<Оптика атмосферы и океана>, **6**, N 7 (1993)

УДК 535. 35

А.В. Алексеев, Н.В. Сушилов, Ю.А. Зинин

МАТРИЧНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ БЛОХА ДЛЯ ВОЗБУЖДАЮЩЕГО ПОЛЯ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ АМПЛИТУДНОЙ И ФАЗОВОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ

Предлагается один из подходов к решению оптических уравнений Блоха, основанный на матричном методе. Обсуждаются некоторые конкретные решения для случаев модулированного электрического поля. Отмечаются преимущества предлагаемого подхода в сравнении с традиционными.

Хорошо известно (см., например [1]), что уравнения, описывающие временное поведение матрицы плотности двухуровневой системы, возбуждаемой резонансным полем, с учетом как столкновительной, так и радиационной релаксации в дипольном приближении взаимодействия, составляют замкнутую систему из трех дифференциальных уравнений первого порядка (уравнения Блоха). Если возбуждающее поле имеет постоянную амплитуду и фазу, то коэффициенты в уравнениях Блоха тоже постоянны, и эти уравнения сравнительно легко могут быть решены [2]. Если амплитуда возбуждающего поля достаточно велика, то решение для разности населенностей уровней системы имеет вид экспоненциально затухающих осцилляций с частотой Раби $\Omega_R = d\,E/\hbar$, где d – дипольный момент перехода, E – амплитуда поля. Если амплитуда поля настолько мала, что $\Omega_R < \Gamma_2$, где Γ_2 – ширина линии перехода, то разность населенностей уменьшается экспоненциально до равновесного значения еще до того, как успеет произойти хотя бы один переход колебаний. Следовательно, колебания разности населенностей в двухуровневой системе, возбуждаемой резонансным монохроматическим полем, могут возникать лишь в случае достаточно большой амплитуды этого поля. Когда же амплитуда и фаза возбуждающего поля являются функциями времени, уравнения Блоха становятся уравнениями с переменными коэффициентами, общее решение которых для произвольных функций найти невозможно. В частном случае чисто амплитудной периодической модуляции, когда амплитуда возбуждающего поля есть периодическая функция времени (такое поле можно интерпретировать как набор монохроматических компонент с равными амплитудами и одинаковыми частотными интервалами между любыми соседними компонентами), уравнения Блоха становятся системой уравнений с периодическими коэффициентами и решаются, как правило, с помощью теоремы Флоке. Согласно этой теореме [3], решение таких уравнений можно представить в виде ряда по гармоникам частоты модуляции. Первыми теорему Флоке для решения уравнений Блоха с модулированной амплитудой возбуждающего поля применили Топтыгина и Фрадкин [4], а также авторы работы [5], и теперь этот метод широко используется для решения уравнений Блоха с различными периодическими коэффициентами [6–14]. К недостаткам метода теоремы Флоке можно отнести, во-первых, то, что применение его приводит к выражению амплитуд гармоник через цепные дроби, требующие численного суммирования, и во-вторых, то, что этот метод не применим для непериодической модуляции параметров возбуждающего поля.

От этих недостатков свободен матричный метод решения систем линейных дифференциальных уравнений, примененный для решения уравнений Блоха в случае возбуждающего поля, имеющего стохастическую фазовую модуляцию [15], а также для поля с периодической амплитудной модуляцией [16]. Этот метод позволяет получить аналитические решения уравнений Блоха как с периодическими, так и с произвольными коэффициентами, и не используется для решений в виде цепных дробей.

Итак, пусть двухуровневая система взаимодействует с полем, которое мы запишем в следующем виде:

$$\varepsilon(t) = E(t)\cos(\omega t + \Phi(t)), \tag{1}$$

где $E(t)$, $\Phi(t)$ – амплитуда и фаза, произвольно зависящие от времени; ω – частота поля, равная частоте перехода между уровнями системы. В этом случае уравнения, описывающие поведение во времени элементов матрицы плотности системы в приближении дипольного взаимодействия во вращающейся системе координат, будут иметь вид [17]:

$$\dot{\sigma}_{21}(t) = -\Gamma_2\,\sigma_{21}(t) - \frac{id\,\varepsilon(t)}{h}\,e^{i\omega t}\,n(t),$$

$$\dot{n}(t) = -(n - n_0)\,\Gamma_1 - \frac{2\,id\,\varepsilon(t)}{h}\,(\sigma_{21}(t)\,e^{-i\,\omega\tau} - \sigma_{12}(t)\,e^{i\omega t}), \tag{2}$$

где σ_{21}, σ_{12} – медленно меняющиеся амплитуды недиагональных элементов матрицы плотности системы; $n(t)$ – разность населенностей уровней; $n_0 = n_{(t=0)}$; Γ_2^{-1}, Γ_1^{-1} – времена релаксации поляризации и населенностей соответственно. Подставив (1) в (2), отбросив слагаемые $\exp(\pm 2\omega\, t)$, что справедливо лишь при $(\Phi) \ll \omega$, и перейдя к традиционным блоховским переменным u и υ с помощью введения новой переменной $\sigma = (u - i\upsilon)/2$; $\sigma^* = \sigma$, мы получим уравнение Блоха для возбуждающего поля, имеющего вид (1) запишем эти уравнения в векторно-матричной форме):

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X(t) + L,$$

где

$$X = \begin{vmatrix} u \\ u \\ n \end{vmatrix}; \quad A(t) = \begin{vmatrix} -\Gamma_2 & 0 & -a(t) \\ 0 & -\Gamma_2 & b(t) \\ a(t) & -b(t) & -\Gamma_1 \end{vmatrix}; \quad L = n_0\Gamma_1 \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}; \tag{3}$$

$a(t) = \Omega_R(t)\sin\varphi(t)$; $b(t) = \Omega_R(t)\cos\varphi(t)$; $\Omega_R(t) = dE(t)/\hbar$.

Формально решение (3) при условии равенства нулю коммутатора $[A(t), e^{B(t)}]$, где $B(t) = \int A(t)\,dt$, может быть записано в виде [18]

$$X(t) = e^{B(t)}\left\{\int_0^t e^{-B(t')}L\,dt' + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ n_0 \end{vmatrix}\right\}. \tag{4}$$

Для вычисления $\exp[B(t)]$ воспользуемся формулой Сильвестра [3]:

$$e^B = e^{\lambda_1}\frac{(B-\lambda_2)(B-\lambda_3)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)} + e^{\lambda_2}\frac{(B-\lambda_1)(B-\lambda_3)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)} + e^{\lambda_3}\frac{(B-\lambda_1)(B-\lambda_2)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}, \tag{5}$$

где $\lambda_{1,2,3}$ – собственные значения матрицы $B(t)$, I – единичная матрица.

Если мы предположим, что $\Gamma_2 = \Gamma_1 = \Gamma$, то для $\lambda_{1,2,3}$ легко получить явные выражения, не делая никаких ограничений на амплитуду поля:

$$\lambda_1 = -\Gamma t; \quad \lambda_{2,3} = -\Gamma t \pm if(t), \tag{6}$$

где

$$f^2(t) = \mathbf{I}_a^2(t) + \mathbf{I}_b^2(t); \quad \mathbf{I}_a(t) = \int_0^t a(t')\,dt'; \quad \mathbf{I}_b(t) = \int_0^t b(t')\,dt'.$$

После подстановки (6) в (5) мы получим

$$\mathrm{e}^{\pm B(t)} = \frac{\mathrm{e}^{\pm\Gamma t}}{f^2(t)}\begin{vmatrix} \mathbf{I}_b^2+\mathbf{I}_a^2\cos f(t); & \mathbf{I}_a\mathbf{I}_b(1-\cos f(t)); & \pm\mathbf{I}_a f(t)\sin f(t) \\ \mathbf{I}_b\mathbf{I}_a(1-\cos f(t)); & \mathbf{I}_a^2+\mathbf{I}_b^2\cos f(t); & \pm\mathbf{I}_b f(t)\sin f(t) \\ \pm\mathbf{I}_a f(t)\sin f(t); & \pm\mathbf{I}_b f(t)\sin f(t); & f^2(t)\cos f(t) \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Подставив (7) в (4), мы получим решение уравнений Блоха для поля с произвольной модуляцией амплитуды и фазы в виде

$$X(t)=n_0\Gamma\frac{\mathrm{e}^{-\Gamma t}}{b^2(t)}\begin{vmatrix} \mathbf{I}_1(\mathbf{I}_b+\mathbf{I}_a^2\cos f(t))-\mathbf{I}_2\mathbf{I}_a\mathbf{I}_b(1-\cos f(t))-(\mathbf{I}_3+\Gamma^{-1})\mathbf{I}_a f(t)\sin f(t) \\ \mathbf{I}_1\mathbf{I}_a\mathbf{I}_b(1-\cos f(t))-\mathbf{I}_2(\mathbf{I}_a^2+\mathbf{I}_b^2\cos f(t))+(\mathbf{I}_3+\Gamma^{-1})\mathbf{I}_b f(t)\sin f(t) \\ (\mathbf{I}_1\mathbf{I}_a+\mathbf{I}_2\mathbf{I}_b)f(t)\sin f(t)+(\mathbf{I}_3+\Gamma^{-1})f^2(t)\cos f(t) \end{vmatrix}, \tag{8}$$

где

$$\mathbf{I}_1(t)=\int_0^t \mathrm{e}^{\Gamma t'}\mathbf{I}_a(t')\frac{\sin f(t')}{f(t')}dt'\,;\quad \mathbf{I}_2(t)=\int_0^t \mathrm{e}^{\Gamma t'}\mathbf{I}_b(t')\frac{\sin f(t')}{f(t')}dt'\,;$$

$$\mathbf{I}_3(t)=\int_0^t \mathrm{e}^{\Gamma t'}\cos f(t')\,dt'\,. \tag{9}$$

Теперь мы можем получить условие справедливости решения (4). С помощью (7) получим

$$[A(t),\mathrm{e}^{B(t)}]=\mathrm{e}^{-\Gamma t}\frac{(a\mathbf{I}_b-b\mathbf{I}_a)}{f^2(t)}\begin{vmatrix} 0 & f(t)\sin f(t); & \mathbf{I}_b(1-\cos f(t)) \\ -f(t)\sin f(t); & 0 & \mathbf{I}_a(1-\cos f(t)) \\ \mathbf{I}_b(1-\cos f(t)); & \mathbf{I}_a(1-\cos f(t)); & 0 \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Следовательно, решения уравнений (3) в виде (8) справедливы, если выполняется хотя бы одно из условий: 1) $t\to\infty$; 2) $a\,\mathbf{I}_b = b\,\mathbf{I}_a$.

Условие (1) означает, что решения (8) справедливы для произвольных функций $E(t)$ и $\varphi(t)$ лишь в стационарном состоянии, после затухания всех релаксационных процессов. Физически это означает, что (8) справедливы для таких t, для которых $\Gamma t \gg 1$.

Условие (2) означает, что (8) справедливы для любого t' в интервале $[0, t]$, но не для произвольных $E(t)$ и $\varphi(t)$. Используя явный вид функций $a(t)$, $b(t)$, $\mathbf{I}_a(t)$, $\mathbf{I}_b(t)$, можно показать, что условие (2) выполняется, во-первых, когда отсутствует и амплитудная, и фазовая модуляции, т.е. когда $E(t) = \cos t$, $\varphi(t) = \cos t$, и во-вторых, когда $E(t)$ – произвольная функция, а $\varphi(t) = \cos t$. В частном случае $\varphi = 0$ получим:

$$a(t)=\mathbf{I}_a(t)=0\,;\quad b(t)=\Omega_R(t)\,;\quad \mathbf{I}_b(t)=\int_0^t\Omega_R(t')\,dt'\,;\quad f(t)=\mathbf{I}_b(t)\,;$$

$$\mathbf{I}_1(t)=0\,;\quad \mathbf{I}_2(t)=\int_0^t\mathrm{e}^{\Gamma t'}\sin\mathbf{I}_b(t')\,dt'\,;\quad \mathbf{I}_3(t)=\int_0^t\mathrm{e}^{\Gamma t'}\cos\mathbf{I}_b(t')\,dt'\,.$$

Итак, в случае произвольной амплитудной модуляции возбуждающего поля решения уравнений Блоха будут иметь вид [19]:

$$X(t)=n_0\Gamma\mathrm{e}^{-\Gamma t}\begin{vmatrix} 0 \\ -\mathbf{I}_2(t)\cos\mathbf{I}_b(t)+(\mathbf{I}_3(t)+\Gamma^{-1})\sin\mathbf{I}_b(t) \\ \mathbf{I}_2(t)\sin\mathbf{I}_b(t)+(\mathbf{I}_3(t)+\Gamma^{-1})\cos\mathbf{I}_b(t) \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Если положить $E(t) = \text{const}$, то из (11) легко можно получить хорошо известные решения Торри для монохроматического возбуждения [2]. В случае периодической модуляции $E(t)$ решение (11) также нетрудно выписать в явном виде [16].

Итак, решения (8) и (11), полученные соответственно для возбуждения двухуровневой системы резонансным полем с произвольной амплитудно-фазовой и только амплитудной модуляциями, являются обобщениями существующих решений для более частных случаев модуляции параметров поля (с учетом упомянутых выше предложений).

В заключение авторы хотели бы отметить, что первоначально задача исследования резонансного взаимодействия с двухуровневой системой полей с модулированными параметрами (в частности, со стохастическими) была поставлена перед авторами Уно Хермановичем Копвиллемом еще в конце 70-х годов.

1. Аллен Л., Эберли Дж. Оптический резонанс и двухуровневые атомы. М.: Мир, 1975. 222 с.
2. Torrey H.C. // Phys. Rev. 1949. V. 76. P. 1059–1071.
3. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 718 с.
4. Топтыгина Г.И., Фрадкин Э.Е. // ЖЭТФ. 1982. Т. 82. С. 429–440.
5. Fenenille S., Schweighofer M.G. // J. Phys. B: Atom. and Mol. Phys. 1976. V. 9. P. 2003–2011.
6. Tsykada N., Nakayama T. // Phys. Rev. A. 1982. V. 25. P. 964–973.
7. Мак А.А., Пржебельский С.Г, Чигирь Н.А. // Изв. АН СССР. Сер. Физ. 1983. Т. 47. С. 1976–1977.
8. Agarwal G.S., Nayak N. // JOSA. 1984. V. 1. P. 164–169.
9. Hillman L.W., Krasinski I., Kosh K., Stroud C.K. // JOSA. 1985. V. 2. P. 211–220.
10. Agarwal G.S., Nayak N. // J. Phys. B: Atom. and Mol. Phys. 1986. V. 19. P. 3385–3392.
11. Agarwal G.S., Nayak N. // Phys. Rev. A. 1986. V. 33. P. 391–399.
12. Friedmann H., Wilson-Gordon A.D. // Phys. Rev. A. 1987. V. 36.P. 1333–1341.
13. Wilson-Gordon A.D., Friedmann H. // Phys. Rev. A. 1988. V. 38. P. 4087–4092.
14. Shakmajian S., Kosh K., Stroud C.K. // JOSA. 1988. V. 5. P. 2015–2024.
15. Алексеев А.В., Сушилов Н.В. // ЖЭТФ. 1985. Т. 89. С. 1951–1956.
16. Alekseev A.V., Davydov A.V., Suchilov N.V., Zinin Yu.A. // J. Physique. 1990. V. 51. P. 723–734.
17. Лазерная и когерентная спектроскопия / Под ред. Дж. Стейнфилда, М.: Мир, 1978. 629 с.
18. Лаппо-Данилевский И.А. Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Гостехиздат, 1957. 612 с.
19. Алексеев А.В., Зинин Ю.А., Сушилов Н.В. // Оптика и спектроскопия. 1990. Т. 69. С. 1245–1250.

Тихоокеанский океанологический институт
Дальневосточного отделения РАН

Поступила в редакцию
18 марта 1993 г.

A.V. Alekseev, N.V. Sushilov, Yu.A. Zinin. **Matrix Method of Solving Bloch Equations for the Exciting Field with an Arbitrary Amplitude and Phase modulation.**

An approach to solution of optical Bloch equations based on the matrix method is proposed. Some particular solutions concerning the cases of modulated electrical field are discussed. Certain advantages of the approach proposed compared to the traditional approach are demonstrated.