0^* = \left\{ \int_0^\infty L_0^{5/3} d\xi C_n^2(\xi) \right\}^{3/5}, \quad (15)$$

позволяющий заменить им высотный профиль внешнего масштаба турбулентности. Одной из причин введения этой характеристики является возможность существенно упростить математические расчеты. Отметим, что численные расчеты согласно (15) для рассмотренных выше моделей профиля атмосферной турбулентности приводят к среднему значению $\chi_0 = 0,1$. Угловая корреляция двух положений наклонов волнового фронта по оси X и Y в случае бесконечного внешнего масштаба турбулентности и при учете конечности внешнего масштаба турбулентности представлена на рис. 2.

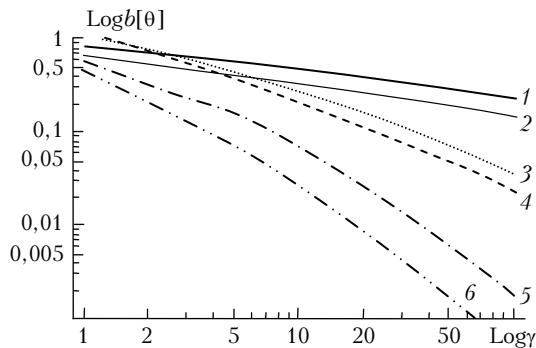


Рис. 2. Зависимость коэффициента угловой корреляции для двух положений наклонов волнового фронта при различных значениях эффективного внешнего масштаба турбулентности (1 – Y , 2 – X , $\chi = 0$; 3 – Y , $\chi = 0,1$; 4 – Y , $\chi = 0,3$; 5 – X , $\chi = 0,1$; 6 – X , $\chi = 0,3$)

Полученные результаты показывают, что внешний масштаб строго влияет на угловую корреляцию низших модовых составляющих флюктуаций фазы и, как следствие, на размер области изопланатизма адаптивной оптической системы. Можно отметить, что существуют некоторые различия между двумя положениями наклона, при этом корреляция по параллельному углу разноса превышает ее значение по продольной координате, а угол кривых можно считать одинаковым.

Значения, полученные с бесконечным внешним масштабом, существенно выше, чем в случае модели, зависимой от внешнего масштаба. Это способствует сокращению пригодного для использования

поля зрения системы. Подчеркнем, что данный эффект будет влиять и на временные характеристики системы, в результате может потребоваться существенное увеличение рабочей полосы пропускания (в несколько раз).

Корреляция высших модовых составляющих волнового фронта

Рассмотрим угловую корреляцию более высоких модовых составляющих фазовых флюктуаций, а именно комы и дефокусировки. В этом случае аналитическое выражение для коэффициента корреляции (11) перепишется в следующем виде:

$$b(\theta) = \frac{\int_0^\infty d\xi C_n^2(\xi) \int_0^\infty d\chi \chi^{-11/3} \left\{ -\exp\left[-\frac{\chi^2}{\chi_0^2}\right] \right\} J_3^2(\chi) J_0\left(\frac{2\theta h_\xi}{D}\chi\right)}{\int_0^\infty d\xi C_n^2(\xi) \int_0^\infty d\chi \chi^{-11/3} \left\{ 1 - \exp\left[-\frac{\chi^2}{\chi_0^2}\right] \right\} J_3^2(\chi)}, \quad (16)$$

$$b(\theta) = \frac{\int_0^\infty d\xi C_n^2(\xi) \int_0^\infty d\chi \chi^{-11/3} \left\{ 1 - \exp\left[-\frac{\chi^2}{\chi_0^2}\right] \right\} J_4^2(\chi) J_0\left(\frac{2\theta h_\xi}{D}\chi\right)}{\int_0^\infty d\xi C_n^2(\xi) \int_0^\infty d\chi \chi^{-11/3} \left\{ 1 - \exp\left[-\frac{\chi^2}{\chi_0^2}\right] \right\} J_4^2(\chi)}. \quad (17)$$

Рис. 3 показывает нормированные функции корреляции для первых трех aberrаций: двух положений наклона, дефокусировки и комы в случае бесконечного внешнего масштаба турбулентности. Видно, что поведение коэффициента корреляции строго зависит от порядка aberrаций и уменьшается с его увеличением. Как и ожидалось, полиномы низшего порядка намного больше коррелированы, чем полиномы более высокого порядка.

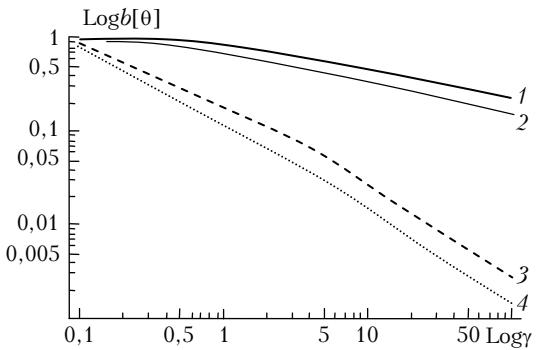


Рис. 3. Зависимость коэффициента угловой корреляции для различных модовых составляющих флюктуаций фазы: двух положений наклонов волнового фронта (1 – Y , 2 – X), дефокусировки (3), комы (4)

Угол, в пределах которого сохраняется корреляция наклона волнового фронта, больше, чем угол для aberrаций более высоко порядка, что будет способствовать увеличению «покрытия неба» для работы простейших адаптивных оптических систем,

корректирующих только наклоны. В целом можно сделать вывод, что размер области изопланатизма эквивалентен порядку aberrации, которая исправляется адаптивной оптикой, что, безусловно, должно приниматься во внимание при модовой коррекции атмосферных искажений.

Влияние размера апертуры

Далее проанализируем влияние размера апертуры телескопической системы, для этого воспользуемся представлением h_ξ согласно (3) и получим следующее выражение для параметра задачи:

$$\gamma = \theta h_\xi / D = 0,31(r_0^{\text{пл}} / D)(\theta / \theta_0). \quad (18)$$

Посмотрим, как меняется зависимость коэффициента угловой корреляции для фиксированного отношения $D/r_0^{\text{пл}}$, тогда параметром задачи становится отношение углового разноса между оптическими пучками к значению традиционного изопланатического угла. Рис. 4 иллюстрирует эту зависимость для aberrаций: дефокусировка и наклон по оси X . Расчет выполнен для отношений $D/r_0^{\text{пл}} = 20$ и 50 . Отметим, что современные телескопы имеют размеры апертуры, в десятки раз превышающие радиус когерентности для видимого диапазона.

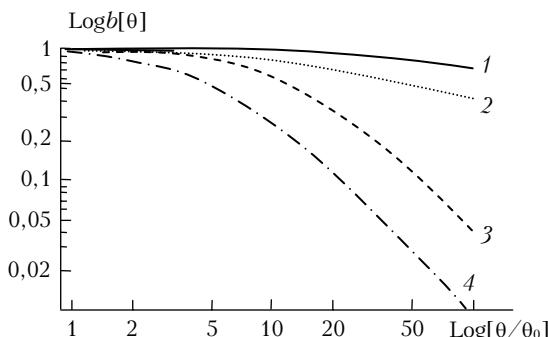


Рис. 4. Зависимость коэффициента угловой корреляции для различных модовых составляющих флюктуаций фазы: наклон по оси X (1 – $D/r_0^{\text{пл}} = 50$; 2 – $D/r_0^{\text{пл}} = 20$) и дефокусировка (3 – $D/r_0^{\text{пл}} = 50$; 4 – $D/r_0^{\text{пл}} = 20$)

Очевидно влияние размера апертуры на размер области корреляции фазовых флюктуаций, при этом угловая корреляция увеличивается с увеличением размера апертуры. Корреляция намного больше для наклона и с ростом угла между пучками убывает медленнее, чем в случае aberrаций более высокого порядка.

Заключение

Представленная попытка уточнить понятия изопланатизма в приложении к задачам адаптивной коррекции атмосферных искажений через рассмотрение атмосферной турбулентности как случайной фазовой aberrации, приложенной к телескопической

системе, показала, что размер области изопланатизма точнее будет характеризовать не традиционно используемым в адаптивной оптике углом изопланатизма, а допустимым угловым разносом, определяемым размером области корреляции фазовых искажений оптического излучения, распространяющегося в турбулентной атмосфере.

Полученные результаты аналитических и численных исследований свидетельствуют, что этот угловой разнос и, как следствие, размер области изопланатизма будут находиться в непосредственной зависимости от порядка фазовых aberrаций волнового фронта, который должна скомпенсировать адаптивная оптическая система. При этом размер области изопланатизма будет уменьшаться в случае учета конечного внешнего масштаба атмосферной турбулентности и увеличиваться с увеличением размера апертуры.

В заключение отметим, что представленный подход дает возможность не только оценить размер допустимого углового разноса между опорным источником и областью наблюдения и выбрать оптимальное угловое положение нескольких опорных источников, но и проанализировать характеристики, определяющие быстродействие адаптивной оптической системы.

1. Папулис А. Теория систем и преобразований в оптике. М.: Мир, 1971. 498 с.
2. Родионов С.А. Об изопланатизме в произвольных оптических системах // Оптика и спектроскопия. 1979. Т. 46. Вып. 3. С. 566–573.
3. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1973. 719 с.
4. Williams C.S., Becklund O.A. Introduction to the optical transfer function. Bellingham, WA.: SPIE, 2002. 415 p.
5. Марешаль А., Франсон М. Структура оптического изображения. М.: Мир, 1970. 296 с.
6. Слюсарев Г.Г. Методы расчета оптических систем. Л.: Машиностроение, 1968. 672 с.
7. Tyson R.K. Adaptive optics engineering handbook. New York: Marcel Dekker, 2000. 340 p.
8. Fried D.L. Anisoplanatism in adaptive optics // J. Opt. Soc. Amer. 1982. V. 72. N 1. P. 52–61.
9. Лукин В.П., Формес Б.Б. Адаптивное формирование пучков и изображений в атмосфере. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. 211 с.
10. Devaney N. Review of astronomical adaptive optics systems and plans // Proc. SPIE. 2007. V. 6584. P. 658407–658419.
11. Andrews L., Phillips R. Laser Beam Propagation through Random Media. Bellingham, WA.: SPIE, 1998. 435 p.
12. Beland R.R. Propagation through Atmospheric Optical Turbulence // The Infrared and Electro-Optical Systems Handbook. 1993. V. 2. Chap. 2. P. 77–144.
13. Magee P. A toolbox for Atmospheric Propagation Modeling User's Guide Version 4.1.455 // MZA Associates Corporation, March 13, 2007. 175 p.
14. Noll R.J. Zernike polynomials and atmospheric turbulence // J. Opt. Soc. Amer. 1976. V. 66. N 3. P. 207–211.

15. Татарский В.И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1967. 548 с.
16. Лукин В.П. Атмосферная адаптивная оптика. Новосибирск: Наука, 1986. 286 с.
17. Лукин В.П., Носов Е.В., Фортес Б.В. Эффективный внешний масштаб атмосферной турбулентности // Оптика атмосф. и океана. 1997. Т. 10. № 2. С. 162–171.

L.A. Bolbasova, V.P. Lukin. Modal anisoplanatism of phase fluctuations.

The concept of isoplanatism in adaptive optical systems for atmospheric applications is considered. The representation of wave aberration functions in the form of decomposition of Zernike modes, angular correlation functions of modal fluctuations of phase of optical wave propagation in the turbulent atmosphere are calculated. On this basis the size of isoplanatic area in adaptive optical system is found. Influence of the model of altitude dependence of structural parameter of atmospheric refraction index, atmospheric turbulence outer scale, and the size of aperture are analyzed.