«Оптика атмосферы и океана», **9**, N 1 (1996)

УДК 531.521

Г.С. Помранинг

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ В АТМОСФЕРЕ С ЧАСТИЧНОЙ ОБЛАЧНОСТЬЮ

Изложен относительно простой подход к проблеме переноса излучения в поле разорванной облачности. Основные уравнения строятся на марковской модели, в которой данная проблема переноса излучения исследуется с позиций стохастического формализма. В частности, атмосфера с частичной облачностью рассматривается как двухкомпонентная (облака и ясное небо) смесь, описываемая системой двух детерминированных уравнений для средней по ансамблю интенсивности. В случае марковской статистики эти уравнения точны для чисто поглощающей смеси и достаточно точны и очень просты для более общего случая, включающего рассеяние. Данное описание также может быть обобщено на случай немарковской статистики. Показано, что в двух различных асимптотических случаях данная система из двух уравнений может быть ренормирована к одному уравнению переноса излучения, учитывающему эффективные характеристики атмосферы. Эти два случая соответствуют высокой прозрачности атмосферы и статистике смеси с маленьким радиусом корреляции. В формализме учтены общие пространственные зависимости свойств облачности и ясного неба, а также неоднородная и анизотропная статистика.

1. Введение

Общепризнано, что взаимодействие тепловой радиации с облаками является важным фактором, определяющим климат Земли. Это должно учитываться в моделях общей циркуляции атмосферы, разрабатываемых для точного прогноза долговременных климатических изменений. Данный вопрос обсуждается в статьях Стивенса [1], Раманатана и др. [2] и Стивенса и др. [3], а также в цитируемой ими литературе. Соответствующее данному подходу уравнение переноса имеет вид

$$\mathbf{\Omega}\, \nabla I(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) + \sigma'(\mathbf{r}) I(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) = LI(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) + S(\mathbf{r}), \tag{1}$$

где L – оператор рассеяния, определяемый как

$$LI(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) = \sigma_s'(\mathbf{r}) \int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}' f(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}'\cdot\mathbf{\Omega}) I(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}'), \tag{2}$$

и $S(\mathbf{r})$ – источник (изотропного) излучения, определяемый формулой

$$S(\mathbf{r}) = \sigma_a(\mathbf{r}) B[T(\mathbf{r})]. \tag{3}$$

Здесь $I(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$ – интенсивность радиации в пространственной точке $\mathbf{r}$ в направлении $\mathbf{\Omega}$; $\sigma_s'(\mathbf{r})$ – сечение рассеяния; $\sigma_a(\mathbf{r})$ – сечение поглощения с поправкой на вынужденное излучение; $\sigma'(\mathbf{r}) = \sigma_s'(\mathbf{r}) + \sigma_a(\mathbf{r})$ и $B[T(\mathbf{r})]$ – функция Планка при температуре $T(\mathbf{r})$. Функция $f(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}'\cdot\mathbf{\Omega})$ описывает перераспределение по углу, связанное с процессом рассеяния, и имеет нормировку

$$\int_{4\pi} d\mathbf{\Omega} f(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}'\cdot\mathbf{\Omega}) = 2\pi \int_{-1}^{1} d\xi f(\mathbf{r}, \xi) = 1. \tag{4}$$

Физически уравнения (1) – (4) определяют стационарный перенос излучения в изотропной среде, которая предполагается находящейся в термодинамическом равновесии и в которой рассеяние фотонов считается консервативным (фотон не изменяет частоты при рассеянии). Таким образом, уравнение (1) представляет монохроматическое уравнение переноса для произвольной частоты ν. Для удобства данная переменная не указывается, а входит в уравнение

(1) в качестве параметра. Далее в тексте, также для удобства, будем опускать пространственную переменную **r** в списке аргументов всех функций.

Трудность прямого использования уравнения (1) в полях разорванной облачности заключается в двух моментах. Во-первых, размер любого отдельного облака в общем случае много меньше, чем размер решетки при типичном численном моделировании в модели общей циркуляции. Таким образом возникает проблема подсеточного моделирования. Во-вторых, положение и геометрия каждого отдельного облака неизвестны в обычном, детерминистическом, смысле. Следовательно, уравнение (1) является стохастическим уравнением переноса, а четыре входящие в него характеристики, определяющие перенос излучения в атмосфере, σ', σ_s', f и S – являются случайными полями. Если рассматривать поле разорванной облачности как стохастическую смесь двух несмешиваемых компонент – облаков и ясного неба, то эти характеристики являются дискретными случайными полями с двумя состояниями. В таком случае интенсивность радиации I является (непрерывным) случайным полем, а основной интересующей нас величиной является средняя по ансамблю интенсивность $\langle I \rangle$.

Способы исследования проблемы облачно-радиационного взаимодействия в рамках статистического формализма предлагались рядом авторов, в том числе Титовым [4], Стивенсом и др. [3], Малваджи и др. [5], Малваджи и Помранингом [6]. В частности, была предложена одна относительно простая модель для расчета $\langle I \rangle$ [7]. Эта модель, основанная на марковской смеси двух атмосферных компонент (облаков и ясного неба), представляет собой систему двух дифференциальных уравнений переноса излучения. В интегральной формулировке эта модель была предложена Титовым [4]. Являясь относительно простой, модель эта все еще сложна для расчетов. Она содержит систему двух уравнений, которые необходимо решить совместно для нахождения средней по ансамблю интенсивности $\langle I \rangle$.

В данной статье мы покажем, что в некоторых случаях эта система из двух уравнений может быть сведена к одному ренормированному уравнению переноса излучения, имеющему обычную форму (1), но содержащему эффективные, детерминированные характеристики атмосферы $\sigma'_{эф}$, $L_{эф}$ и $S_{эф}$. Эти эффективные параметры учитывают свойства каждой атмосферной компоненты (облаков и ясного неба) в каждой пространственной точке **r**, а также статистику этой двухкомпонентной смеси (информацию о размере облаков и расстояниях между ними). Предполагается, что характеристики каждой компоненты этой бинарной смеси могут иметь произвольные пространственные зависимости, а статистика смеси может быть неоднородной (зависеть от пространственной координаты) и анизотропной (зависеть от направления).

Два случая, при которых возможна ренормировка, соответствуют двум различным асимптотическим пределам:

1) пределу высокой прозрачности и

2) пределу маленького радиуса корреляции.

В первом случае мы предполагаем небольшое количество относительно непрозрачного материала (все сечения большие), смешанного с большим количеством относительно прозрачного материала (все сечения маленькие). Во втором случае мы имеем дело с проблемой маленького радиуса корреляции, предполагающей небольшие облака и (или) небольшие расстояния между ними, измеряемые в средних длинах свободного пробега фотонов. В марковскую модель из двух уравнений вводится соответствующее изменение масштаба (скейлинг), отражающее каждую из этих двух физических ситуаций, а затем применение асимптотических разложений приводит к одному ренормированному уравнению переноса в каждом случае.

Во второй части данной статьи обсуждается модель с системой двух уравнений для $\langle I \rangle$, которая является начальным пунктом нашего ренормализационного анализа. Как уже отмечалось, для всех величин предполагаются произвольные пространственные зависимости, и допускается, что статистика может зависеть от направления. В этой же части вводится транспортное приближение, позволяющее избавиться от анизотропного рассеяния в уравнении (1). Также обсуждается детерминистская модель из двух уравнений, получающаяся для этого упрощенного стохастического уравнения переноса с изотропным рассеянием. В третьей части развивается асимптотический формализм, связанный с пределом приблизительной прозрачности, и в четвертой рассматривается аналогичный подход в пределе маленького корреляционного радиуса. Некоторые заключительные замечания приводятся в последней части статьи.

2. Стохастическая модель

Средняя по ансамблю интенсивность радиации в стохастической смеси из двух компонент, обозначаемых индексами 0 и 1, записывается просто:

$$\langle I(\mathbf{\Omega})\rangle = p_0\, I_0(\mathbf{\Omega}) + p_1\, I_1(\mathbf{\Omega}). \tag{5}$$

Здесь p_i – вероятность того, что материал i находится в пространственной точке $\mathbf{r}$, и $I_i(\mathbf{\Omega})$ – условная средняя по ансамблю интенсивность при условии, что материал i находится в пространственной точке $\mathbf{r}$. Простая модель для I_i в случае марковской смеси была получена рядом авторов в одной форме, но с помощью различных средств. Последние включают уравнение Лиувилля [8], замыкание стохастического уравнения баланса [9], шумовые методы переноса нейтронов [10] и предположение о независимости длин пробега [11]. Предположение марковской смеси выражается уравнением

$$\mathrm{Prob}(i \to j) = ds/\lambda_i(s),\ \ j \neq i. \tag{6}$$

Смысл данного уравнения состоит в том, что при движении фотона в бинарной смеси в направлении $\mathbf{\Omega}$ (s – пространственная координата в этом направлении) вероятность Prob $(i \to j)$ перехода из материала i в материал j при условии, что материал i присутствует в точке s, на расстоянии ds пропорциональна ds, причем коэффициент пропорциональности является обратной величиной к марковской длине перехода $\lambda_i(s)$. В общем случае λ_i зависят как от $\mathbf{r}$, так и от $\mathbf{\Omega}$, а $p_i(\mathbf{r})$ и $\lambda_i(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$ связаны уравнениями Чэпмена–Колмогорова, записанными в форме вперед [7]:

$$\frac{dp_i}{ds} = \frac{p_j}{\lambda_j} - \frac{p_i}{\lambda_i},\ j \neq i. \tag{7}$$

Физически реализуемая зависимость λ_i от $\mathbf{\Omega}$ должна быть такой, чтобы p_i не зависели от $\mathbf{\Omega}$. В случае однородной статистики λ_i зависят только от $\mathbf{\Omega}$. В этом случае $\lambda_i(\mathbf{\Omega})$ является средней длиной хорды материала i в направлении $\mathbf{\Omega}$ и из уравнения (7) следует

$$p_i = \frac{\lambda_i(\mathbf{\Omega})}{\lambda_0(\mathbf{\Omega}) + \lambda_1(\mathbf{\Omega})}. \tag{8}$$

В этом случае распределение длин хорд в каждом материале является классическим пуассоновским распределением в каждом направлении $\mathbf{\Omega}$, а именно экспоненциальным со средним $\lambda_i(\mathbf{\Omega})$. Если λ_i не зависят от $\mathbf{\Omega}$, статистика считается изотропной. Однако для полей разорванной облачности важно сохранить зависимость λ_i от $\mathbf{\Omega}$, так как облака в общем случае имеют различные средние длины хорд в различных направлениях. Наш подход допускает произвольную зависимость λ_i от $\mathbf{\Omega}$.

Два связанных уравнения относительно I_i, предложенные в качестве приемлемой модели для описания переноса излучения в бинарной марковской смеси, имеют вид [7–11]

$$(\mathbf{\Omega}\nabla + \sigma_i')p_i I_i(\mathbf{\Omega}) = L_i p_i I_i(\mathbf{\Omega}) + p_i S_i + \frac{p_j I_j(\mathbf{\Omega})}{\lambda_j(\mathbf{\Omega})} - \frac{p_i I_i(\mathbf{\Omega})}{\lambda_i(\mathbf{\Omega})},\ \ j \neq i. \tag{9}$$

Здесь индекс i у σ', L и S указывает на то, что эти величины относятся к i-му материалу, и в нашем случае бинарной смеси он принимает значения $i = 0{,}1$. Эти уравнения точны для чисто поглощающей смеси [12] и достаточно точны и очень наглядны при наличии рассеяния [9, 13]. В интегральной форме они были представлены Титовым [4]. Можно переписать эти два уравнения в эквивалентной форме, заменяя зависимые переменные с I_0 и I_1 на $\langle I\rangle$ и χ согласно

$$\langle I\rangle = p_0 I_0 + p_1 I_1; \tag{10}$$

$$\chi = \sqrt{p_0\, p_1}(I_0 - I_1). \tag{11}$$

Далее с помощью уравнения (7) эти два уравнения приводятся к виду

$$[\Omega\nabla + \langle\sigma'\rangle]\langle I(\Omega)\rangle + \nu'\chi(\Omega) = \langle S\rangle + \langle L\rangle\langle I(\Omega)\rangle + K\chi(\Omega); \tag{12}$$

$$[\Omega\nabla + \hat{\sigma}'(\Omega)]\chi(\Omega) + \nu'\langle I(\Omega)\rangle = T + J\chi(\Omega) + K\langle I(\Omega)\rangle. \tag{13}$$

Здесь были введены следующие параметры:

$$\langle\sigma'\rangle = p_0\,\sigma'_0 + p_1\,\sigma'_1; \tag{14}$$

$$\hat{\sigma}'(\Omega) = p_0\,\sigma'_1 + p_1\,\sigma'_0 + \frac{1}{\lambda_c(\Omega)}; \tag{15}$$

$$\nu' = \sqrt{p_0\,p_1}(\sigma'_0 - \sigma'_1); \tag{16}$$

$$\langle S\rangle = p_0\,S_0 + p_1\,S_1; \tag{17}$$

$$T = \sqrt{p_0\,p_1}(S_0 - S_1) \tag{18}$$

и операторы

$$\langle L\rangle = p_0\,L_0 + p_1\,L_1; \tag{19}$$

$$J = p_0\,L_1 + p_1\,L_0; \tag{20}$$

$$K = \sqrt{p_0\,p_1}(L_0 - L_1). \tag{21}$$

Величина $\lambda_c(\Omega)$ в уравнении (15) является корреляционным радиусом для этой марковской статистики и определяется как [7]

$$\frac{2}{\lambda_c(\Omega)} = \frac{1}{p_1\,\lambda_0(\Omega)} + \frac{1}{p_0\,\lambda_1(\Omega)}. \tag{22}$$

В расчетах переноса излучения часто используется упрощенное уравнение переноса, предполагающее изотропное рассеяние. Это делается путем замены уравнения (1), описывающего обычное анизотропное рассеяние, на эквивалентное (в смысле, который необходимо коротко пояснить) уравнение с изотропным рассеянием. Это уравнение имеет вид [14, 15]

$$\Omega\nabla I(\Omega) + \sigma I(\Omega) = \frac{\sigma_s}{4\pi}\int_{4\pi} d\Omega' I(\Omega') + S, \tag{23}$$

где

$$\sigma_s = \sigma'_s(1 - \bar{\mu}), \quad \sigma = \sigma_s + \sigma_a. \tag{24}$$

Здесь $\bar{\mu}$ – средний косинус угла рассеяния (фактор асимметрии), определяемый формулой

$$\bar{\mu} = 2\pi\int_{-1}^{1} d\mu\mu f(\mu). \tag{25}$$

Уравнения (1) и (23) эквивалентны в том смысле, что оба они приводят к одному и тому же классическому уравнению диффузии относительно E, определяемой как

$$E = \int_{4\pi} d\Omega I(\Omega). \tag{26}$$

Эта величина E является простым произведением скорости света на энергетическую плотность радиации (в единичном частотном интервале). Обычное уравнение диффузии для E имеет вид [14, 15]

$$-\nabla(1/3\sigma)\nabla E + \sigma_a E = 4\pi S. \tag{27}$$

Если уравнение (23) интерпретируется как стохастическое уравнение, описывающее перенос излучения в бинарной марковской смеси, тогда соответствующие модельные уравнения для $I_i(\mathbf{\Omega})$ имеют вид

$$(\mathbf{\Omega}\nabla + \sigma_i)p_i I_i(\mathbf{\Omega}) = \frac{\sigma_{si}}{4\pi}\int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}' p_i I_i(\mathbf{\Omega}') + p_i S_i + \frac{p_j I_j(\mathbf{\Omega})}{\lambda_j(\mathbf{\Omega})} - \frac{p_i I_i(\mathbf{\Omega})}{\lambda_i(\mathbf{\Omega})},\ j\neq i. \tag{28}$$

Замена переменных согласно уравнениям (10) и (11) позволяет записать эквивалентные уравнения в форме

$$[\mathbf{\Omega}\nabla + \langle\sigma\rangle]\langle I(\mathbf{\Omega})\rangle + \nu\chi(\mathbf{\Omega}) = \langle S\rangle + \frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}'[\langle\sigma_s\rangle\langle I(\mathbf{\Omega}')\rangle + \nu_s\,\chi(\mathbf{\Omega}')]; \tag{29}$$

$$[\mathbf{\Omega}\nabla + \hat{\sigma}(\mathbf{\Omega})]\chi(\mathbf{\Omega}) + \nu\langle I(\mathbf{\Omega})\rangle = T + \frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}'[\hat{\sigma}_s\chi(\mathbf{\Omega}') + \nu_s\,\langle I(\mathbf{\Omega}')\rangle]. \tag{30}$$

Здесь $\langle S\rangle$ и T определяются уравнениями (17) и (18), и дополнительно введены параметры

$$\langle\sigma\rangle = p_0\,\sigma_0 + p_1\,\sigma_1; \tag{31}$$

$$\hat{\sigma}(\mathbf{\Omega}) = p_0\,\sigma_1 + p_1\,\sigma_0 + 1/[\lambda_c(\mathbf{\Omega})]; \tag{32}$$

$$\nu = \sqrt{p_0\,p_1}(\sigma_0 - \sigma_1); \tag{33}$$

$$\langle\sigma_s\rangle = p_0\,\sigma_{s0} + p_1\,\sigma_{s1}; \tag{34}$$

$$\hat{\sigma}_s = p_0\,\sigma_{s1} + p_1\,\sigma_{s0}; \tag{35}$$

$$\nu_s = \sqrt{p_0\,p_1}(\sigma_{s0} - \sigma_{s1}). \tag{36}$$

В третьей и четвертой частях статьи рассматриваются два упомянутых выше асимптотических предела, используя в качестве начальной точки анализа как уравнения (12), (13), так и уравнения (29), (30). Предел высокой прозрачности рассматривается в третьей части, а предел маленького радиуса корреляции – в четвертой. В случае использования уравнений (12) и (13) в обоих предельных случаях ренормированное уравнение переноса для $\langle I\rangle$ приобретает вид

$$\mathbf{\Omega}\nabla\langle I(\mathbf{\Omega})\rangle + \sigma'_{эф}(\mathbf{\Omega})\langle I(\mathbf{\Omega})\rangle = L_{эф}\langle I(\mathbf{\Omega})\rangle + S_{эф}(\mathbf{\Omega}) \tag{37}$$

с различными эффективными параметрами для каждого из этих двух асимптотических пределов. Аналогично, используя в качестве основы для анализа уравнения (29) и (30), нормированное уравнение переноса записывается в форме

$$\mathbf{\Omega}\nabla\langle I(\mathbf{\Omega})\rangle + \sigma_{эф}(\mathbf{\Omega})\langle I(\mathbf{\Omega})\rangle = \frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}'\sigma_{s,\,эф}(\mathbf{\Omega}', \mathbf{\Omega})\langle I(\mathbf{\Omega}')\rangle + S_{эф}(\mathbf{\Omega}). \tag{38}$$

В каждом асимптотическом пределе мы получаем явные и относительно простые выражения для $\sigma'_{эф}$, $L_{эф}$, $S_{эф}$, $\sigma_{эф}$ и $\sigma_{s,эф}$. Таким образом, результатом анализа являются эффективные характеристики, которые учитывают статистический характер задачи и которые в дальнейшем будут использоваться в классическом детерминированном уравнении переноса. Сложность состоит в появлении аргумента $\mathbf{\Omega}$ в различных частях уравнений (37) и (38) и, следовательно, в появлении угловой зависимости этих эффективных характеристик, не имеющей места в соответствующих характеристиках каждой компоненты смеси. Эти угловые зависимости возникают из-за угловых зависимостей марковских длин перехода $\lambda_i(\mathbf{\Omega})$. В случае изотропной статистики (λ_i не зависят от $\mathbf{\Omega}$) мы увидим, что эти необычные угловые зависимости исчезают. Однако в контексте полей разорванной облачности угловая зависисмость $\lambda_i(\mathbf{\Omega})$ является необходимой для того, чтобы учесть зависимость средней длины облачных хорд от направления.

Наконец, необходимо отметить, что рассматриваемые здесь модели из двух уравнений, а именно уравнений (12), (13) и (29), (30), строго применимы лишь к марковской статистике, определяемой уравнением (6). Было сделано предположение, однако, что эти модели могут быть применены для некоторого класса немарковской статистики путем модификации корреляционной длины $\lambda_c(\mathbf{\Omega})$, определяемой в уравнениях (15) и (32) [16]. Этот класс статистики называется обновленной (renewal) статистикой, которая определяется распределением длин хорд. Обозначим через $g_i(\tau)$ распределение длин хорд τ (в направлении $\mathbf{\Omega}$) в материале i и введем величину

$$G_i(\tau) = \int_\tau^\infty d\tau' g_i(\tau'), \tag{39}$$

которая есть не что иное, как вероятность того, что длина хорды в материале i будет больше, чем τ. Далее введем

$$\widetilde{G}_i(\sigma_i) = \int_\tau^\infty d\tau e^{-\sigma_i \tau} G_i(\tau), \tag{40}$$

т.е. произведем преобразование Лапласа для $G_i(\tau)$. Используя $\widetilde{G}_i$, получим величину

$$q = \frac{1}{\sigma_0}\left[\frac{1}{\widetilde{G}_0(\sigma_0)} - \frac{1}{\lambda_0}\right] + \frac{1}{\sigma_1}\left[\frac{1}{\widetilde{G}(\sigma_1)} - \frac{1}{\lambda_1}\right] - 1. \tag{41}$$

Как показано в работе Левермора и др. [16], марковские модели на основе двух уравнений: (12), (13) или (29), (30) – будут приемлемыми для немарковской обновленной статистики, определяемой распределением $g_i(\tau)$, если в них сделана замена

$$\lambda_c \to q\lambda_c. \tag{42}$$

Для (однородной) марковской статистики имеем [7]

$$g_i(\tau) = \frac{1}{\lambda_i} e^{-\tau/\lambda_i}, \tag{43}$$

откуда

$$G_i(\tau) = e^{-\tau/\lambda_i} \tag{44}$$

и

$$\widetilde{G}_i(\sigma_i) = \lambda_i/(1 + \sigma_i \lambda_i). \tag{45}$$

В этом случае согласно уравнению (41) $q = 1$, и от данной общей немарковской модели, как и подобает, вновь возвращаемся к марковской. Для неоднородной обновленной статистики, т.е. в том случае, когда $g_i(\tau)$ зависят от пространственной координаты, фактор коррекции q также зависит от положения в пространстве, но концептуально это не должно вызывать затруднений. Это лишь приводит к дополнительной пространственной зависимости λ_c, для которой и без того предполагается произвольная зависимость от пространственных координат.

3. Предел высокой прозрачности

В качестве начальной точки возьмем описание в форме двух уравнений, (29) и (30), которые получены в транспортном приближении. Пусть один материал, скажем материал 0, имеется в небольшом количестве ($p_0 \ll 1$) и относительно непрозрачен, т.е. σ_{s0} и σ_{a0} – большие по сравнению с σ_{s1} и σ_{a1}. Количественно определим это путем следующего изменения масштаба (скейлинга):

$$p_0 \to \varepsilon^2 p_0, \quad \sigma_{s0} \to \sigma_{s0}/\varepsilon^2, \quad \sigma_{a0} = \sigma_{a0}/\varepsilon^2, \tag{46}$$

где ε – формальный параметр малости, который в конце будет взят за единицу. Соответствующие значения для материала 1 считаются $O(1)$. Согласно этому скейлингу из уравнения (7) мы находим, что λ_0 пропорциональна ε^2, а из уравнений (3) и (24) мы заключаем, что S_0 и σ_0 пропорциональны $1/\varepsilon^2$. Величины λ_1, S_1 и σ_1 имеют порядок $O(1)$. Наконец, в результате указанного пересчета величины $\langle S\rangle$, $\langle\sigma_s\rangle$ и $\langle\sigma\rangle$ имеют порядок $O(1)$; λ_c пропорциональна ε^2; T, ν_s и ν пропорциональны $1/\varepsilon$, и $\hat{\sigma}_s$ и $\hat{\sigma}$ пропорциональны $1/\varepsilon^2$. Произведя учет указанных преобразований в уравнениях (29) и (30), получаем

$$[\mathbf{\Omega}\nabla + \langle\sigma\rangle]\langle I(\mathbf{\Omega})\rangle + \frac{\nu}{\varepsilon}\chi(\mathbf{\Omega}) = \langle S\rangle + \frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}'\left[\langle\sigma_s\rangle\langle I(\mathbf{\Omega}')\rangle + \frac{\nu_s}{\varepsilon}\chi(\mathbf{\Omega}')\right]; \tag{47}$$

$$\left[\mathbf{\Omega}\nabla + \frac{\hat{\sigma}(\mathbf{\Omega})}{\varepsilon^2}\right]\chi(\mathbf{\Omega}) + \frac{\nu}{\varepsilon}\langle I(\mathbf{\Omega})\rangle = \frac{T}{\varepsilon} + \frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}'\left[\frac{\hat{\sigma}_s}{\varepsilon^2}\chi(\mathbf{\Omega}') + \frac{\nu_s}{\varepsilon}\langle I(\mathbf{\Omega}')\rangle\right]. \tag{48}$$

Устремив в этих уравнениях ε к нулю, получаем модель небольшого количества непрозрачного материала, смешанного с большим количеством относительно прозрачного материала. Таким образом, стохастическая смесь будет приблизительно прозрачна с большими и многочисленными окнами пропускания между разреженными кусками непрозрачного материала.

Введем асимптотические разложения вида

$$\langle I(\mathbf{\Omega})\rangle \sim \sum_{n=0} \varepsilon^n \langle I^{(n)}(\mathbf{\Omega})\rangle; \tag{49}$$

$$\chi(\mathbf{\Omega}) \sim \sum_{n=0} \varepsilon^n \chi^{(n)}(\mathbf{\Omega}). \tag{50}$$

Подставим разложения (49) и (50) в (47) и (48) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε. Это дает бесконечную серию уравнений. Первые три подобных уравнения, получаемые из (47), имеют вид

$$\nu\chi^{(0)}(\mathbf{\Omega}) = \frac{\nu_s}{4\pi}\int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}'\chi^{(0)}(\mathbf{\Omega}'); \tag{51}$$

$$[\mathbf{\Omega}\nabla + \langle\sigma\rangle]\langle I^{(0)}(\mathbf{\Omega})\rangle + \nu\chi^{(1)}(\mathbf{\Omega}) = \langle S\rangle + \frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}'\left[\langle\sigma_s\rangle\langle I^{(0)}(\mathbf{\Omega}')\rangle + \nu_s\chi^{(1)}(\mathbf{\Omega}')\right]; \tag{52}$$

$$[\mathbf{\Omega}\nabla + \langle\sigma\rangle]\langle I^{(1)}(\mathbf{\Omega})\rangle + \nu\chi^{(2)}(\mathbf{\Omega}) = \frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}'\left[\langle\sigma_s\rangle\langle I^{(1)}(\mathbf{\Omega}')\rangle + \nu_s\chi^{(2)}(\mathbf{\Omega}')\right] \tag{53}$$

и первые три уравнения из (48)

$$\hat{\sigma}(\mathbf{\Omega})\chi^{(0)}(\mathbf{\Omega}) = \frac{\hat{\sigma}_s}{4\pi}\int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}'\chi^{(0)}(\mathbf{\Omega}'); \tag{54}$$

$$\hat{\sigma}(\mathbf{\Omega})\chi^{(1)}(\mathbf{\Omega}) + \nu\langle I^{(0)}(\mathbf{\Omega})\rangle = T + \frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}'\left[\hat{\sigma}_s\chi^{(1)}(\mathbf{\Omega}') + \nu_s\langle I^{(0)}(\mathbf{\Omega}')\rangle\right]; \tag{55}$$

$$\mathbf{\Omega}\nabla\chi^{(0)}(\mathbf{\Omega}) + \hat{\sigma}(\mathbf{\Omega})\chi^{(2)}(\mathbf{\Omega}) + \nu\langle I^{(1)}(\mathbf{\Omega})\rangle = \frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}'\left[\hat{\sigma}_s\chi^{(2)}(\mathbf{\Omega}') + \nu_s\langle I^{(1)}(\mathbf{\Omega}')\rangle\right]. \tag{56}$$

Из уравнений (51) и (54) непосредственно следует, что

$$\chi^{(0)}(\mathbf{\Omega}) = 0. \tag{57}$$

Затем умножаем уравнение (53) на ε и складываем результат с (52). Используя равенство [см. уравнение (49)]

$$\langle I(\mathbf{\Omega})\rangle = \langle I^{(0)}(\mathbf{\Omega})\rangle + \varepsilon\langle I^{(1)}(\mathbf{\Omega})\rangle + O(\varepsilon^2), \tag{58}$$

получаем

$$\mathbf{\Omega}\nabla\langle I(\mathbf{\Omega})\rangle + \langle\sigma\rangle\langle I(\mathbf{\Omega})\rangle + \nu\psi(\mathbf{\Omega}) = \langle S\rangle + \frac{\langle\sigma_s\rangle}{4\pi}\int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}'\langle I(\mathbf{\Omega}')\rangle + \frac{\nu_s\eta}{4\pi} + O(\varepsilon^2), \tag{59}$$

где мы ввели

$$\psi(\mathbf{\Omega}) = \chi^{(1)}(\mathbf{\Omega}) + \varepsilon\chi^{(2)}(\mathbf{\Omega}); \tag{60}$$

$$\eta = \int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}\psi(\mathbf{\Omega}). \tag{61}$$

Аналогично, умножая уравнение (56) на ε и складывая результат с (55), получаем

$$\hat\sigma(\mathbf{\Omega})\psi(\mathbf{\Omega}) + \nu\langle I(\mathbf{\Omega})\rangle = T + \frac{\nu_s}{4\pi}\int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}'\langle I(\mathbf{\Omega}')\rangle + \frac{\hat\sigma_s}{4\pi}\eta + O(\varepsilon^2). \tag{62}$$

Наша задача – решить уравнение (62) относительно $\psi(\mathbf{\Omega})$ и η и подставить эти решения в уравнение (59).

С этой целью разделим уравнение (62) на $\hat\sigma(\mathbf{\Omega})$ и проинтегрируем по телесному углу. Решив полученное уравнение относительно η, получим

$$\eta = \frac{4\pi T}{\hat\sigma - \hat\sigma_s} - \left(\frac{1}{\bar\sigma - \hat\sigma_s}\right)\int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}'\left[\nu\frac{\bar\sigma}{\hat\sigma(\mathbf{\Omega}')} - \nu_s\right]\langle I(\mathbf{\Omega}')\rangle + O(\varepsilon^2), \tag{63}$$

где

$$\frac{1}{\bar\sigma} = \frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}\frac{1}{\hat\sigma(\mathbf{\Omega})}. \tag{64}$$

Подставив уравнение (63) для η обратно в (62), для $\psi(\mathbf{\Omega})$ получаем

$$\psi(\mathbf{\Omega}) = \frac{\bar\sigma T}{(\bar\sigma - \hat\sigma_s)\hat\sigma(\mathbf{\Omega})} - \frac{\nu\langle I(\mathbf{\Omega})\rangle}{\hat\sigma(\mathbf{\Omega})} - \frac{\bar\sigma}{4\pi(\bar\sigma - \hat\sigma_s)\,\hat\sigma(\mathbf{\Omega})}\int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}'\left[\frac{\hat\sigma_s\nu}{\hat\sigma(\mathbf{\Omega}')} - \nu_s\right]\langle I(\mathbf{\Omega}')\rangle. \tag{65}$$

Окончательно, подставив уравнения (63) и (65) вместо η и $\psi(\mathbf{\Omega})$ в (59), получаем ренормированное уравнение для средней по ансамблю интенсивности радиации. Оно может быть записано в форме

$$\mathbf{\Omega}\nabla\langle I(\mathbf{\Omega})\rangle + \sigma_{эф}(\mathbf{\Omega})\langle I(\mathbf{\Omega})\rangle = S_{эф}(\mathbf{\Omega}) + \frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}'\sigma_{s,эф}(\mathbf{\Omega}', \mathbf{\Omega})\langle I(\mathbf{\Omega}')\rangle + O(\varepsilon^2), \tag{66}$$

где введены эффективные характеристики в виде

$$\sigma_{эф}(\mathbf{\Omega}) = \langle\sigma\rangle - \nu^2/\hat{\sigma}(\mathbf{\Omega}) \geq 0; \tag{67}$$

$$\sigma_{s,эф}(\mathbf{\Omega}', \mathbf{\Omega}) = \langle\sigma_s\rangle - \left(\frac{1}{\bar{\sigma} - \hat{\sigma}_s}\right)\left[\nu_s\nu\bar{\sigma}\left(\frac{1}{\hat{\sigma}(\mathbf{\Omega}')} + \frac{1}{\hat{\sigma}(\mathbf{\Omega})}\right) - \frac{\nu^2\bar{\sigma}\,\hat{\sigma}_s}{\hat{\sigma}(\mathbf{\Omega}')\hat{\sigma}(\mathbf{\Omega})} - \nu_s^2\right] \geq 0; \tag{68}$$

$$S_{эф}(\mathbf{\Omega}) = \langle S\rangle - \left(\frac{1}{\bar{\sigma} - \hat{\sigma}_s}\right)\left[\frac{\bar{\sigma}}{\hat{\sigma}(\mathbf{\Omega})}\nu - \nu_s\right]T \geq 0. \tag{69}$$

Как следует из неравенств (67)–(69), данные определения эффективных характеристик обладают тем преимуществом, что они всегда дают неотрицательные значения для всех физических (неотрицательных) параметров σ_{si}, σ_{ai}, S_i и $\lambda_i(\mathbf{\Omega})$, даже вне рассматриваемого асимптотического предела.

Как видно из уравнения (66), $\langle I(\mathbf{\Omega})\rangle$ в пределе высокой прозрачности описывается одним детерминированным уравнением переноса, хотя и необычного вида, с эффективными характеристиками, зависящими от направления. Эти угловые зависимости имеют место только из-за угловой зависимости радиуса корреляции $\lambda_c(\mathbf{\Omega})$, которая в свою очередь возникает из угловых зависимостей марковских длин перехода $\lambda_i(\mathbf{\Omega})$. В случае изотропной статистики λ_i по определению не зависят от $\mathbf{\Omega}$ и, следовательно, $\hat{\sigma}$ также не зависит от $\mathbf{\Omega}$ [см. уравнение (32)]. Также в этом случае $\bar{\sigma} = \hat{\sigma}$ [см. уравнение (64)], вследствие чего уравнения (67)–(69) лишаются угловой зависимости и приобретают форму

$$\sigma_{эф} = \langle\sigma\rangle - \nu^2/\hat{\sigma}\ ; \tag{70}$$

$$\sigma_{s,эф} = \langle\sigma_s\rangle - \left[\frac{\nu^2}{\hat{\sigma}} - \frac{(\nu - \nu_s)^2}{(\hat{\sigma} - \hat{\sigma}_s)}\right]; \tag{71}$$

$$S_{эф} = \langle S\rangle - \left[\frac{(\nu - \nu_s)}{(\hat{\sigma} - \hat{\sigma}_s)}\right]T, \tag{72}$$

что согласуется с более ранними результатами, полученными Малваджи и др. [17]. Также необходимо отметить, что в пределе бесконечно маленького корреляционного радиуса, т.е., при $\lambda_c \to 0$, мы имеем $\hat{\sigma} \to \infty$ и, следовательно, $\bar{\sigma} \to \infty$. Таким образом, при $\lambda_c \to 0$ уравнения (67)–(69), а также (70)–(72) сводятся к следующим равенствам:

$$\sigma_{эф} = \langle\sigma\rangle, \quad \sigma_{s,эф} = \langle\sigma_s\rangle, \quad S_{эф} = \langle S\rangle. \tag{73}$$

Таким образом, в пределе $\lambda_c \to 0$ в высоко прозрачной атмосфере приходим к модели атомарной смеси. Это физически правильный результат, так как $\lambda_{c,}$ стремящийся к нулю, предполагает, что одна из λ_i или обе стремятся к нулю, а это является условием применимости модели атомарной смеси для описания стохастической задачи.

Если транспортное приближение, которое, в частности, было применено при замене уравнения (1) на уравнение (23), использовать только для статистической коррекции атомарной смеси, ренормированное уравнение переноса примет вид

$$\mathbf{\Omega}\nabla\langle I(\mathbf{\Omega})\rangle + \sigma'_{эф}(\mathbf{\Omega})\langle I(\mathbf{\Omega})\rangle = L_{эф}\, I(\mathbf{\Omega}) + S_{эф}(\mathbf{\Omega}) + O(\varepsilon^2), \tag{74}$$

в котором $S_{эф}(\mathbf{\Omega})$ по-прежнему определяется уравнением (69) и

$$\sigma'_{эф}(\mathbf{\Omega}) = \sigma_{эф}(\mathbf{\Omega}) + \langle\sigma'_s\,\bar{\mu}\rangle; \tag{75}$$

$$L_{эф}\langle I(\mathbf{\Omega})\rangle = \int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}'\sigma'_{s,эф}(\mathbf{\Omega}' \to \mathbf{\Omega})\langle I(\mathbf{\Omega}')\rangle, \tag{76}$$

где

$$\sigma'_{s,\text{эф}}(\mathbf{\Omega}'\to\mathbf{\Omega}) = \frac{1}{4\pi}\,\sigma_{s,\text{эф}}(\mathbf{\Omega}',\mathbf{\Omega}) + \left\langle \sigma'_s f(\mathbf{\Omega}',\mathbf{\Omega}) - \frac{\sigma_s}{4\pi}\right\rangle. \tag{77}$$

В пределе $\lambda_c \to 0$ уравнение (74) вместе с определениями, вводимыми уравнениями (69) и (75)–(77), представляет модель атомарной смеси для описания стохастического уравнения (1).

В заключение отметим, что ренормированное уравнение невозможно было бы получить, если бы скейлинг и переход к пределу высокой прозрачности были произведены для стохастической модели, описывающей анизотропное рассеяние с помощью уравнений (12) и (13). В таком случае уравнение для $\psi(\mathbf{\Omega})$ [аналог уравнения (62)] невозможно решить относительно $\langle I(\mathbf{\Omega})\rangle$ в какой-либо простой замкнутой форме. Другими словами, аналог уравнения (65) не может быть получен иначе, как с помощью абстрактного анализа с использованием обратного оператора рассеяния. Это не позволяет построить явное ренормированное уравнение.

В следующей части рассмотрим второй асимптотический предел, т.е. предел маленького радиуса корреляции. В отличие от только что рассмотренного предела высокой прозрачности в пределе маленького радиуса корреляции возможно получить явное ренормированное уравнение переноса как с помощью уравнений (12), (13), так и (29), (30).

4. Предел маленького радиуса корреляции

Вновь начнем рассмотрение с уравнений (29) и (30), описывающих изотропное рассеяние. Предположим, что радиус корреляции $\lambda_c(\mathbf{\Omega})$ мал по сравнению со средней длиной свободного пробега фотонов в каждой из компонент (облачной и безоблачной) атмосферы. Выразим эту малость с помощью скейлинга

$$\lambda_c(\mathbf{\Omega}) \to \varepsilon\lambda_c(\mathbf{\Omega}), \tag{78}$$

где вновь ε – формальный параметр малости. Из уравнений (17), (18) и (31) – (36) мы заключаем, что $\hat{\sigma}(\mathbf{\Omega})$ пропорционален $1/\varepsilon$, а все остальные параметры, определяемые этими уравнениями, имеют порядок O(1).

Таким образом, уравнения (29) и (30) эквивалентны

$$[\mathbf{\Omega}\nabla + \langle\sigma\rangle]\langle I(\mathbf{\Omega})\rangle + \nu\chi(\mathbf{\Omega}) = \langle S\rangle + \frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}'\big[\langle\sigma_s\rangle\langle I(\mathbf{\Omega}')\rangle + \nu_s\chi(\mathbf{\Omega}')\big]; \tag{79}$$

$$\left[\mathbf{\Omega}\nabla + \frac{\hat{\sigma}(\mathbf{\Omega})}{\varepsilon}\right]\chi(\mathbf{\Omega}) + \nu\langle I(\mathbf{\Omega})\rangle = T + \frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}'\big[\hat{\sigma}_s\chi(\mathbf{\Omega}') + \nu_s\langle I(\mathbf{\Omega}')\rangle\big]. \tag{80}$$

При ε, стремящемся к нулю, эти два уравнения представляют модель для бинарной стохастической смеси с бесконечно малым радиусом корреляции, а это, в свою очередь, предполагает, что один из $\lambda_i(\mathbf{\Omega})$ или оба также стремятся к нулю.

Подставим в уравнения (79) и (80) асимптотические разложения, задаваемые формулами (49) и (50), и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε. Два первых уравнения, полученных таким образом из (79), имеют вид

$$[\mathbf{\Omega}\nabla + \langle\sigma\rangle]\langle I^{(0)}(\mathbf{\Omega})\rangle + \nu\chi^{(0)}(\mathbf{\Omega}) = \langle S\rangle + \frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}'\big[\langle\sigma_s\rangle\langle I^{(0)}(\mathbf{\Omega}')\rangle + \nu_s\chi^{(0)}(\mathbf{\Omega}')\big]; \tag{81}$$

$$[\mathbf{\Omega}\nabla + \langle\sigma\rangle]\langle I^{(1)}(\mathbf{\Omega})\rangle + \nu\chi^{(1)}(\mathbf{\Omega}) = \frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}'\big[\langle\sigma_s\rangle\langle I^{(1)}(\mathbf{\Omega}')\rangle + \nu_s\chi^{(1)}(\mathbf{\Omega}')\big], \tag{82}$$

а два первых уравнения из (80) – соответственно

$$\hat{\sigma}(\mathbf{\Omega})\chi^{(0)}(\mathbf{\Omega}) = 0, \tag{83}$$

$$\mathbf{\Omega}\nabla\chi^{(0)}(\mathbf{\Omega}) + \hat{\sigma}(\mathbf{\Omega})\chi^{(1)}(\mathbf{\Omega}) + \nu\langle I^{(0)}(\mathbf{\Omega})\rangle = T + \frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}'[\hat{\sigma}_s\chi^{(0)}(\mathbf{\Omega}') + \nu_s\langle I^{(0)}(\mathbf{\Omega}')\rangle]. \quad (84)$$

Так как $\hat{\sigma}(\mathbf{\Omega}) > 0$, из (83) заключаем, что

$$\chi^{(0)}(\mathbf{\Omega}) = 0, \quad (85)$$

и, следовательно, (81) преобразуется как

$$[\mathbf{\Omega}\nabla + \langle\sigma\rangle]\langle I^{(0)}(\mathbf{\Omega})\rangle = \langle S\rangle + \frac{\langle\sigma_s\rangle}{4\pi}\int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}'\langle I^{(0)}(\mathbf{\Omega}')\rangle. \quad (86)$$

Записав уравнение (49) в форме

$$\langle I(\mathbf{\Omega})\rangle = \langle I^{(0)}(\mathbf{\Omega})\rangle + O(\varepsilon) \quad (87)$$

и подставив его в (86), получим

$$\mathbf{\Omega}\nabla\langle I(\mathbf{\Omega})\rangle + \langle\sigma\rangle\langle I(\mathbf{\Omega})\rangle = \langle S\rangle + \frac{\langle\sigma_s\rangle}{4\pi}\int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}'\langle I(\mathbf{\Omega}')\rangle + O(\varepsilon). \quad (88)$$

Из уравнения (88) следует, что с ошибкой порядка $O(\varepsilon)$, т.е. с точностью до $O(\lambda_c)$, надлежащим статистическим описанием для проблемы маленького радиуса корреляции является просто атомарная смесь. Это, конечно, правильный результат, следующий из физических соображений.

Для получения коррекции первого порядка (относительно λ_c) к атомарной смеси необходимо воспользоваться уравнениями (82) и (84). Прежде всего мы умножаем (82) на ε и складываем результат с (81). Используя уравнения (58) и вводя

$$\psi(\mathbf{\Omega}) = \varepsilon\chi^{(1)}(\mathbf{\Omega}), \quad (89)$$

получаем

$$\mathbf{\Omega}\nabla\langle I(\mathbf{\Omega})\rangle + \langle\sigma\rangle\langle I(\mathbf{\Omega})\rangle + \nu\psi(\mathbf{\Omega}) = \langle S\rangle + \frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}'[\langle\sigma_s\rangle\langle I(\mathbf{\Omega}')\rangle + \nu_s\psi(\mathbf{\Omega}')] + O(\varepsilon^2). \quad (90)$$

Умножим уравнение (84) на ε с учетом того, что $\chi^{(0)}(\mathbf{\Omega}) = 0$, и воспользуемся уравнением (89), определяющим $\psi(\mathbf{\Omega})$, и равенством [см. уравнение (49)]

$$\varepsilon\langle I^{(0)}(\mathbf{\Omega})\rangle = \varepsilon\langle I(\mathbf{\Omega})\rangle + O(\varepsilon^2). \quad (91)$$

В результате, приравнивая единице формальный параметр малости ε, получаем

$$\hat{\sigma}(\mathbf{\Omega})\psi(\mathbf{\Omega}) + \nu\langle I(\mathbf{\Omega})\rangle = T + \frac{\nu_s}{4\pi}\int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}'\langle I(\mathbf{\Omega}')\rangle + O(\varepsilon^2). \quad (92)$$

После подстановки $\psi(\mathbf{\Omega})$ из этого уравнения и группировки членов уравнение (90) приобретает вид

$$\mathbf{\Omega}\nabla\langle I(\mathbf{\Omega})\rangle + \left[\langle\sigma\rangle - \frac{\nu^2}{\hat{\sigma}(\mathbf{\Omega})}\right]\langle I(\mathbf{\Omega})\rangle = \langle S\rangle - \left[\frac{\nu}{\hat{\sigma}(\mathbf{\Omega})} - \frac{\nu_s}{\bar{\sigma}}\right]T +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}'\left\{\langle\sigma_s\rangle - \left[\frac{\nu\nu_s}{\hat{\sigma}(\mathbf{\Omega}')} + \frac{\nu\nu_s}{\hat{\sigma}(\mathbf{\Omega})} - \frac{\nu_s^2}{\bar{\sigma}}\right]\right\}\langle I(\mathbf{\Omega}')\rangle + O(\varepsilon^2), \quad (93)$$

где $\bar{\sigma}$ введена ранее в уравнении (64). Иначе это уравнение может быть записано как

$$\mathbf{\Omega}\nabla\langle I(\mathbf{\Omega})\rangle + \sigma_{\text{эф}}(\mathbf{\Omega})\langle I(\mathbf{\Omega})\rangle = S_{\text{эф}}(\mathbf{\Omega}) + \frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}'\sigma_{s,\text{эф}}(\mathbf{\Omega}',\mathbf{\Omega})\langle I(\mathbf{\Omega}')\rangle + O(\varepsilon^2), \quad (94)$$

где нами введены эффективные параметры

$$\sigma_{эф}(\mathbf{\Omega}) = \langle\sigma\rangle - \nu^2/\hat{\sigma}(\mathbf{\Omega}); \tag{95}$$

$$\sigma_{s,эф}(\mathbf{\Omega}', \mathbf{\Omega}) = \langle\sigma_s\rangle - \nu_s\left\{\nu\left[\frac{1}{\hat{\sigma}(\mathbf{\Omega}')} + \frac{1}{\hat{\sigma}(\mathbf{\Omega})}\right] - \frac{\nu_s}{\bar{\sigma}}\right\}; \tag{96}$$

$$S_{эф}(\mathbf{\Omega}) = \langle S\rangle - \left[\frac{\nu}{\hat{\sigma}(\mathbf{\Omega})} - \frac{\nu_s}{\bar{\sigma}}\right]T. \tag{97}$$

Из уравнения (32) мы имеем

$$1/[\hat{\sigma}(\mathbf{\Omega})] = \lambda_c(\mathbf{\Omega}) + O(\lambda_c^2) \tag{98}$$

и согласно (64) получаем

$$1/\bar{\sigma} = \bar{\lambda}_c + O(\lambda_c^2), \tag{99}$$

где

$$\bar{\lambda}_c = \frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}\lambda_c(\mathbf{\Omega}). \tag{100}$$

Так как $O(\lambda_c^2) = O(\varepsilon^2)$, уравнения (95) – (97) могут быть записаны в виде

$$\sigma_{эф}(\mathbf{\Omega}) = \langle\sigma\rangle - \nu^2\lambda_c(\mathbf{\Omega}) + O(\varepsilon^2); \tag{101}$$

$$\sigma_{s,эф}(\mathbf{\Omega}', \mathbf{\Omega}) = \langle\sigma_s\rangle - \nu_s\{\nu[\lambda_c(\mathbf{\Omega}') + \lambda_c(\mathbf{\Omega})] - \nu_s\bar{\lambda}_c\} + O(\varepsilon^2); \tag{102}$$

$$S_{эф}(\mathbf{\Omega}) = \langle S\rangle - [\nu\lambda_c(\mathbf{\Omega}) - \nu_s\bar{\lambda}_c]T + O(\varepsilon^2). \tag{103}$$

Ошибка в уравнениях (101) – (103) имеет тот же порядок $O(\varepsilon^2)$, что и ошибка в ренормированном уравнении переноса (94).

Эти эффективные характеристики могут быть записаны в другой, асимптотически эквивалентной, но более наглядной форме:

$$\sigma_{эф}(\mathbf{\Omega}) = \frac{\langle\sigma\rangle}{1 + \nu^2\lambda_c(\mathbf{\Omega})/\langle\sigma\rangle} + O(\varepsilon^2); \tag{104}$$

$$\sigma_{s,эф}(\mathbf{\Omega}', \mathbf{\Omega}) = \frac{\langle\sigma_s\rangle}{1 + \nu_s\{\nu[\lambda_c(\mathbf{\Omega}') + \lambda_c(\mathbf{\Omega})] - \nu_s\bar{\lambda}_c\}/\langle\sigma_s\rangle} + O(\varepsilon^2); \tag{105}$$

$$S_{эф}(\mathbf{\Omega}) = \frac{\langle S\rangle}{1 + [\nu\lambda_c(\mathbf{\Omega}) - \nu_s\bar{\lambda}]T/\langle S\rangle} + O(\varepsilon^2). \tag{106}$$

Для изотропной статистики, т.е. при λ_c не зависящем от $\mathbf{\Omega}$, уравнения (101) – (103) еще более упрощаются и принимают вид

$$\sigma_{эф} = \langle\sigma\rangle - \nu^2\lambda_c + O(\varepsilon^2); \tag{107}$$

$$\sigma_{s,эф} = \langle\sigma_s\rangle - \nu_s(2\nu - \nu_s)\lambda_c + O(\varepsilon^2); \tag{108}$$

$$S_{эф} = \langle S\rangle - (\nu - \nu_s)\lambda_c + O(\varepsilon^2). \tag{109}$$

Так же упрощаются и уравнения (104)–(106).

По аналогии с моделью изотропного рассеяния, основанной на уравнениях (29) и (30), тот же самый асимптотический переход к пределу маленькой длины корреляции нетрудно осуществить в рамках модели, описывающей анизотропное рассеяние и строящейся на уравнениях (12) и (13).

Все величины в уравнениях (12) и (13) пропорциональны $O(1)$, за исключением $\hat{\sigma}'(\mathbf{\Omega})$, которая пропорциональна $1/\varepsilon$. Используя разложения (49) и (50), приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε и опуская очевидные детали вывода, аналогичного только что проделанному, получаем коррекцию первого порядка по $\lambda_c(\mathbf{\Omega})$ к атомарной смеси в виде

$$\mathbf{\Omega}\nabla\langle I(\mathbf{\Omega})\rangle + \sigma'_{эф}(\mathbf{\Omega})\langle I(\mathbf{\Omega})\rangle = S_{эф}(\mathbf{\Omega}) + L_{эф}\,\langle I(\mathbf{\Omega})\rangle + O(\varepsilon^2), \tag{110}$$

где введены эффективные характеристики

$$\sigma'_{эф}(\mathbf{\Omega}) = \langle\sigma'\rangle - \nu'^2/[\hat{\sigma}'(\mathbf{\Omega})]; \tag{111}$$

$$S_{эф}(\mathbf{\Omega}) = \langle S\rangle - \left[\frac{\nu'}{\hat{\sigma}'(\mathbf{\Omega})} - K\frac{1}{\hat{\sigma}'(\mathbf{\Omega})}\right]T \tag{112}$$

и эффективный оператор рассеяния

$$L_{эф} = \langle L\rangle - \nu'\left[\frac{1}{\hat{\sigma}'(\mathbf{\Omega})}K + K\frac{1}{\hat{\sigma}'(\mathbf{\Omega})}\right] + K\frac{1}{\hat{\sigma}'(\mathbf{\Omega})}K. \tag{113}$$

Вновь мы видим, что эффективные характеристики содержат необычную угловую зависимость, возникающую из угловой зависимости $\lambda_c(\mathbf{\Omega})$. Эффективный источник, определяемый уравнением (112), содержит оператор рассеяния K, а эффективный оператор рассеяния в форме (113) несколько сложен, так как содержит свертку оператора рассеяния K с самим собой. Тем не менее в результате анализа получено одно ренормированное уравнение переноса [уравнение (110)]. Таким образом, модель из двух уравнений (12) и (13) сведена к одному уравнению.

Как и прежде, используя уравнение (98), эффективные характеристики из уравнений (111)–(113) могут быть выражены через величины из модели атомарной смеси и величину, линейную относительно $\lambda_c(\mathbf{\Omega})$, т.е.

$$\sigma'_{эф}(\mathbf{\Omega}) = \langle\sigma'\rangle - \nu'^2\,\lambda_c(\mathbf{\Omega}) + O(\varepsilon^2); \tag{114}$$

$$S_{эф}(\mathbf{\Omega}) = \langle S\rangle - (\nu' - K)\lambda_c(\mathbf{\Omega})T + O(\varepsilon^2); \tag{115}$$

$$L_{эф} = \langle L\rangle - \nu'[\lambda_c(\mathbf{\Omega})K + K\lambda_c(\mathbf{\Omega})] + K\lambda_c(\mathbf{\Omega})K + O(\varepsilon^2). \tag{116}$$

Уравнение (114) может быть записано в более наглядной форме как

$$\sigma'_{эф}(\mathbf{\Omega}) = \frac{\langle\sigma'\rangle}{1 + [\nu'^2\lambda_c(\mathbf{\Omega})/\langle\sigma'\rangle]} + O(\varepsilon^2). \tag{117}$$

Подобные простые преобразования невозможны для уравнений (115) и (116) из-за присутствующих в них операторов рассеяния K и $\langle L\rangle$. Результатом таких преобразований будут уравнения, содержащие формальные обратные операторы рассеяния.

5. Заключение

В данной статье показано, что модель из двух уравнений [7–11] для описания переноса излучения в бинарной (облака и ясное небо) марковской смеси может быть сведена к одному ренормированному уравнению переноса в двух различных случаях. Эти два случая представляют два асимптотических предела, соответствующих (1) высокой прозрачности атмосферы и (2) статистике смеси с маленьким радиусом корреляции. Нами также указано, что эти марковские модели могут быть использованы для немарковской статистики обновленного типа, соответствующим образом изменяя корреляционный радиус [16]. Это является важным для решения проблемы облачно-радиационного взаимодействия, так как, несмотря на хорошую аппроксимацию марковской статистикой межоблачных расстояний, сами облака в природе зачастую имеют немарковские свойства [18].

Прежде чем использовать эти ренормированные уравнения в моделях общей циркуляции, необходимо выполнить численные расчеты для проверки их точности вне асимптотических пределов, предполагавшихся при их выводе. В частности, расчеты с использованием ренормированного уравнения необходимо сравнить с соответствующими расчетами по модели из двух уравнений. Эти два случая, в свою очередь, необходимо сравнить с точными расчетами для стохастической атмосферы. Точные расчеты состоят в том, чтобы: 1) используя методы Монте-Карло, построить статистическую реализацию в атмосфере с частичной облачностью [9, 19]; 2) для последней решить задачу детерминированного переноса излучения, используя либо метод Монте-Карло, либо какой-нибудь детерминистский метод, как, например, метод дискретных ординат [9, 15, 19]; 3) повторить указанные две процедуры много раз (порядка 10^5 [9, 19]) и численно усреднить результат, получив среднее по ансамблю решение.

Интерес может вызвать сравнение моментов высших порядков, например дисперсии. С этой целью можно также воспользоваться уравнением Лиувилля для получения стохастической модели из двух уравнений для средней по ансамблю интенсивности с последующим получением соответствующих моделей из двух уравнений для всех высших моментов, в частности для дисперсии [7].

Наконец, в связи с тем, что двухпотоковые (диффузные) аппроксимации (по причине их простоты) [20] часто используются на практике при решении проблем переноса излучения в атмосфере, было бы интересно сравнить численные расчеты по двухпотоковому ренормированному уравнению и по ренормированному уравнению с полной угловой зависимостью.

В заключение отметим, что различные ренормированные уравнения переноса (и их диффузные аппроксимации) требуют тщательного тестирования для установления их области применимости. Если эта область совпадает с областью интересов в проблеме взаимодействия облаков и радиации, ренормированные уравнения, по-видимому, могут быть включены в радиационные блоки моделей общей циркуляции атмосферы.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке со стороны Министерства энергетики США в виде гранта DE–FG03–93ER14355.

1. Stephens G.L. // Mon. Wea. Rev. 1984. V. 112. P. 826.
2. Ramanathan V.R., Cess R.D., Harrison E.F., Minnis P., Barkstrom B.R., Ahmad E., and Hartman D. //Science.1989. V. 243. P. 57.
3. Stephens G.L., Gabriel P.M., and Tsay S. // Transport Th. Statist. Phys. 1991. V. 20. P. 139.
4. Titov G.A. // J. Atm. Sci. 1990. V. 47. P. 24.
5. Malvagi F., Byrne R.N., Pomraning G.C., and Somerville R.C.J. // J. Atm. Sci. 1993. V. 50. P. 2146.
6. Malvagi F., and Pomraning G.C. //Atmos. Ocean. Optics. 1993. V. 6. P. 610, (English), 1064 (Russian).
7. Pomraning G.C. Linear Kinetic Theory and Particle Transport in Stochastic Mixtures. World Scientific Publihing, Singapore. 1991.
8. Pomraning G.C., Levermore C.D., and Wong J. Transport Theory in Binary Statistical Mixtures. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. 115. P. Nelson et al. Eds. Marsel Dekker. New York, 1989. P. 1–35.
9. Adams M.L., Larsen E.W., and Pomraning G.C. // J. Quant. Spectr. Radiat. Transfer. 1989. V. 42. P. 253.
10. Sahni D.C. // Ann. Nucl. Energy. 1989. V. 16. P. 397.
11. Sahni D.C. // J. Math. Phys. 1989. V. 30. P. 1554.
12. Vanderhaegen D. // J. Quant. Spectr. Radiat. Transfer. 1986. V. 36. P. 557.
13. Malvagi F., and Pomraning G.C. // Nucl. Sci. Eng. 1992. V. 111. P. 215.
14. Pomraning G.C. // The Equations of Radiation Hydrodynamics. Pergamon Press, Oxford, 1973.
15. Bell G.I., and Classtone S. Nuclear Reactor Theory. Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1970.
16. Levermore C.D., Pomraning G.C., and Wong J. // J. Math. Phys. 1988. V. 29. P 995.
17. Malvagi F., Levermore C.D., and Pomraning G.C. // Transport Th. Statist. Phys. 1989. V. 18. P. 287.
18. Su B., and Pomraning G.C. // J. Atmos. Sci. 1994. V. 51. P. 1969.
19. Su B., and Pomraning G.C. // J. Quant. Spectr. Radiat. Transfer. 1993. V. 50. P. 211.
20. Sammartino M., Malvagi F., and Pomraning G.C. // J. Math. Phys. 1992. V. 33. P. 1480.

Школа прикладной науки и техники,
Калифорнийский университет, Лос Анджелес.
CA 90095-1597. США

Поступила в редакцию
29 мая 1995 г.

G.C. Pomraning. **Effective Radiative Transfer Properties for Partially Cloudy Atmospheres.**

In this paper, we suggest a relatively simple radiation treatment of the broken cloud field problem. The underlying equations are based upon a Markovian model, which treats this radiative transfer problem by a stochastic formalism. Specifically, the partially cloudy atmosphere is treated as a two component (clouds and clear sky) mixture, which is described by a set of two coupled deterministic equations for the ensemble-averaged intensity. For Markovian statistics, these equations are exact in a purely absorbing mixture, and are reasonably accurate and very robust in the general case including scattering. This description can also be modified to account for non-Markovian statistics. We show that in two different asymptotic limits

this set of two coupled equations can be renormalized to a single radiative transfer equation, involving effective atmospheric properties. These two limits correspond to a nearly transparent atmosphere, and small correlation length mixing statistics. General spatial dependences of cloud and clear sky properties, as well in homogeneous and anisotropic statistics, are allowed in the formalism.