

В.В. Колосов

ЛУЧЕВОЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИИ КОГЕРЕНТНОСТИ

Выполнено построение лучевого метода решения уравнения для функций когерентности второго порядка. На основе решений, полученных данным методом, дается сравнение самовоздействия когерентного и частично когерентного пучков, совмещенных по числу Френеля. Обсуждается связь данного метода с лучевыми методами решения малоуглового уравнения переноса.

Для описания распространения частично когерентного излучения в рефракционной среде может быть использовано уравнение для функции когерентности второго порядка

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial z} + \frac{1}{\kappa i} \nabla_R \nabla_\rho \Gamma(\mathbf{z}, \mathbf{R}, \rho) + \frac{\kappa}{2i} \left[\varepsilon \left(\mathbf{z}, \mathbf{R} + \frac{\rho}{2} \right) - \varepsilon \left(\mathbf{z}, \mathbf{R} - \frac{\rho}{2} \right) \right] \Gamma = 0, \quad (1)$$

где κ — волновое число; z — координата вдоль оси распространения; \mathbf{R}, ρ — суммарная и разностная координаты в плоскости, перпендикулярной оси распространения; ε — возмущение диэлектрической проницаемости.

Для линейной рефракционной среды уравнение (1) является точным следствием параболического уравнения. Для нелинейной среды уравнение (1) может быть получено из параболического уравнения при определенных условиях (см., например, [1–3]), позволяющих выполнить «расщепление» при усреднении произведения флуктуирующих диэлектрической проницаемости и поля.

Не останавливаясь подробно на этом вопросе, отметим, что физически это означает выполнение условий, при которых наведенные (нелинейные) флуктуации диэлектрической проницаемости оказывают слабое влияние на флуктуации поля.

Возможности получения аналитических решений уравнения (1) весьма ограничены. Непростой задачей является численное решение данного уравнения. Это связано с его высокой размерностью — функция когерентности зависит от пяти пространственных переменных. В опубликованных работах приводятся численные решения данного уравнения для осесимметричных задач, для которых размерность уравнения уменьшается до четырех [4].

В настоящей статье выполнено построение приближенного лучевого метода решения данного уравнения.

Представим функцию когерентности в виде

$$\Gamma(\mathbf{z}, \mathbf{R}, \rho) = \gamma(\mathbf{z}, \mathbf{R}, \rho) \exp(i\Phi(\mathbf{z}, \mathbf{R}, \rho)),$$

где γ и Φ — являются вещественными функциями. Подставляя данное выражение в уравнение (1) и приравнявая нулю отдельно вещественную и мнимую части уравнения, получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial z} + \frac{1}{\kappa} [\nabla_R \gamma \nabla_\rho \Phi + \gamma \nabla_R \nabla_\rho \Phi + \nabla_\rho \gamma \nabla_R \Phi] = 0, \quad (2)$$

$$\gamma \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1}{\kappa} \gamma \nabla_R \Phi \nabla_\rho \Phi = \frac{1}{\kappa} \nabla_R \nabla_\rho \gamma + \frac{\kappa}{2} \left[\varepsilon \left(\mathbf{z}, \mathbf{R} + \frac{\rho}{2} \right) - \varepsilon \left(\mathbf{z}, \mathbf{R} - \frac{\rho}{2} \right) \right] \gamma. \quad (3)$$

Действуя на уравнение (3) оператором ∇_ρ и затем устремляя ρ к нулю, получаем

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} + \theta \nabla_R \theta = \frac{1}{2} \nabla_R \varepsilon(\mathbf{z}, \mathbf{R}) + \left(\frac{1}{\kappa^2 \gamma} \nabla_\rho \nabla_R \nabla_\rho \gamma \right) \Big|_{\rho=0}, \quad (3a)$$

где $\theta = \kappa^{-1} \nabla_\rho \Phi \Big|_{\rho=0}$.

Известно, что средняя плотность потока энергии \mathbf{P} связана с функцией когерентности следующим соотношением [10]:

$$i\kappa \mathbf{P}(\mathbf{z}, \mathbf{R}) = \nabla_r \Gamma(\mathbf{z}, \mathbf{R}, \mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}=0},$$

где $\mathbf{r} = \{\zeta, \rho\}$; \mathbf{z}, \mathbf{R} — суммарные координаты; ζ, ρ — разностные координаты. Принимая во внимание, что γ является четной, а Φ — нечетной функцией разностного аргумента \mathbf{r} , получаем

$$\kappa \mathbf{P}(\mathbf{z}, \mathbf{R}) = \gamma(\mathbf{z}, \mathbf{R}, \mathbf{r} = 0) \nabla_{\mathbf{r}} \Phi|_{\mathbf{r}=0} = W(\mathbf{z}, \mathbf{R}) \nabla_{\mathbf{r}} \Phi|_{\mathbf{r}=0},$$

где $W(\mathbf{z}, \mathbf{R}) = \gamma(\mathbf{z}, \mathbf{R}, \mathbf{r} = 0)$ — средняя интенсивность излучения.

Тогда $\mathbf{n} = \kappa^{-1} \nabla_{\mathbf{r}} \Phi|_{\mathbf{r}=0}$ — есть единичный вектор, направление которого совпадает с направлением средней плотности потока энергии. Полагаем, что средний волновой фронт в каждой своей точке нормален средней плотности потока энергии. Следовательно, получаем, что $\boldsymbol{\theta}$ — есть тангенциальная составляющая единичного вектора \mathbf{n} , перпендикулярного среднему волновому фронту. Тогда для дифракционного луча, перпендикулярного в каждой точке среднему волновому фронту, выполняется соотношение $d\mathbf{R}/dz = \boldsymbol{\theta}$. С учетом этого соотношения из (3а) получаем следующее уравнение для дифракционного луча:

$$\frac{d^2 \mathbf{R}}{dz^2} = \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{R}} \varepsilon + \frac{1}{\kappa^2 W} (\nabla_{\rho} \nabla_{\mathbf{R}} \nabla_{\rho} \gamma)|_{\rho=0}. \quad (4)$$

Устремляя в уравнении (2) ρ к нулю и учитывая, что γ и Φ являются соответственно четной и нечетной функциями разностного аргумента ρ , получаем уравнение

$$\frac{\partial W}{\partial \mathbf{z}} + \nabla_{\mathbf{R}} (\boldsymbol{\theta} W) = 0, \quad (5)$$

из которого следует, что энергия, переносимая вдоль лучевой трубки, ограниченной дифракционными лучами, сохраняется. Тогда для изменения интенсивности вдоль дифракционного луча получаем

$$W(\mathbf{z}, \mathbf{R}(z)) = W(\mathbf{z} = 0, \mathbf{R}_0) \left| \frac{d\mathbf{R}(z)}{d\mathbf{R}_0} \right|, \quad (6)$$

где определитель $|d\mathbf{R}(z)/d\mathbf{R}_0|$ — есть отношение текущего сечения лучевой трубки к начальному при стремлении данных сечений к нулю; \mathbf{R}, \mathbf{R}_0 — текущая и начальная поперечные координаты дифракционного луча ($\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}(z = 0)$).

Таким образом, уравнение (1) преобразовано к системе двух уравнений (4) и (6). В этих двух уравнениях три неизвестные — \mathbf{R}, W, γ . Поэтому для решения этой системы необходимо использовать дополнительные условия. В частности, если предположить, что излучение когерентно и его поле представить в виде

$$E(\mathbf{z}, \mathbf{R}) = A(\mathbf{z}, \mathbf{R}) e^{iS(\mathbf{z}, \mathbf{R})},$$

тогда можно записать

$$\gamma(\mathbf{z}, \mathbf{R}, \rho) = A\left(\mathbf{z}, \mathbf{R} + \frac{\rho}{2}\right) A\left(\mathbf{z}, \mathbf{R} - \frac{\rho}{2}\right).$$

Подставляя данное выражение в (4), получим известное [5, 6] уравнение

$$\frac{d^2 \mathbf{R}}{dz^2} = \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{R}} \varepsilon(\mathbf{z}, \mathbf{R}) + \frac{1}{2\kappa^2} \nabla_{\mathbf{R}} (A^{-1} \nabla_{\mathbf{R}} A(\mathbf{z}, \mathbf{R})), \quad (7)$$

где $A = W^{1/2}$ — амплитуда волны. Следуя [5], введем эффективную диэлектрическую проницаемость $\varepsilon_{\text{эф}} = \varepsilon(\mathbf{z}, \mathbf{R}) + \kappa^{-2} A^{-1} \nabla_{\mathbf{R}}^2 A$, тогда

$$\frac{d^2 \mathbf{R}}{dz^2} = \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{R}} \varepsilon_{\text{эф}}(\mathbf{z}, \mathbf{R}). \quad (8)$$

Система уравнений (6)–(8) аналогична системе уравнений геометрической оптики в квазиоптическом приближении, но имеет принципиальное от нее отличие. Наличие в $\varepsilon_{\text{эф}}$ дифракционного члена препятствует образованию каустик (пересечений и «схлопываний» лучей). Появление каустик возможно только при описании керровской нелинейности и то только для случая, когда изменение диэлектрической проницаемости описывается выражением $\Delta \varepsilon = \varepsilon_2 |E|^2$, которое не учитывает реального насыщения нарастания диэлектрической проницаемости с ростом $|E|^2$.

Система уравнений (6), (8), является разрешимой, так как содержит только две неизвестные – \mathbf{R} , W . Ее решение было выполнено численно методом прилучевого приближения [7]. Однако отметим, что данная система описывает распространение когерентного излучения и является тождественной параболическому уравнению, а не уравнению (1).

Система уравнений (4), (6) была бы разрешимой, если бы в уравнении (4) не было зависимости от γ . Избавиться от этой зависимости можно, положив, что модуль функции когерентности γ в процессе распространения излучения сохраняет гауссовскую форму по разностным координатам, то есть

$$\gamma(\mathbf{z}, \mathbf{R}, \rho) = |\Gamma(\mathbf{z}, \mathbf{R}, \rho)| = W(\mathbf{z}, \mathbf{R}) \exp\left(-\frac{x^2}{4a_x^2} - \frac{y^2}{4a_y^2} + bxy\right),$$

где $\rho = \{x, y\}$. Однако этого мало. Необходимо еще определить закономерность, которой подчинены изменения параметров a_x , a_y и b при распространении излучения в рефракционной среде.

Будем считать, что вдоль дифракционных лучей выполняется условие

$$\iint_{-\infty}^{\infty} d\rho |\Gamma(\mathbf{z}, \mathbf{R}, \rho)| = W(\mathbf{z}, \mathbf{R}) \cdot s_k(\mathbf{z}, \mathbf{R}) = \text{const}, \quad (9)$$

где $s_k(\mathbf{z}, \mathbf{R})$ – площадь когерентности. Для линейной регулярной среды это показано в [8]. Для нелинейной среды оно будет выполнено при условии, что наведенные флуктуации диэлектрической проницаемости оказывают пренебрежимо малое влияние на статистику поля, то есть при тех же предположениях, при которых справедливо уравнение (1). Выполнение условия (9) означает, что при распространении излучения степень когерентности между любой парой дифракционных лучей сохраняется.

Тогда можно записать

$$\exp\left(-\frac{x^2}{4a_x^2} - \frac{y^2}{4a_y^2} + bxy\right) = \exp\left(-\frac{x_0^2 + y_0^2}{4a_k^2}\right), \quad (10)$$

где a_k – начальный радиус когерентности излучения; $\rho(z=0) = \rho_0 = \{x_0, y_0\}$.

Далее предположим, что начальный радиус когерентности много меньше радиуса пучка. В этом случае, если мы определили из уравнения (4) траекторию дифракционного луча, то траектории других лучей, расположенных в пределах площадки когерентности луча, могут быть определены как вариации исходной траектории, для которых из (4) следует уравнение

$$\frac{d^2 \delta \mathbf{R}(z)}{dz^2} = \frac{1}{2} (\delta \mathbf{R}(z) \cdot \nabla_{\mathbf{R}}) \nabla_{\mathbf{R}} \epsilon_{\text{эф}}(\mathbf{z}, \mathbf{R}(z)), \quad (11)$$

где $\epsilon_{\text{эф}}$ – эффективная диэлектрическая проницаемость, введенная по аналогии с уравнением (8); $\mathbf{R}(r)$ – есть решение уравнения (4) с начальными условиями: $\mathbf{R}(z=0) = \mathbf{R}_0$, $d\mathbf{R}(z=0)/dz = \boldsymbol{\theta}_0$. Для сфокусированного пучка $\boldsymbol{\theta}_0 = \mathbf{R}_0/F$ (F – фокусное расстояние).

Уравнение (11) является линейным векторным уравнением второго порядка. Полагая, что $\delta \mathbf{R}(z) = \rho(z)$, и задавая начальные условия $\delta \mathbf{R}(z=0) = \rho_0$, $d\delta \mathbf{R}(z=0)/dz = \rho_0/F$, из (11) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(z) &= v_{1x}(z) x_0 + v_{2x}(z) y_0; \\ \mathbf{y}(z) &= v_{1y}(z) x_0 + v_{2y}(z) y_0, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\mathbf{v}_1 = \{v_{1x}, v_{1y}\}$, $\mathbf{v}_2 = \{v_{2x}, v_{2y}\}$ – есть фундаментальная система решений уравнений (11), получаемая при следующих начальных условиях:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1(z=0) &= \{1, 0\}, \quad d\mathbf{v}_1(z=0)/dz = \{F^{-1}, 0\}; \\ \mathbf{v}_2(z=0) &= \{0, 1\}, \quad d\mathbf{v}_2(z=0)/dz = \{0, F^{-1}\}. \end{aligned}$$

Разрешая систему (12) относительно x_0 и y_0 и подставляя данные значения в (10), получаем

$$\begin{aligned} a_x^2 &= \frac{\Delta^2}{v_{1y}^2 + v_{2y}^2}, \quad a_y^2 = \frac{\Delta^2}{v_{2x}^2 + v_{1x}^2}, \\ b &= \frac{v_{1x} v_{1y} + v_{2x} v_{2y}}{\Delta^2}, \quad \Delta = v_{1x} v_{2y} - v_{2x} v_{1y}. \end{aligned} \quad (13)$$

Нетрудно убедиться, что если в (9) подставить функцию когерентности, имеющую гауссовское распределение по разностным координатам, параметры которого удовлетворяют (13), то получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(z, \mathbf{R}, \rho)| d\rho = 4\pi a_k^2 \Delta W(z, \mathbf{R}). \quad (14)$$

Учитывая, что вдоль дифракционных лучей выполняются соотношения

$$\left| \frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{R}_0} \right| = \left| \frac{d\delta\mathbf{R}}{d\delta\mathbf{R}_0} \right| = \left| \begin{matrix} v_{1x} & v_{1y} \\ v_{2x} & v_{2y} \end{matrix} \right| = \Delta,$$

из уравнения (6) следует

$$W(z, \mathbf{R}(z)) = W(z=0, \mathbf{R}_0)/\Delta, \quad (15)$$

и тогда правая часть выражения (14) равна константе.

Таким образом, с учетом сделанных предположений, уравнение (4) может быть преобразовано к виду

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{dz^2} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_{\text{эф}}}{\partial X} = \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon(z, \mathbf{R})}{\partial X} + \frac{1}{W(z, \mathbf{R})} \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} \right)_{|\rho=0} + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y} \right)_{|\rho=0} \right], \\ \frac{d^2 Y}{dz^2} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_{\text{эф}}}{\partial Y} = \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon(z, \mathbf{R})}{\partial Y} + \frac{1}{W(z, \mathbf{R})} \left[\frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2} \right)_{|\rho=0} + \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y} \right)_{|\rho=0} \right], \end{aligned} \quad (16)$$

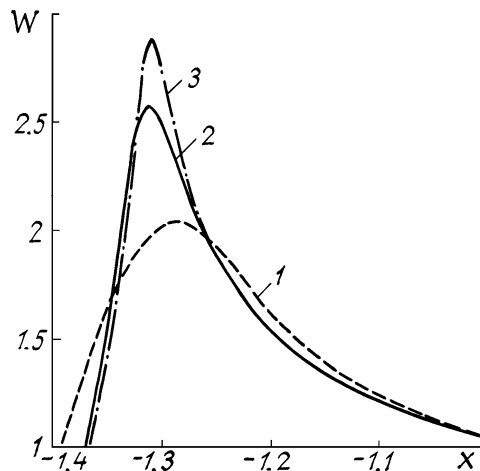
где $\mathbf{R} = \{X, Y\}$,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} \right)_{|\rho=0} &= - \frac{W(z, \mathbf{R})}{2a_k^2} \frac{v_{1y}^2 + v_{2y}^2}{\Delta^2}; \\ \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2} \right)_{|\rho=0} &= - \frac{W(z, \mathbf{R})}{2a_k^2} \frac{v_{1x}^2 + v_{2x}^2}{\Delta^2}; \\ \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y} \right)_{|\rho=0} &= - \frac{W(z, \mathbf{R})}{2a_k^2} \frac{v_{1x} v_{1y} + v_{2x} v_{2y}}{\Delta^2}. \end{aligned}$$

Аналогично уравнение (11) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v_{ix}}{dz^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{\text{эф}}}{\partial X^2} v_{ix} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{\text{эф}}}{\partial X \partial Y} v_{iy} \right); \\ \frac{d^2 v_{iy}}{dz^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{\text{эф}}}{\partial Y^2} v_{iy} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{\text{эф}}}{\partial X \partial Y} v_{ix} \right), \end{aligned} \quad (17)$$

где $i = 1, 2$.



Распределение интенсивности в абберационном максимуме

Система уравнений (15)–(17), дополненная определением зависимости диэлектрической проницаемости от интенсивности излучения или пространственных координат, с начальными условиями,

определенными выше, является замкнутой. При описании дифракции гауссовского пучка, а также при его распространении в среде с параболическим профилем диэлектрической проницаемости данная система имеет аналитические решения, совпадающие с известными [8].

Отметим, что данная система уравнений аналогична системе уравнений прилучевого приближения уравнения переноса [7], получаемой в пределе геометрической оптики (параметр нелинейности стремится к бесконечности).

На рисунке представлено распределение интенсивности в абберационном максимуме на дистанции $z = 1,8 \cdot L_R$ (L_R — длина рефракции) для когерентного пучка (кривая 1) и частично когерентного пучка (кривая 2). Расчеты выполнены для параметра нелинейности $R_v = L_D^2 / L_R^2 = 10^3$ (L_D — длина дифракции). Видно, что интенсивность частично когерентного излучения выше. Это связано с тем, что для частично когерентного излучения величина градиентов дифракционного члена в $\epsilon_{эф}$ меньше по сравнению с когерентным излучением. С увеличением параметра нелинейности величина нелинейных членов уменьшается обратно пропорционально R_v . Для $R_v = 10^6$ вклад дифракционных членов становится пренебрежимо малым и распределения интенсивности когерентного и частично когерентного излучения совпадают (кривая 3). С увеличением дистанции растет значение интенсивности в абберационном максимуме и растут градиенты распределения интенсивности. Роль дифракционных членов возрастает и для $R_v = 10^6$ появляются отличия в распределении интенсивностей когерентного и частично когерентного пучков. Для $R_v = 10^3$ на дистанции $z = 1,9 \cdot L_R$ пиковые интенсивности отличаются почти в два раза.

Отметим, что данные расчеты выполнены на сетке с переменным шагом в плоскости, перпендикулярной оси распространения. Узлами сетки являются точки пересечения дифракционных лучей с данной плоскостью. Так как резкие возрастания интенсивности обусловлены сгущением дифракционных лучей, то происходит автоматическая адаптация сетки к нелинейным искажениям пучка. При этом эта адаптация происходит как для коллимированных, так и для сфокусированных пучков.

Предлагаемый в данной статье лучевой метод решения уравнения для функции когерентности по своим принципам близок к методам решения уравнения переноса, рассматриваемым в работах [7, 9]. В указанных работах полагается сохранение гауссовской формы тела яркости, являющейся Фурье образом функции когерентности по разностным координатам. Несмотря на кажущуюся тождественность аппроксимаций гауссоидой тела яркости и функции когерентности, они дают различный результат. В [7, 9] реальное тело яркости заменяется гауссоидой, совпадающей с распределением яркости в точке максимума. Так как вектор, перпендикулярный фазовому фронту, определяется как средневзвешенный вектор тела яркости и для асимметричного тела яркости (таким оно становится при самовоздействии излучения) не совпадает с максимумом распределения яркости, то данная аппроксимация приводит к погрешности в определении данного вектора. Вносится также погрешность в значение интенсивности в данной точке, определяемой как интеграл от тела яркости. При аппроксимации гауссоидой функции когерентности данные погрешности не вносятся. Существует и более принципиальное отличие. Это связано с тем, что определитель в уравнении (6) не обращается в нуль. В то время как обращение в нуль соответствующих определителей в [7, 9] для задач самовоздействия является неизбежным. Поэтому расчеты самовоздействия этими методами могут быть выполнены либо до дистанций, на которых еще не происходит обращение в нуль определителей [7], либо с привлечением более точных приближений, что существенно увеличивает время счета [9].

1. Пасманник Г. А. //ЖЭТФ. 1974. Т. 66. № 2. С. 490—500.
2. Алешкевич В. А., Лебедев С. С., Матвеев А. Н. //Квантовая электроника. 1981. Т. 8. № 5. С. 1090—1094.
3. Колосов В. В., Кузнецов М. В. //Изв. вузов. Сер. Радиофизика. 1988. Т. 31. № 7. С. 816—822.
4. Алешкевич В. А., Лебедев С. С., Матвеев А. Н. //Изв. вузов. Сер. Радиофизика. 1982. Т. 25. № 11. С. 1368—1370.
5. Беспалов В. И., Литвак А. Г., Таланов В. И. //Нелинейная оптика. Труды II Всесоюз. симпозиума по нелинейной оптике. Новосибирск: Наука, 1968. С. 428—463.
6. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. М.: Наука, 1979. 384 с.
7. Колосов В. В., Кузнецов М. В. //Оптика атмосферы. 1989. Т. 2. № 5. С. 462—468.
8. Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. М.: Наука, 1981. 640 с.
9. Землянов А. А., Синев С. Н. //Оптика атмосферы. 1988. Т. 1. № 8. С. 44—50.
10. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Часть II. Случайные поля. М.: Наука, 1978. 464 с.

Институт оптики атмосферы СО РАН,
Томск

Поступила в редакцию
4 января 1992 г.

V. V. Kolosov. A Beam Method for Solving the Equation for the Coherence Function.

A beam method for solving the equation for the second order coherence function is constructed. Based on the solutions obtained with this technique a comparison of self-action of a coherent and a partially coherent beams with the same Fresnel number is made. Relations of this technique to the beam methods of solving small angle radiation transfer equation are discussed.