«Оптика атмосферы и океана», **17**, № 1 (2004)

ОПТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И БАЗЫ ДАННЫХ ОПТИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ ОБ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЕ

УДК 503.35:551.510

М.Г. Никитина, С.В. Панько, А.В. Старченко

О представлении решения уравнения переноса примеси и его приложения

Томский государственный университет

Поступила в редакцию 14.01.2003 г.

Найдено представление решения уравнения переноса примеси в атмосфере, основанное на сведении исходного уравнения к классическому одномерному уравнению теплопроводности. Характер зависимости компонент скорости горизонтального ветра и коэффициента турбулентной диффузии от высоты считается известным. Решение возникающих краевых задач обладает двухфункциональным произволом. Произвольные функции отыскиваются из известного распределения примеси на двух уровнях, вдоль заданной линии, затем находится параметрическое представление пространственного поля концентрации. Эффективность данного подхода обусловлена тем, что область течения в плоскости, за счет введения новых переменных, оказывается канонической, и тем, что можно использовать уже имеющиеся многочисленные результаты, как аналитические, так и численные, для одномерного уравнения Фурье. Распределение концентрации в исходных переменных находится простым пересчетом, с помощью формул перехода от декартовых координат к новым.

Введение

Среди различных проблем современной экологии одно из важных мест занимает проблема прогнозирования пространственного распределения аэрозольных образований техногенного происхождения. Перспективным при изучении переноса и трансформации аэрозоля является подход, основанный на применении уравнений турбулентной диффузии [1], решение которых отыскивается в приземном слое атмосферы. В связи с этим возникает проблема получения либо непрерывного, либо дискретного распределения концентрации примеси (аэрозоля), удовлетворяющего некоторым граничным условиям.

Данная статья посвящена отысканию приближенного аналитического решения стационарного трехмерного уравнения параболического типа, моделирующего адвективно-диффузионный перенос скалярной субстанции в сдвиговом течении.

Преобразование уравнения переноса примеси

Рассмотрим следующее уравнение [1]:

$$u\frac{\partial c}{\partial x}+v\frac{\partial c}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z\frac{\partial c}{\partial z}\right), \qquad (1)$$

где u, v – проекции скорости горизонтального ветра; k_z – коэффициент турбулентной диффузии, относительно которых предположим, что

$$u=U(x,y)\,\mathrm{th}^2(\alpha z),\;\; v=V(x,y)\,\mathrm{th}^2(\alpha z);$$

$$k_z=k_0\left[U^2(x,y)+V^2(x,y)\right]\mathrm{th}^2(\alpha z). \qquad (2)$$

Здесь $U(x, y)$ и $V(x, y)$ – произвольные сопряженные гармонические функции; k_0 и α – постоянные;

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \;\;\Rightarrow\;\; \frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}=0 \;\;\Rightarrow\;\; \frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial x}=0.$$

В уравнении (1) вместо переменных x, y введем новые переменные φ, ψ, определяемые дифференциальными соотношениями

$$d\varphi=Udx+Vdy,\;\; d\psi=-Vdx+Udy. \qquad (3)$$

В новых переменных уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial c}{\partial\varphi}=k_0\left(\frac{\partial^2 c}{\partial z^2}+\frac{2\alpha}{sh(\alpha z)ch(\alpha z)}\frac{\partial c}{\partial z}\right). \qquad (4)$$

Укажем свойство этого уравнения. Пусть $c_0(\varphi,\psi,z)$ есть некоторое решение данного уравнения, тогда

$$c(\varphi,\psi,z)=f_1(\psi)\,c_0(\varphi+f_2(\psi),\psi,z)$$

также будет решением уравнения (4) с произвольными функциями $f_1(\psi)$ и $f_2(\psi)$. Это обстоятельство позволяет, отправляясь от известных «стартовых» решений уравнения (4), построить целую совокупность точных решений уравнения (4) и соответственно для исходного уравнения (1).

Согласно [3, 4] решение уравнения (4) выражается через решение классического уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = k_0 \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \quad (5)$$

в виде дифференциального уравнения первого порядка

$$c = L - \frac{1}{\alpha}\operatorname{cth}(\alpha z)\frac{\partial L}{\partial z}. \quad (6)$$

Уравнения (4)–(6) показывают, что трехмерная задача для исходного уравнения (1) сведена к одномерной. Из (5) следует, что если $L_0(\varphi, \psi, z)$ — решение этого уравнения, то

$$L = L_0\left[\varphi + f_1(\psi), \psi, z + f_2(\psi)\right],$$

где $f_1(\psi)$ и $f_2(\psi)$ — произвольные функции, также будет решением рассматриваемого уравнения. Таким образом, можно указать двухфункциональный произвол в решении уравнения (4), не сводящийся к ранее установленному.

Для замыкания одномерной задачи требуется задание распределения концентрации на линиях

$$\varphi = \varphi_0, \;\; \psi = 0 \;\;\; c(\varphi_0, 0, z) = c_0(z),$$

$$\varphi = \varphi_0, \;\; z = 0 \;\;\; c(\varphi_0, \psi, 0) = c_0(\psi). \quad (7)$$

В случае, когда выбирается решение с двухфункциональным произволом, необходимо также знать распределение

$$c(\varphi_0, \psi, H) = c_H(\psi),$$

где H — высота области исследования.

Чтобы от краевой задачи для уравнения с переменными коэффициентами (4), (7) перейти к соответствующей краевой задаче для уравнения с постоянными коэффициентами (5), необходимо по известным краевым значениям $c(\varphi, \psi, z)$ найти отвечающие им значения $L(\varphi, \psi, z)$. Для этого представим равенство (6) в виде

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{L}{ch(\alpha z)} = -\frac{\alpha sh(\alpha z)}{ch^2(\alpha z)}c. \quad (8)$$

Интегрируя данное соотношение, находим

$$L = -\operatorname{ch}(\alpha z)\int_a^z \frac{\alpha sh(\alpha\tau)}{ch^2(\alpha\tau)} c d\tau + A(\varphi,\psi)\operatorname{ch}(\alpha z), \quad (9)$$

где $A(\varphi, \psi)$ — произвольная функция интегрирования. В силу линейности уравнения (5) второе слагаемое в (9) должно ему удовлетворять.

Это дает

$$\frac{\partial A}{\partial \varphi} = k_0\alpha^2 A, \;\; A = B(\psi)e^{k_0\alpha^2\varphi}$$

с произвольной функцией $B(\psi)$. Ограниченность концентрации $c(\varphi, \psi, z)$ и $L(\varphi, \psi, z)$ требует, чтобы $A(\varphi, \psi) = 0$; $a \to \infty$ и, таким образом,

$$L(\varphi,\psi,z) = \operatorname{ch}(\alpha z)\int_z^\infty \frac{\alpha \operatorname{sh}(\alpha\tau)}{\operatorname{ch}^2(\alpha\tau)} c(\varphi,\psi,\tau)\, d\tau. \quad (10)$$

Так как $c(\varphi_0, 0, z)$ — известная величина, то из (10) следует краевое значение

$$L(\varphi_0,0,z) = \operatorname{ch}(\alpha z)\int_z^\infty \frac{\alpha \operatorname{sh}(\alpha\tau)}{\operatorname{ch}^2(\alpha\tau)} c(\varphi_0,0,\tau)\, d\tau. \quad (11)$$

Чтобы установить краевое значение $L(\varphi_0, \psi, z)$, раскроем неопределенность в представлении (6). Имеем

$$c(\varphi,\psi,0) = L(\varphi,\psi,0) - \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2 L}{\partial z^2}(\varphi,\psi,0),$$

откуда

$$L(\varphi,0,0) = Ae^{\alpha^2 k_0\varphi} + \alpha^2 k_0 e^{\alpha^2 k_0 \varphi}\int_{-\infty}^{\varphi} e^{-\alpha^2 k_0 \tau} c(\tau,0,0)d\tau,$$

где A — произвольная постоянная. Ограниченность $L(\varphi, 0, 0)$ при $\varphi \to \infty$ приводит к тому, что $A = 0$.

Если известно распределение концентрации $c_H(\varphi, 0, H)$, то приходим к краевому условию третьего рода

$$\frac{\partial L}{\partial z}(\varphi,0,H) - \alpha\operatorname{th}(\alpha H)L(\varphi,0,H) =$$

$$= \alpha\operatorname{th}(\alpha H)c(\varphi,0,H). \quad (12)$$

Таким образом, краевые условия для $L(\varphi, \psi, z)$ установлены и в результате приходим к смешанной краевой задаче для уравнения Фурье (5), где в качестве дополнительного условия $L(\varphi, 0, 0) = L_0(\varphi)$.

Преобразование, использованное выше и известное как преобразование Буссинеска, имеет и самостоятельный интерес. Его приложение не исчерпывается уравнениями типа (1). Оно может быть применено при исследовании полной системы уравнений тепломассопереноса, так как переводит неортогональную сетку в ортогональную. Это в свою очередь упрощает построение разностных уравнений.

Пример аналитического решения задачи переноса примеси

Применим данные результаты к решению задачи о поиске характера распределения примеси, порождаемой источником гауссовского типа при обтекании круглого холма, который моделируется круговым цилиндром $(x - m)^2 + y^2 = R^2$. Комплексный потенциал течения известен [2]:

$$w = \varphi + i\psi - \varphi_0 = \frac{v_\infty}{2}\left[(Z - m) + \frac{R^2}{Z - m}\right],$$

$$Z = x + iy, \quad (13)$$

где φ_0, v_∞, m, R — известные постоянные.

Для гауссовой модели факела [1]:

$$L = \frac{M}{\sqrt{2\pi\varphi}}\left[\exp\left(-\frac{(\xi+h)^2}{4\alpha^2 k_0\varphi}\right)+\exp\left(-\frac{(\xi-h)^2}{4\alpha^2 k_0\varphi}\right)\right],$$

$$h = \alpha H,\ \ \xi = \alpha z. \qquad (14)$$

Тогда для концентрации c имеем представление

$$c = \frac{MA(\psi)}{\sqrt{2\pi\varphi}}\left\{\left[\exp\left(-\frac{(\xi+h)^2}{4\alpha^2 k_0\varphi}\right)+\exp\left(-\frac{(\xi-h)^2}{4\alpha^2 k_0\varphi}\right)\right]+\right.$$

$$+\operatorname{cth}\xi\left[\frac{\xi+h}{2\alpha^2 k_0\varphi}\exp\left(-\frac{(\xi+h)^2}{4\alpha^2 k_0\varphi}\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\xi-h}{2\alpha^2 k_0\varphi}\exp\left(-\frac{(\xi-h)^2}{4\alpha^2 k_0\varphi}\right)\right]\right\}. \qquad (15)$$

Произвольную функцию $A(\psi)$ найдем из условия $c_0(\psi) = c(\varphi_0, \psi, 0)$, считая, что на линии $\varphi = \varphi_0$, $z = 0$ распределение концентрации известно. Раскрывая неопределенность во втором слагаемом (15), находим

$$c_0(\psi) = \frac{MA(\psi)}{\sqrt{2\pi\varphi_0}}\left[1+\frac{1}{2\alpha^2 k_0\varphi_0}\left(1+\frac{h^2}{2\alpha^2 k_0\varphi_0}\right)\right]\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{h^2}{4\alpha^2 k_0\varphi_0}\right). \qquad (16)$$

Примем за комплексный потенциал течения закон (13), который отвечает обтеканию окружности радиуса R поступательным потоком, скорость которого на бесконечности v_∞.

Тогда соотношения (13), (15) и (16) дают искомое пространственное распределение примеси от одиночного точечного источника в параметрическом виде, хотя в данном случае можно указать явный вид зависимости концентрации от декартовых координат.

Распределение концентрации примеси при обтекании цилиндра запыленным потоком ($m = 100$ м – расстояние между источником примеси и центром цилиндра; $R = 50$ м – радиус цилиндра; $v_\infty = 5$ м/с; $H = 50$ м; $k_0 = 0{,}1$ м^2/с; $\alpha = 1{,}2$) показано на рис. 1.

На рис. 1 приведены зависимости максимального значения концентрации от координаты z, а также кривые, определяющие зависимость концентрации примеси от координаты x и z. Из приведенных результатов следует, что характер изменения концентрации существенно зависит от уровня z. У земной поверхности на некотором расстоянии от источника отмечается максимальное значение концентрации. С ростом z положение максимума смещается к источнику. На уровне положения выброса $z = H$ концентрация монотонно убывает с увеличением x. На более высоких уровнях снова наблюдается максимум c на некотором расстоянии x.

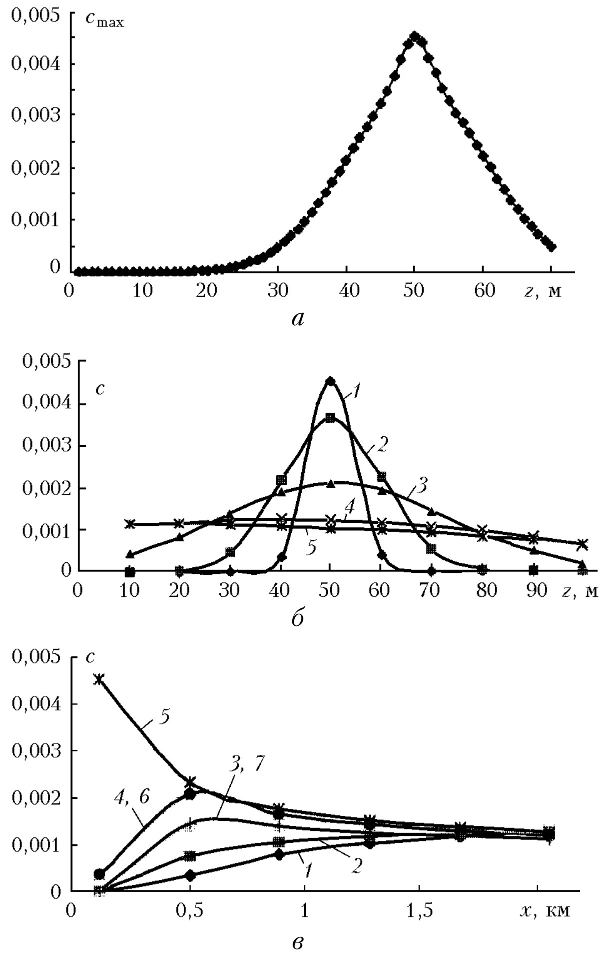

Рис. 1. Зависимость максимальной концентрации c_{max} от z (*а*), c от x: *1* – x = 0,12; *2* – 0,2; *3* – 0,6; *4* – 2; *5* – 4 км (*б*), c от z: *1* – z = 10; *2* – 20; *3* – 30; *4* – 40; *5* – 50; *6* – 60; *7* – 70 м (*в*)

По расчетным данным можно также оценить вертикальный профиль концентрации в зависимости от расстояния до источника. При малых расстояниях x максимум по высоте отмечается примерно на уровне источника $z = H$. С ростом x максимум концентрации снижается и распределение концентрации по высоте теряет симметрию: уровень концентрации у поверхности выше, чем в верхних слоях воздуха.

Распределение примеси в уличном каньоне

Была также рассмотрена задача о распределении примеси из источника, находящегося в открытом пространстве, в канал шириной $2a$. В этом случае переменные x, y и φ, ψ связаны соотношением

$$x + iy = \frac{\varphi + i\psi}{u} + \frac{a}{\pi}\exp\left(-\frac{\pi(\varphi + i\psi)}{au}\right), \qquad (17)$$

где u – скорость на бесконечности.

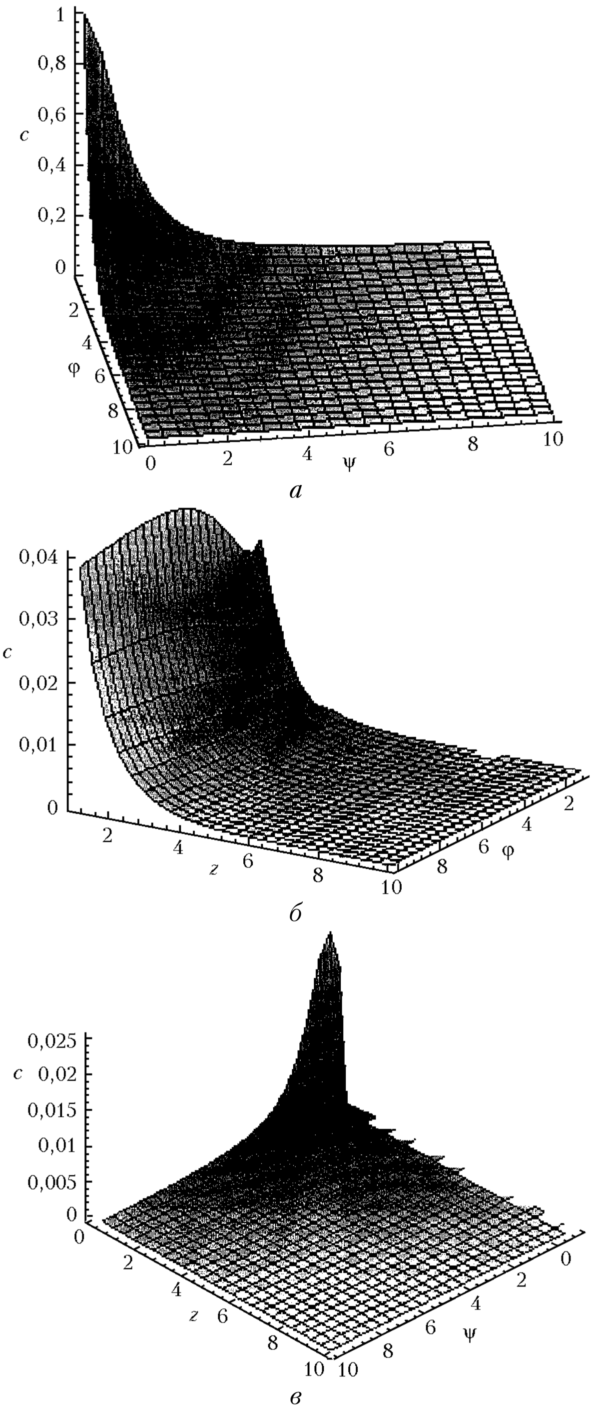

Рис. 2. Значения концентрации при $z = 0$ (*а*); при $\psi = 0$ (*б*); при $\varphi = 0{,}1$ (*в*); $\alpha = 0{,}1$; $k_0 = 0{,}1$ м^2/с; $l = 1$

Если начальное распределение $L(\varphi, \psi, z)$ задать в виде

$$L(\varphi,\psi,0) = \frac{\exp(-l\varphi)}{\psi^2+1},\ L(0,\psi,z) = \frac{\exp(-mz)}{\psi^2+1},\quad (18)$$

то для $L(\varphi, \psi, z)$ получим выражение

$$L(\varphi,\psi,z) = \frac{1}{\psi^2+1}\int\limits_{\frac{z}{\sqrt{k_0\varphi}}}^{\infty} \exp\left\{-\left[l\left(\varphi-\frac{z^2}{k_0 s^2}\right)+\frac{s^2}{4}\right]\right\}ds +$$

$$+\frac{1}{\psi^2+1}\int\limits_0^{\infty}\left[\exp\left(-\frac{(z-\xi)^2}{4k_0\varphi}-m\xi\right)-\right.$$

$$\left.-\exp\left(-\frac{(z+\xi)^2}{4k_0\varphi}-m\xi\right)\right]d\xi.$$

Тогда соотношения (6), (17) и (19) и дадут пространственное распределение концентрации, при этом

$$c(\varphi,\psi,0) = \left(1+\frac{l^2}{\alpha^2 k_0}\right)\frac{\exp(-l\varphi)}{\psi^2+1}.$$

Результаты расчетов, проведенных по указанным формулам, представлены на рис. 2.

Заключение

Представлен один из методов понижения размерности исходных задач, позволяющий эффективно находить аналитические и численные решения рассматриваемого уравнения.

Помимо этого использованное преобразование переводит неортогональные в плане сетки в ортогональные, что существенно упрощает организацию численных подходов для полных уравнений переноса примеси.

1. *Берлянд М.Е.* Современные проблемы атмосферной диффузии и загрязнения атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1975. 448 с.
2. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
3. *Панько С.В.* О представлении решения обобщенной системы Коши–Римана и его приложения // Прикл. мат. и мех. 1989. Т. 53. Вып. 5. С. 743–751.
4. *Ali I., Kalla S.L. and Khajah H.G.* A time dependent model for the transport of heavy pollutants from ground-level aerial sources //Appl. Mathem. and Comput. 1999. V. 105. P. 91–99.

M.G. Nikitina, S.V. Panko, A.V. Starchenko. **A representation of solution of pollution transport equation and its applications.**

An analytic solution of transport equation modeling pollution transfer in the atmosphere was found. The representation of the solution is based on reduction of the input equation to the classic one-dimensional equation of heat conductivity. Functional dependences of horizontal wind and turbulent diffusivity on the vertical coordinate are supposed to be known. Solution of arising boundary value problems possesses a bi-functional arbitrary rule. Arbitrary functions are found on the basis of the known impurity distribution on two levels along a given curve. Then the parameter representation of spatial field of impurity is found. An efficiency of the developed approach is conditioned by application of new independent variables, which transform the investigated plane domain to a canonical one. New variables allow application of known various both analytic and numerical solutions of the one-dimensional Fourier equation. A distribution of concentration in original variables is found by simple number translation with usage of transformation formulae connecting Cartesian coordinates and the new ones.