

## Флуктуации фазы бesselь-гауссовых пучков в случайно-неоднородных средах

И.П. Лукин\*

*Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН  
634021, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1*

Поступила в редакцию 8.04.2009 г.

Исследуются флуктуации фазы бesselь-гауссовых оптических пучков в случайно-неоднородной среде. Приведены результаты расчета методом плавных возмущений дисперсии флуктуаций фазы данного типа пучков в турбулентной атмосфере. Обнаружен эффект относительного ослабления флуктуаций фазы бesselь-гауссова пучка по сравнению со случаем плоской волны. Наблюдается слабая зависимость дисперсии флуктуаций фазы от параметров гауссова фактора пучка. Флуктуации фазы бesselева пучка неоднородны в пространстве: отношение дисперсии флуктуаций фазы пучка в точке, смещенной с оптической оси, к дисперсии флуктуаций фазы на его оптической оси минимально в максимумах бesselева пучка и максимально в минимумах.

*Ключевые слова:* бesselев пучок, флуктуации фазы, атмосферная турбулентность; Bessel beam, phase fluctuations, atmospheric turbulence.

Статистические характеристики флуктуаций фазы оптических волн, распространяющихся в случайно-неоднородных средах, изучаются, как правило, либо методом геометрической оптики [1], либо методом плавных возмущений [2]. При этом методом геометрической оптики рассматривают флуктуации фазы плоской и сферической волн, а метод плавных возмущений применим для более широкого класса задач, в том числе для исследования флуктуаций фазы поля произвольного вида. К настоящему времени наиболее подробно описаны флуктуации фазы плоской и сферической волн в турбулентной атмосфере [2–5] и в дискретной рассеивающей среде [6–8].

Исследования флуктуаций фазы гауссовых оптических пучков в случайно-неоднородных средах [2–5, 8] хотя были менее подробны, но все же затронули все основные моменты данной проблемы. Однако гауссов пучок, а также предельные формы оптических волн — плоская и сферическая, не охватывают всех возможных видов распределения поля оптического излучения в лазерных пучках. В настоящее время широко изучаются свойства оптических пучков, сохраняющих свой функциональный вид при распространении в свободном пространстве [9–14]. Одним из таких типов пучков являются бesselь-гауссовы пучки [9–14], которые из всей совокупности подобных пучков выделяются тем, что в некоторой пространственной области обладают свойством инвариантности, т.е. сохраняют при распространении не только свой функциональный вид, но и исходные значения параметров («бездифракционные» пучки). В связи с этим весьма активно, хотя

несколько односторонне, проводятся исследования особенностей распространения бездифракционных бesselевых пучков в турбулентной атмосфере [15–24].

Большинство работ [15, 16, 18–21, 24] посвящено анализу различных аспектов поведения средней интенсивности бesselь-гауссовых пучков в случайно-неоднородных средах. Особое внимание в этих исследованиях уделяется рассмотрению сохранения (или изменения) при распространении топологической структуры бesselь-гауссовых пучков [15, 16, 20, 21, 24]. Начато изучение флуктуационных характеристик бesselевых и бesselь-гауссовых пучков при распространении в турбулентной атмосфере [17, 18, 22, 23]. Однако оно пока ограничивается расчетами лишь нормированной дисперсии флуктуаций интенсивности оптических пучков [17, 18, 22, 23]. Вместе с тем исследований флуктуаций фазы бesselевых или бesselь-гауссовых пучков при распространении их в случайно-неоднородных средах до сих пор не проводилось. Хотя вполне очевидно, что статистические характеристики флуктуаций фазы бesselь-гауссовых пучков будут принципиально отличаться от аналогичных характеристик изученных ранее оптических волн [2–8].

Данная статья посвящена подробному количественному рассмотрению ранее не описанного эффекта ослабления флуктуаций фазы в бesselевых и бesselь-гауссовых пучках относительно уровня флуктуаций фазы в плоской оптической волне. Приведены результаты расчета, проведенного методом плавных возмущений, дисперсии флуктуаций фазы фундаментального бesselева и бesselь-гауссова пучков в турбулентной атмосфере.

Поле бesselь-гауссова пучка, распространяющегося в направлении оси  $OX$ , в начальной плоскости ( $x = 0$ ) запишем в виде [9]:

\* Игорь Петрович Лукин (lukin\_ip@iao.ru).

$$U_0(\rho) = E_0 \exp\left(-\frac{\rho^2}{2a_0^2} - \frac{ik}{2R_0}\rho^2\right) J_0(\beta\rho), \quad (1)$$

где  $E_0$  – начальная амплитуда поля на оптической оси пучка;  $a_0$  – радиус гауссова фактора поля пучка;  $R_0$  – радиус кривизны параболического волнового фронта в центре излучающей апертуры;  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  – длина волны оптического излучения в вакууме;  $\beta$  – компонента волнового вектора, ортогональная оси  $OX$ ;  $\rho = \{y, z\}$  – поперечный к направлению распространения оптического излучения пространственный вектор;  $J_0(x)$  – функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Воспользовавшись первым приближением метода плавных возмущений [1–3], для поля бessel-гауссова пучка (1) можно получить статистические характеристики флуктуаций фазы в области слабых флуктуаций оптических волн. В частности, интегральное выражение для дисперсии флуктуаций фазы на оптической оси бessel-гауссова пучка в случайно-неоднородной среде будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{S^2}^2(0) &\cong \frac{\pi^2 k^2 x}{2} \int_0^1 d\xi \int_0^\infty d\kappa \kappa \Phi_\varepsilon(\kappa) \times \\ &\times \exp\left\{-\frac{x\kappa^2(1-\xi)^2}{k\Omega_0[(1-\mu)^2 + \Omega_0^{-2}]}\right\} \Re\left\{J_0\left(\frac{\beta x \kappa(1-\xi)}{k[(1-\mu) + i\Omega_0^{-1}]}\right)\right\} \times \\ &\times \left\{J_0\left(\frac{\beta x \kappa(1-\xi)}{k[(1-\mu) - i\Omega_0^{-1}]}\right)\right\} + \\ &+ \exp\left[-i\frac{(1-\mu)(1-\mu\xi) + \Omega_0^{-2}\xi}{(1-\mu)^2 + \Omega_0^{-2}} \frac{x\kappa^2(1-\xi)}{k}\right] \times \\ &\times \left\{J_0\left(\frac{\beta x \kappa(1-\xi)}{k[(1-\mu) + i\Omega_0^{-1}]}\right)\right\} \Bigg\}, \quad (2) \end{aligned}$$

где  $x$  – расстояние от плоскости источника до плоскости наблюдения;  $\mu = x/R_0$  – параметр фокусировки пучка;  $\Omega_0 = ka_0^2/x$  – число Френеля передающей апертуры;  $\Phi_\varepsilon(\kappa)$  – спектр флуктуаций диэлектрической проницаемости случайно-неоднородной среды. При  $\beta = 0$  выражение (2) описывает поведение дисперсии флуктуаций фазы на оптической оси гауссова пучка в случайно-неоднородной среде (совпадает с формулой, полученной методом плавных возмущений в [4]). Для фундаментального бessel-гауссова пучка, когда гауссов фактор бessel-гауссова пучка вырождается в единицу:

$$\exp\left[-\rho^2/(2a_0^2) - ik/(2R_0)\rho^2\right] = 1$$

при  $a_0 \rightarrow \infty$  и  $R_0 \rightarrow \infty$  (или в других обозначениях:  $\mu \rightarrow 0$ ,  $\Omega_0 \rightarrow \infty$ ), выражение (2) несколько упрощается:

$$\sigma_{S^2}^2(0) \cong \frac{\pi^2 k^2 x}{2} \int_0^1 d\xi \int_0^\infty d\kappa \kappa \Phi_\varepsilon(\kappa) \times$$

$$\times J_0^2\left(\frac{x}{k}\beta\kappa\xi\right) \left[1 + \cos\left(\frac{x}{k}\kappa^2\xi\right)\right]. \quad (3)$$

Поскольку статистические характеристики флуктуаций плоской оптической волны при распространении в турбулентной атмосфере хорошо изучены и широко известны, то их можно использовать в качестве эталона и в дальнейшем приводить дисперсию флуктуаций фазы бessel-гауссова пучка, нормированную на соответствующую характеристику плоской оптической волны. Известно [1–5], что интегральное выражение для дисперсии флуктуаций фазы плоской оптической волны в случайно-неоднородной среде имеет следующий вид:

$$\sigma_{S^2}^2 \cong \frac{\pi^2 k^2 x}{2} \int_0^1 d\xi \int_0^\infty d\kappa \kappa \Phi_\varepsilon(\kappa) \left[1 + \cos\left(\frac{x}{k}\kappa^2\xi\right)\right], \quad (4)$$

его также можно получить из выражения (3), положив там  $\beta = 0$ . Интегральное выражение для дисперсии флуктуаций фазы фундаментального бessel-гауссова пучка (3) отличается от соответствующего выражения, описывающего дисперсию плоской оптической волны (4), тем, что подынтегральная функция выражения (3) содержит множитель вида  $J_0^2\left(\frac{x}{k}\beta\kappa\xi\right)$ .

Так как функция Бесселя первого рода нулевого порядка, кроме нулевой точки, всегда меньше единицы, то наличие этого множителя должно приводить к уменьшению значения интеграла (3) по сравнению с аналогичным выражением (4). Таким образом, как следует из сравнения (3) и (4), в турбулентной атмосфере дисперсия флуктуаций фазы на оптической оси бездифракционного фундаментального бessel-гауссова пучка при тех же значениях параметров среды распространения всегда меньше дисперсии флуктуаций фазы плоской волны.

Так как при изучении флуктуаций фазы оптических волн особо важную роль играют большие пространственные масштабы случайно-неоднородной атмосферы, то для конкретных расчетов спектр флуктуаций диэлектрической проницаемости случайно-неоднородной среды выберем с конечным значением внешнего масштаба атмосферной турбулентности [4, 5]:

$$\Phi_\varepsilon(\kappa) = 0,033C_\varepsilon^2 (\kappa^2 + \kappa_0^2)^{-1/6} \exp\left(-\frac{\kappa^2}{\kappa_m^2}\right), \quad (5)$$

где  $C_\varepsilon^2$  – структурный параметр флуктуаций диэлектрической проницаемости турбулентной атмосферы;  $\kappa_0 = 2\pi/L_0$ ,  $L_0$  – внешний масштаб атмосферной турбулентности;  $\kappa_m = 5,9091/l_0$ ,  $l_0$  – внутренний масштаб атмосферной турбулентности. Для определенности, при вычислениях со спектром флуктуаций диэлектрической проницаемости (5), в дальнейшем полагается, что  $\kappa_m = 10^3 \cdot \kappa_0$ . Для трасс распространения, удовлетворяющих условию  $x < k/\kappa_0^2$ , известно асимптотическое выражение для дисперсии флуктуаций фазы плоской волны в турбулентной атмосфере [1–5]:

$$\sigma_{S\text{pl}}^2 \cong \frac{0,033\pi^2}{2} \frac{\Gamma(5/6)}{\Gamma(11/6)} C_\epsilon^2 k^2 x \kappa_0^{-5/3} = 0,1954 C_\epsilon^2 k^2 x \kappa_0^{-5/3}. \quad (6)$$

На рис. 1 представлено поведение дисперсии флуктуаций фазы фундаментального бesselова пучка ( $a_0 \rightarrow \infty$  и  $R_0 \rightarrow \infty$ ) (3), нормированной на дисперсию флуктуаций фазы плоской волны (4), в зависимости от величины нормированного параметра бesselова пучка  $\tilde{\beta} = \sqrt{x/k}\beta$  при различных значениях нормированного волнового числа, соответствующего внешнему масштабу турбулентности  $L_0$ ,  $\tilde{\kappa}_0 = \sqrt{x/k}\kappa_0$ :  $\tilde{\kappa}_0 = 1,0$  (1),  $0,1$  (2),  $0,01$  (3) и  $0,001$  (4).

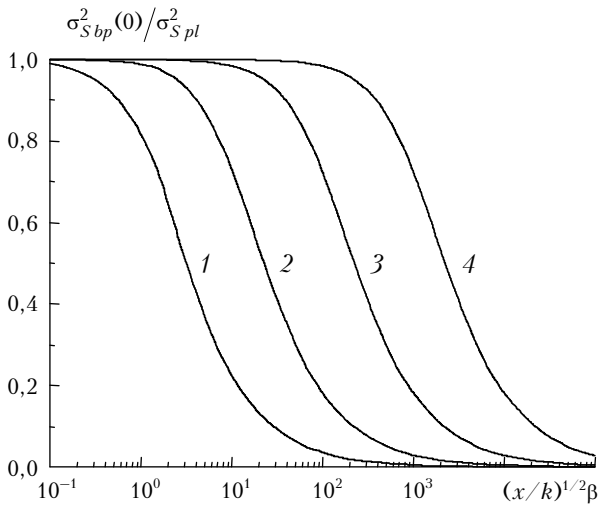


Рис. 1. Дисперсия флуктуаций фазы на оптической оси фундаментального бesselова пучка, нормированная на дисперсию флуктуаций фазы плоской волны, при различных значениях внешнего масштаба атмосферной турбулентности как функция параметра бesselова пучка  $\tilde{\beta}$

Данные для дисперсии флуктуаций фазы получены путем численного интегрирования выражений (3) и (4) со спектром (5). Хорошо видно, что отношение дисперсий флуктуаций фазы фундаментального бesselова пучка и плоской волны всегда меньше единицы, т.е. имеет место эффект относительного уменьшения уровня флуктуаций фазы в фундаментальном бesselовом пучке в турбулентной атмосфере по сравнению со случаем плоской волны. Причем чем больше параметры  $\tilde{\beta}$  и  $\tilde{\kappa}_0$ , тем заметнее относительное ослабление флуктуаций фазы в фундаментальном бesselовом пучке. Отметим, что данные зависимости имеют монотонный характер. Абсолютное значение дисперсии флуктуаций фазы фундаментального бesselова пучка в силу линейной зависимости выражения (6) от  $x$  практически всегда растет с увеличением трассы распространения, но этот рост медленнее, чем для плоской оптической волны (6).

Поведение дисперсии флуктуаций фазы на оптической оси коллимированного ( $\mu = 0$ ) бessel-гауссова пучка в турбулентной атмосфере от числа Френеля передающей апертуры  $\Omega_0$  представлено на рис. 2.

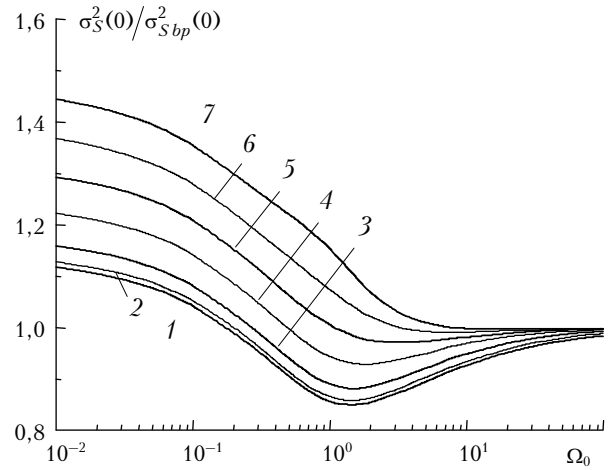


Рис. 2. Дисперсия флуктуаций фазы на оптической оси коллимированного ( $\mu = 0$ ) бessel-гауссова пучка от числа Френеля передающей апертуры  $\Omega_0$  для различных значений параметра бesselова пучка  $\beta$

Данные приведены для различных значений нормированного параметра бesselова пучка  $\tilde{\beta} = \sqrt{x/k}\beta$ :  $\tilde{\beta} = 0$  (1),  $0,1$  (2),  $0,25$  (3),  $0,5$  (4),  $0,75$  (5),  $1$  (6) и  $1,25$  (7), для одного значения внешнего масштаба турбулентности ( $\tilde{\kappa}_0 = 1,0$ ).

На рис. 2 приведено отношение дисперсии флуктуаций фазы на оптической оси бessel-гауссова пучка (2) к дисперсии флуктуаций фазы на оптической оси фундаментального бesselова пучка (3) при одинаковых значениях параметра бesselова пучка  $\beta$ . Дисперсия флуктуаций фазы коллимированного бessel-гауссова пучка совпадает с дисперсией флуктуаций фазы фундаментального бesselова пучка при больших размерах передающей апертуры ( $\Omega_0 \rightarrow \infty$ ). Максимальные отличия наблюдаются в противоположной области малых передающих апертур ( $\Omega_0 \rightarrow 0$ ). С увеличением внешнего масштаба турбулентности  $L_0$  ( $\tilde{\kappa}_0 \rightarrow 0$ ) зависимость от числа Френеля передающей апертуры  $\Omega_0$  ослабевает (кривые, изображающие поведение дисперсии флуктуаций фазы, сгущаются около прямой  $y = 1$ ).

Зависимость дисперсии флуктуаций фазы на оптической оси сфокусированного ( $\mu > 0$ ) или расходящегося ( $\mu < 0$ ) бessel-гауссова пучка в турбулентной атмосфере от числа Френеля передающей апертуры  $\Omega_0$  представлена на рис. 3.

Графики построены для двух значений нормированного параметра бesselова пучка  $\tilde{\beta}$ :  $\tilde{\beta} = 0$  (тонкие линии) и  $1$  (жирные линии) и для одного значения внешнего масштаба турбулентности ( $\tilde{\kappa}_0 = 1,0$ ).

Отметим, что при  $\tilde{\beta} = 0$  фактически речь идет о рассмотренном ранее [4, 5] гауссовом пучке, распространяющемся в турбулентной атмосфере. На рис. 3 приведено отношение дисперсии флуктуаций фазы на оптической оси бessel-гауссова пучка (2) к дисперсии флуктуаций фазы на оптической оси фундаментального бesselова пучка (3) при одинаковых значениях параметра бesselова пучка  $\beta$ . Сплошные

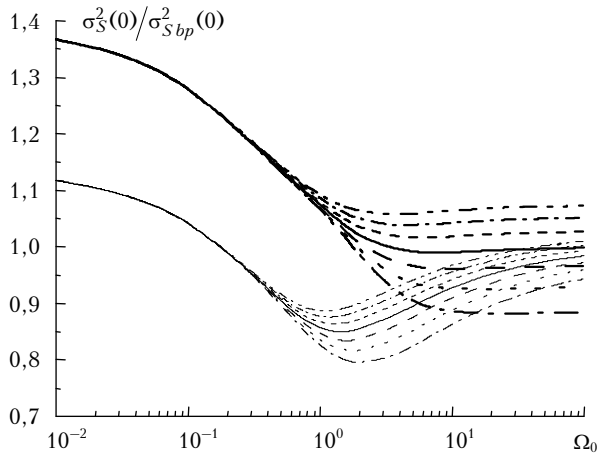


Рис. 3. Дисперсия флуктуаций фазы на оптической оси сфокусированного или расходящегося гауссова (тонкие линии) или бessel-гауссова (жирные линии) пучков от числа Френеля передающей апертуры  $\Omega_0$

линии соответствуют коллимированному пучку при  $\mu = 0$ , штриховые, пунктирные и штрихпунктирные — сфокусированным пучкам при  $\mu = 0,1; 0,2$  и  $0,3$  соответственно, короткие штриховые, короткие штрихпунктирные с одной точкой и штрихпунктирные с двумя точками — расходящимся пучкам при  $\mu = -0,1; -0,2$  и  $-0,3$ . В области  $\Omega_0 \leq 1$  дисперсия флуктуаций фазы бessel-гауссова пучка от параметра фокусировки пучка не зависит. Для широких в дифракционном смысле пучков ( $\Omega_0 > 1$ ) данная зависимость наблюдается. Фокусировка пучка уменьшает уровень флуктуаций фазы, а дефокусировка увеличивает. С увеличением параметра бесселева пучка  $\beta$  эффект влияния параметра фокусировки пучка на уровень флуктуаций фазы проявляется существеннее.

В целом на основании данных, представленных на рис. 2 и 3, можно сделать вывод, что дисперсия флуктуаций фазы бessel-гауссова пучка, как и в случае гауссова пучка [4, 5], слабо зависит от радиуса гауссова фактора излучающей апертуры  $a_0$  и радиуса кривизны параболического волнового фронта  $R_0$ . Таким образом, можно считать, что параметры гауссова фактора бessel-гауссова пучка слабо влияют на величину эффекта ослабления фазовых флуктуаций данного пучка относительно уровня флуктуаций фазы плоской оптической волны.

Распределения полей фундаментального бесселева и бessel-гауссова пучков в поперечном сечении к направлению распространения оптического излучения ( $x = \text{const}$ ) пространственно неоднородны [9], поэтому статистические характеристики флуктуаций оптического поля таких пучков будут также пространственно неоднородны. Подробнее рассмотрим вопрос о том, к чему приводит пространственная неоднородность оптического поля бесселева пучка для статистических характеристик флуктуаций фазы. Дисперсия флуктуаций фазы фундаментального бесселева пучка ( $a_0 \rightarrow \infty$  и  $R_0 \rightarrow \infty$ ) в точке  $\{x, \rho\}$ , смещенной от оптической оси пучка на  $\rho$ , вычисленная в первом приближении метода плавных возмущений, имеет вид

$$\sigma_{Sbp}^2(\rho) \cong \frac{\pi k^2 x}{4} J_0^{-2}(\beta \rho) \int_0^1 d\xi \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} \Phi_\varepsilon(\mathbf{k}) J_0\left(\beta \left| \rho - \frac{x}{k} \mathbf{k}_\xi^\xi \right.\right) \times \\ \times \left[ J_0\left(\beta \left| \rho - \frac{x}{k} \mathbf{k}_\xi^\xi \right.\right) + J_0\left(\beta \left| \rho + \frac{x}{k} \mathbf{k}_\xi^\xi \right.\right) \cos\left(\frac{x}{k} k^2 \xi\right) \right]. \quad (7)$$

Отношение дисперсии флуктуаций фазы фундаментального бесселева пучка в точке, смещенной с оптической оси пучка, к дисперсии флуктуаций фазы этого же пучка на его оптической оси представлено на рис. 4.

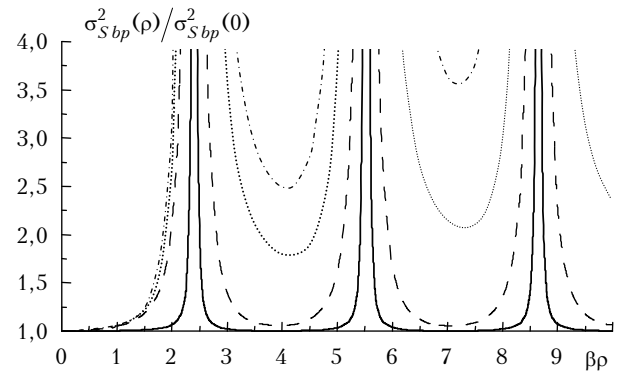


Рис. 4. Отношение дисперсии флуктуаций фазы бесселева пучка в точке, смещенной с оптической оси пучка, к дисперсии флуктуаций фазы бесселева пучка на его оптической оси при различных значениях  $\beta$

Расчет дисперсий флуктуаций фазы проведен по формулам (7) и (3) со спектром (5) при одном значении нормированного волнового числа, соответствующего внешнему масштабу турбулентности,  $\tilde{\kappa}_0 = 1,0$ . На рис. 4 приведено пространственное распределение дисперсии флуктуаций фазы фундаментального бесселева пучка в его поперечном сечении к направлению распространения оптического излучения при четырех значениях нормированного параметра бесселева пучка  $\tilde{\beta} = 0,1$  (сплошная линия); 1 (штриховая); 10 (пунктирная) и 100 (штрихпунктирная). Представлены первые три максимума ( $\beta\rho = 0; 3,8317$  и  $7,0156$ ) и первые три минимума ( $2,4048; 5,5201$  и  $8,6537$ ) интенсивности бесселева пучка. Видно, что в минимумах отношение дисперсий флуктуаций фазы (7) к (3) стремительно возрастает, а в максимумах наблюдается минимум данного отношения. Подчеркнем, что с ростом параметра бесселева пучка и с увеличением номера максимума этого пучка величина минимального значения отношения дисперсий флуктуаций фазы будет расти. Увеличение внешнего масштаба атмосферной турбулентности подчеркивает все эти тенденции, усиливая процесс возрастания дисперсии флуктуаций фазы бесселева пучка.

В турбулентной атмосфере фаза бessel-гауссова пучка, так же как и других типов оптических волн и пучков, флуктуирует. Однако наблюдается

ряд принципиальных особенностей этого явления для бесселевых пучков. Дисперсия флуктуаций фазы на оптической оси бессель-гауссова пучка меньше аналогичной характеристики в плоской оптической волне. Зависимость уровня флуктуаций фазы в бессель-гауссовом пучке от параметров гауссова фактора пучка наблюдается, но в целом она достаточно слаба. Отмечена пространственная неоднородность флуктуаций фазы бесселева пучка в его поперечном сечении к направлению распространения оптического излучения. Отношение дисперсии флуктуаций фазы бесселева пучка в точке, смещенной с оптической оси пучка, к дисперсии флуктуаций фазы пучка на его оптической оси минимально в максимумах бесселева пучка и максимально в минимумах этого пучка. Причем надо особо подчеркнуть, что в целом наблюдается рост дисперсии флуктуаций фазы от центра пучка (его оптической оси) к краю.

Полученные результаты позволяют сформулировать количественные требования к параметрам оптических систем, работающих в атмосфере на протяженных трассах (сотни метров — километры): линий оптической связи, использующих фазовую модуляцию, или же фазовых дальномерных систем. Описанный в статье эффект ослабления флуктуаций фазы бесселевых пучков дает возможность использовать в качестве несущего излучения бесселевы оптические пучки (вместо не оправдавших себя для этой цели гауссовых). Бесселевы пучки в роли оптической несущей позволяют существенно снизить уровень шумов, вносимых средой распространения в полезный сигнал, что должно привести к повышению помехозащищенности (или соответственно точности), а также к расширению функциональных возможностей вышеупомянутых систем.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 09-02-91224-СТ\_а.

1. Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. Часть 2. Случайные поля. М.: Наука, 1978. 464 с.
2. Чернов Л.А. Волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1975. 172 с.
3. Татарский В.И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1967. 548 с.
4. Гурвич А.С., Кон А.И., Миронов В.Л., Хмелевцов С.С. Лазерное излучение в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1976. 280 с.
5. Бельский М.С., Лукин В.П., Миронов В.Л., Покасов В.В. Когерентность лазерного излучения в атмосфере. Новосибирск: Наука, 1985. 176 с.

**I.P. Lukin. The fluctuations of a phase of the Bessel–Gauss beams in randomly inhomogeneous media.**

The phase fluctuations of the Bessel–Gauss optical beams in randomly inhomogeneous media are studied. The results of calculation by the method of smooth perturbations of the variance of the fluctuations of a phase of the Bessel–Gauss beams in turbulent atmosphere are presented. The effect of relative weakening of the fluctuations of a phase of the Bessel–Gauss beam in comparison with the case of the plane wave is found. Weak dependence of the variance of fluctuations of a phase in the Bessel–Gauss beam on parameters of the Gaussian factor of the beam is observed. The phase fluctuations of the Bessel beam are non-uniform in space: the relation of the variance of fluctuations of a phase of Bessel beam in a point, displaced from the optical axis of a beam, to the variance of the fluctuations of a phase of Bessel beam on its optical axis is minimal in maxima of the Bessel beam and is maximal in minima.

6. Лукин И.П. Флуктуации световой волны в рассеивающей среде // Квант. электрон. 1979. Т. 6. № 8. С. 1756–1760.
7. Лукин И.П. Корреляция флуктуаций частотно-разнесенных волн в рассеивающей среде // Оптика и спектроскопия. 1981. Т. 51. Вып. 6. С. 1083–1087.
8. Лукин И.П. Флуктуации оптических волн, отраженных зеркальными объектами в рассеивающей атмосфере // Оптика атмосф. 1989. Т. 2. № 1. С. 21–27.
9. Gori F., Guattari G., Padovani C. Bessel-gauss beams // Opt. Commun. 1987. V. 64. N 6. P. 491–495.
10. Li J., Lee H., Wolf E. New generalized Bessel–Gaussian beams // J. Opt. Soc. Amer. A. 2004. V. 21. N 4. P. 640–646.
11. Manela O., Segev M., Christodoulides D.N. Nondiffracting beams in periodic media // Opt. Lett. 2005. V. 30. N 19. P. 2611–2613.
12. Ling D., Li J., Chen J. Analysis of eigenfields in the axicon-based Bessel–Gauss resonator by the transfer-matrix method // J. Opt. Soc. Amer. A. 2006. V. 23. N 4. P. 912–918.
13. Ling D., Li Ch., Li J. Eigenfields and output beams of an unstable Bessel–Gauss resonator // Appl. Opt. 2006. V. 45. N 17. P. 4102–4108.
14. Miret J.J., Zapata-Rodriguez C.J. Diffraction-free beams with elliptic Bessel envelope in periodic media // J. Opt. Soc. Amer. B. 2008. V. 25. N 1. P. 1–6.
15. Eyyuboğlu H.T. Propagation of higher order Bessel–Gaussian beams in turbulence // Appl. Phys. B. 2007. V. 88. N 2. P. 259–265.
16. Eyyuboğlu H.T., Hardalac F. Propagation of modified Bessel–Gaussian beams in turbulence // Opt. & Laser Technol. 2008. V. 40. N 2. P. 343–351.
17. Eyyuboğlu H.T., Baykal Y., Sermutlu E., Cai Y. Scintillation advantages of lowest order Bessel–Gaussian beams // Appl. Phys. B. 2008. V. 92. N 2. P. 229–235.
18. Eyyuboğlu H.T., Sermutlu E., Baykal Y., Cai Y., Korotkova O. Intensity fluctuations in J-Bessel–Gaussian beams of all orders propagating in turbulent atmosphere // Appl. Phys. B. 2008. V. 93. N 2–3. P. 605–611.
19. Zhang Y., Zhu T. Propagation of Helmholtz–Gauss beams in weak turbulent atmosphere // Chin. Opt. Lett. 2008. V. 6. N 2. P. 79–82.
20. Chen B., Chen Z., Pu J. Propagation of partially coherent Bessel–Gaussian beams in turbulent atmosphere // Opt. & Laser Technol. 2008. V. 40. N 6. P. 820–827.
21. Zhu K., Zhou G., Li X., Zheng X., Tang H. Propagation of Bessel–Gaussian beams with optical vortices in turbulent atmosphere // Opt. Express. 2008. V. 16. N 26. P. 21315–21320.
22. Baykal Y., Eyyuboğlu H.T., Cai Y. Effect of beam type on the scintillations: A review // Proc. SPIE. 2009. V. 7200. P. 720002-1–720002-15.
23. Eyyuboğlu H.T., Baykal Y., Sermutlu E., Korotkova O., Cai Y. Scintillation index of modified Bessel–Gaussian beams propagating in turbulent media // J. Opt. Soc. Amer. A. 2009. V. 26. N 2. P. 387–394.
24. Chen B., Pu J. Propagation of Gauss–Bessel beams in turbulent atmosphere // Chin. Phys. B. 2009. V. 18. N 3. P. 1033–1039.