«Оптика атмосферы и океана», **9**, N 1 (1996)

УДК 551.521.535.31:535.36

Т.А. Сушкевич, А.К. Куликов, С.В. Максакова, С.А. Стрелков

К ТЕОРИИ ОПТИЧЕСКОГО ПЕРЕДАТОЧНОГО ОПЕРАТОРА СИСТЕМЫ «АТМОСФЕРА – ОКЕАН»

Методом функций влияния (ФВ) и пространственно-частотных характеристик (ПЧХ) с помощью рядов теории возмущений сформулирован оптический передаточный оператор (ОПО) системы «атмосфера–океан» (САО) в приближении трехмерного плоского слоя с горизонтально-неоднородной отражающей и пропускающей границей раздела двух сред. Впервые рассмотрен случай, когда в коэффициентах отражения и пропускания не разделяются пространственные и угловые переменные. Этот ОПО наиболее общего вида представлен через линейные ФВ и ПЧХ атмосферы и океана. Решение задачи для полной САО сведено к решению двух задач для каждой из сред отдельно.

Введение

В настоящей статье сформулированы математические модели, позволяющие достаточно детально изучать процессы формирования полей излучения и переноса изображения в системе «атмосфера–океан» (САО) с горизонтально-неоднородной границей раздела. Распространение солнечного излучения в САО обычно описывается краевой задачей теории переноса для плоского слоя с неортотропной границей, когда океан моделируется как отражающая подстилающая поверхность. Методом функций влияния (ФВ) и пространственно-частотных характеристик (ПЧХ) сконструированы обобщенные решения такой задачи в виде линейных и нелинейных функционалов, ядрами которых являются универсальные характеристики линейной системы переноса [1–8].

Построенные функционалы устанавливают явные связи решения задачи с характеристиками источников и отражающей границы, а также определяют «сценарий» на границе с учетом вклада многократного рассеяния в среде и многократного переотражения от границы и передачу «сценария» через мутную рассеивающую и поглощающую среду. Эти функционалы описывают оптический передаточный оператор (ОПО) системы «атмосфера–подстилающая поверхность», в том числе когда пространственные и угловые зависимости в операторах отражения не факторизуются [5–8].

Более сложными являются задачи для САО с границей раздела сред, отражающей и пропускающей излучение. Для случая горизонтально-однородной гладкой или взволнованной границы разработаны численные алгоритмы моделирования излучения САО [2, 9] и методом функций влияния сформулирован ОПО [10, 11]. Метод ФВ и ПЧХ развит нами применительно к двухсредным задачам с горизонтально-неоднородной границей, когда в операторах отражения и пропускания не расщепляются пространственные и угловые зависимости [12].

В основе математического аппарата построения моделей ФВ, ПЧХ и ОПО лежат ряды теории возмущений и теория обобщенных решений кинетических уравнений. Излагаются новые результаты, показывающие, как можно получить решение в любом порядке приближения по кратности взаимодействия излучения с границей раздела сред и построить ОПО САО с учетом многократного рассеяния в каждой из сред с помощью универсальных линейных передаточных характеристик: ФВ атмосферы Θ_a и океана Θ_{0k} или соответствующих ПЧХ атмосферы (Ψ_a) и океана Ψ_{0k}.

Получено наиболее общее представление ОПО САО, из которого можно находить частные представления в любых (линейных и нелинейных) приближениях. Принципиально новыми результатами в предлагаемом подходе являются сведение решения одной краевой задачи теории переноса для двухсредной САО к решению двух краевых задач для каждой из сред раздельно и формулировка ОПО в матричном виде с ядром – двухкомпонентным вектором ФВ $\mathbf{\Theta} = \{\Theta_a, \Theta_{0k}\}$ или ПЧХ $\Psi = \{\Psi_a, \Psi_{0k}\}$. Впервые такой подход предложен авторами в [2, 10–12].

Построенные математические модели ФВ, ПЧХ, ОПО позволяют разрабатывать новые алгоритмы дистанционного зондирования САО, теории видения и переноса изображений в мутных средах, а также численного моделирования полей излучения в САО, освещенной солнечным потоком или другим источником.

Постановка задачи

Рассмотрим плоский слой, не ограниченный в горизонтальном направлении ($-\infty < x, y < \infty$) и конечный по высоте ($0 \le z \le H$), который как-то освещается (сверху, снизу или изнутри). На уровне $z = h$ внутри слоя проходит граница раздела двух сред, пропускающая и отражающая излучение. Подстилающая поверхность находится на дне ($z = H$). Система «атмосфера–граница раздела–океан–дно» считается немультиплицирующей (без размножения).

Направление распространения излучения определяется вектором $s = (\mu, \varphi)$, $\mu = \cos\vartheta$, $\mu \in [-1, 1]$, на единичной сфере $\Omega = [-1, 1]\times[0, 2\pi]$, где $\vartheta \in [0, 180°]$ – зенитный угол, отсчитываемый от положительного направления оси z; $\varphi \in [0, 2\pi]$ – азимут, отсчитываемый от оси x. Значение $\varphi = 0$ полагается в плоскости солнечного вертикала, совпадающей с плоскостью, проходящей через оси x и z. Солнечный поток падает на границу слоя $z = 0$ в направлении $s_0 = (\mu_0, \varphi_0)$ с зенитным углом $\vartheta_0 \in [0, 90°]$, $\mu_0 = \cos\vartheta_0$ и азимутом $\varphi_0 = 0$. Для нисходящего, пропущенного излучения вводится полусфера направлений $\Omega^+ = \{(\mu, \varphi): \mu > 0\}$, а для восходящего, отраженного излучения – полусфера $\Omega^- = \{(\mu, \varphi): \mu < 0\}$; $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$.

Граничные условия записываем с помощью следующих множеств:

$$\Gamma_0 = \{(z, r_\perp, s): z = 0, s \in \Omega^+\};\ \Gamma_H = \{(z, r_\perp, s): z = H, s \in \Omega^-\},$$

$$\Gamma_h^+ = \{(z, r_\perp, s): z = h, s \in \Omega^+\};\ \Gamma_h^- = \{(z, r_\perp, s): z = h, s \in \Omega^-\}.$$

Прохождение излучения через границу раздела описывается с помощью операторов отражения $\hat{R}_1$, $\hat{R}_2$ и пропускания $\hat{T}_{12}$, $\hat{T}_{21}$, где индекс 1 относится к верхнему слою (обычно атмосфера), а индекс 2 – к нижнему слою (океан):

$$[\hat{R}_1\,\Phi]\,(h, r_\perp, s) = \int_{\Omega^+} \Phi(h, r_\perp, s^+)\, q_1(r_\perp, s, s^+)\, ds^+, \quad s \in \Omega^-; \tag{1}$$

$$[\hat{R}_2\,\Phi]\,(h, r_\perp, s) = \int_{\Omega^-} \Phi(h, r_\perp, s^-)\, q_2(r_\perp, s, s^-)\, ds^-, \quad s \in \Omega^+; \tag{2}$$

$$[\hat{T}_{12}\,\Phi]\,(h, r_\perp, s) = \int_{\Omega^+} \Phi(h, r_\perp, s^+)\, t_{12}(r_\perp, s, s^+)\, ds^+, \quad s \in \Omega^+; \tag{3}$$

$$[\hat{T}_{21}\,\Phi]\,(h, r_\perp, s) = \int_{\Omega^-} \Phi(h, r_\perp, s^-)\, t_{21}(r_\perp, s, s^-)\, ds^-, \quad s \in \Omega^-. \tag{4}$$

Оптические свойства атмосферы и океана задаются высотными распределениями коэффициента экстинкции $\sigma_t(z) = \sigma_s(z) + \sigma_{abs}(z)$, поглощения $\sigma_{abs}(z)$, суммарного рассеяния $\sigma_s(z) = \sigma_a(z) + \sigma_m(z)$, включающего аэрозольную (гидрозольную) $\sigma_a(z)$ и молекулярную $\sigma_m(z)$ компоненты, а также суммарной индикатрисой рассеяния (χ – угол рассеяния):

$$\gamma(z, \chi) = \sigma_a(z)/[\sigma_s(z)]\ \gamma_a(z, \chi) + \sigma_m(z)/[\sigma_s(z)]\ \gamma_m(\chi),$$

в общем случае содержащей аэрозольную (гидрозольную) $\gamma_a(z, \chi)$ и молекулярную (рэлеевскую) $\gamma_m(\chi) = 3(1-\cos^2\chi)/(16\pi)$ составляющие.

Интегральный оператор кинетического уравнения $\hat{K} \equiv \hat{D} - \hat{S}$ содержит интеграл столкновений $\hat{S}\Phi \equiv \sigma_s(z)\int_\Omega \Phi\gamma\, ds'$ и оператор переноса

$$\hat{D} \equiv (s, \text{grad}) + \sigma_t(z) = \hat{D}_z + \sin\vartheta\,\cos\varphi\,\frac{\partial}{\partial x} + \sin\vartheta\,\sin\varphi\,\frac{\partial}{\partial y}\,.$$

В одномерном случае

$$\hat{K}_z \equiv \hat{D}_z - \hat{S};\ \hat{D}_z \equiv \mu\,\frac{\partial}{\partial z} + \sigma_t(z).$$

О разделении вкладов атмосферы и океана

Распространение излучения в системе «атмосфера–океан» с границей раздела описывается общей краевой задачей теории переноса [2]:

$$\begin{cases} \hat{K}\Phi = F_b,\ \ \Phi\big|_{\Gamma_0} = f_0,\ \ \Phi\big|_{\Gamma_H} = f_H + \hat{R}_H\Phi, \\ \Phi\big|_{\Gamma_h^+} = \hat{R}_2\Phi + \hat{T}_{12}\Phi + f_h^+,\ \ \Phi\big|_{\Gamma_h^-} = \hat{R}_1\Phi + \hat{T}_{21}\Phi + f_h^-, \end{cases} \tag{5}$$

где $F_b, f_0, f_H, f_h^+, f_h^-$ – возможные источники излучения. Однократный акт взаимодействия излучения с отражающим дном определяется с помощью оператора

$$[\hat{R}_H\,\Phi](H, r_\perp, s) \equiv \int\limits_{\Omega^+} \Phi(H, r_\perp, s^+)\, q_H(r_\perp, s, s^+)\, ds^+. \tag{6}$$

Не будем детализировать выражения операторов отражения и пропускания, используя их в общем виде.

Вследствие линейных свойств краевой задачи (5) относительно источников суммарное поле излучения системы представляется суперпозицией решений набора краевых задач типа (5) с одним из источников $F_b, f_0, f_H, f_h^+, f_h^-$ соответственно. На примере случая, когда система освещается солнечным потоком, покажем, как осуществляется расщепление исходной краевой задачи теории переноса на краевые задачи для компонент светового поля:

$$\Phi = \Phi^0 + \Phi_a + \Phi_{aR} + \Phi_{0k} + \Phi_q.$$

В случае освещения системы солнечным потоком ($f_H = F_b = f_h^+ = f_h^- = 0$) прямое, ослабленное излучение Φ^0 ищется из задачи Коши:

$$\{\hat{D}_z\,\Phi^0 = 0,\ \ \Phi^0\big|_{\Gamma_0} = \pi\,S_\lambda\,\delta(s - s_0),\ \ \Phi\big|_{\Gamma_h^-} = 0 \tag{7}$$

для верхнего слоя $z \in [0, h]$ и $\Phi^0 \neq 0$ только для $s = s_0$.

Фоновое излучение атмосферы Φ_a – решение одномерной задачи для плоского слоя $z \in [0, h]$ с нулевыми граничными условиями:

$$\{\hat{K}_z\,\Phi_a = \hat{S}\,\Phi^0,\ \ \Phi_a\big|_{\Gamma_0} = 0,\ \ \Phi_a\big|_{\Gamma_h^-} = 0. \tag{8}$$

Излучение атмосферы, отраженное от границы раздела, – это решение краевой задачи для слоя $z \in [0, h]$ с источником на $z = h$:

$$\{\hat{K}\,\Phi_{aR} = 0,\ \ \Phi_{aR}\big|_{\Gamma_0} = 0,\ \ \Phi_{aR}\big|_{\Gamma_h^-} = \hat{R}_1\,\Phi_{aR} + \hat{R}_1\,(\Phi^0 + \Phi_a) \tag{9}$$

можно искать детальнее в виде двух компонент: $\Phi_{aR} = \Phi_{aR}^0 + \Phi_{aR}^d$.

Компонента Φ_{aR}^0 – вклад в дымку атмосферы, обусловленный рассеянием в верхнем слое прямого потока излучения, отраженного от границы раздела ($z \in [0, h]$):

$$\{\hat{K}\,\Phi_{aR}^0 = 0,\ \ \Phi_{aR}^0\big|_{\Gamma_0} = 0,\ \ \mathrm{F}_{aR}^0\big|_{\Gamma_h^-} = \hat{R}_1\,\mathrm{F}_{aR}^0 + \hat{R}_1\,\Phi^0. \tag{10}$$

В результате рассеяния в атмосфере отраженной от границы диффузной составляющей дымки формируется компонента Φ^d_{aR} – решение задачи ($z \in [0, h]$)

$$\{\hat{K}\,\Phi^d_{aR} = 0,\quad \Phi^d_{aR}\big|_{\Gamma_0} = 0,\quad \Phi^d_{aR}\big|_{\Gamma_h^-} = \hat{R}_1\,\Phi^d_{aR} + \hat{R}_1\,\Phi_a. \tag{11}$$

Падающее на границу $z = h$ излучение, сформированное в атмосфере, является источником компоненты светового поля системы Φ_{0k}, в формировании которой участвует океан ($\Phi_{0k} \neq 0$ для $z \in [0, H]$):

$$\begin{cases} \hat{K}\Phi_{0k} = 0,\ \Phi_{0k}\big|_{\Gamma_0} = 0,\ \Phi_{0k}\big|_{\Gamma_H} = 0,\ \Phi_{0k}\big|_{\Gamma_h^-} = \hat{R}_1\,\Phi_{0k} + \hat{T}_{21}\,\Phi_{0k}, \\ \Phi_{0k}\big|_{\Gamma_h^+} = \hat{R}_2\,\Phi_{0k} + \hat{T}_{12}\,\Phi_{0k} + \hat{T}_{12}\,(\Phi^0 + \Phi_a + \Phi_{aR}). \end{cases} \tag{12}$$

При детальном рассмотрении можно ввести суперпозицию

$$\Phi_{0k} = \Phi^0_{0k} + \Phi^d_{0k},\ \ \Phi^d_{0k} = \Phi^a_{0k} + \Phi^{aR}_{0k}$$

с разделением компонент поля яркости, обусловленных влиянием прямого солнечного излучения Φ^0_{0k} (задача типа (12) с источником $\hat{T}_{12}(\Phi^0 + \Phi^0_{aR})$) и дымки атмосферы Φ^d_{0k} (задача типа (12) с источником $\hat{T}_{12}(\Phi_a + \Phi^d_{aR})$).

Вклад подсветки от отражающего дна океана находится как решение краевой задачи

$$\begin{cases} \hat{K}\Phi_q = 0,\ \Phi_q\big|_{\Gamma_0} = 0,\ \Phi_q\big|_{\Gamma_H} = \hat{R}_H\,\Phi_q + E_H, \\ \Phi_q\big|_{\Gamma_h^+} = \hat{R}_2\,\Phi_q + \hat{T}_{12}\,\Phi_q,\ \Phi_q\big|_{\Gamma_h^-} = \hat{R}_1\,\Phi_q + \hat{T}_{21}\,\Phi_q, \end{cases} \tag{13}$$

источником в которой является освещенность дна $E_H = \hat{R}_H\Phi_{0k}$.

Уравнения для ФВ атмосферы и океана и оптический передаточный оператор

Решение одномерных краевых задач теории переноса для прямого солнечного излучения (7) и дымки атмосферы (8) достаточно хорошо известно [2]. Трехмерные и одномерные краевые задачи (9) – (11), в которых океан учитывается как отражающая неортотропная или ламбертовая поверхность, исследованы в работах [1–8]. Компоненты светового поля Φ^0_{aR}, Φ^d_{aR}, Φ_{aR} вычисляются через функцию влияния атмосферы $\Theta_a(s^-; z, r_\perp, s)$ – решение краевой задачи

$$\{\hat{K}\,\Theta_a = 0,\quad \Theta_a\big|_{\Gamma_0} = 0,\quad \Theta_a\big|_{\Gamma_h^-} = f_\delta\,(s^-; r_\perp, s) \tag{14}$$

с источником

$$f_\delta(s^-; r_\perp, s) \equiv \delta(r_\perp)\,\delta(s - s^-). \tag{15}$$

Краевую задачу для нахождения отдельных компонент излучения системы, сформированных под влиянием многократного рассеяния света в океане, можно записать в общем виде:

$$\begin{cases} \hat{K}\Phi_{0k} = 0,\ \Phi_{0k}\big|_{\Gamma_0} = 0,\ \Phi_{0k}\big|_{\Gamma_h^-} = \mathrm{h}(\hat{R}_1\,\Phi_{0k} + \hat{T}_{21}\,\Phi_{0k} + E_a), \\ \Phi_{0k}\big|_{\Gamma_h^+} = \eta(\hat{R}_2\,\Phi_{0k} + \hat{T}_{12}\,\Phi_{0k} + E_{0k}),\ \Phi_{0k}\big|_{\Gamma_H} = 0, \end{cases} \tag{16}$$

где источниками излучения являются $E_{0k}(r_\perp, s)$ – освещенность океана сверху (со стороны атмосферы); $E_a(r_\perp, s)$ – освещенность атмосферы снизу (со стороны океана).

Решение задачи (16) ищем в виде ряда возмущений:

$$\Phi_{0k}(z, r_\perp, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta^n \Phi_n(z, r_\perp, s) \tag{17}$$

с параметром η, фиксирующим акт прохождения границы. Вводим двухкомпонентные векторы

$$\mathbf{\Phi}_n = \{\Phi_{a,n}, \Phi_{0k,n}\}, \quad \mathbf{E} = \{E_a, E_{0k}\}, \quad \mathbf{\Theta} = \{\Theta_a, \Theta_{0k}\}. \tag{18}$$

В линейном приближении ($n = 1$) краевая задача с двумя источниками E_a, E_{0k}:

$$\begin{cases} \hat{K}\Phi_1 = 0, \ \Phi_1|_{\Gamma_0} = 0, \ \Phi_1|_{\Gamma_H} = 0, \\ \Phi_1|_{\Gamma_h^+} = E_{0k}, \ \Phi_1|_{\Gamma_h^-} = E_a \end{cases} \tag{19}$$

расщепляется на две краевые задачи: для океана ($z \in [h, H]$)

$$\{\hat{K}\,\Phi_{0k,1} = 0, \quad \Phi_{0k,1}|_{\Gamma_H} = 0, \quad \Phi_{0k,1}|_{\Gamma_h^+} = E_{0k} \tag{20}$$

и для атмосферы ($z \in [0, h]$)

$$\{\hat{K}\,\Phi_{a,1} = 0, \quad \Phi_{a,1}|_{\Gamma_0} = 0, \quad \Phi_{a,1}|_{\Gamma_h^-} = E_a. \tag{21}$$

Представим освещенности в виде функционалов

$$E_a(r_\perp, s) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega^-} \delta(s - \bar{s})\, ds^- \int_{-\infty}^{\infty} \delta(r_\perp - r'_\perp)\, E_a(r'_\perp, \bar{s})\, dr'_\perp; \tag{22}$$

$$E_{0k}(r_\perp, s) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega^+} \delta(s - \overset{+}{s})\, ds^+ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(r_\perp - r'_\perp)\, E_{0k}(r'_\perp, \overset{+}{s})\, dr'_\perp, \tag{23}$$

и тогда решения задач (19), (20) можно записать как линейные функционалы ($s \in \Omega$):

$$\Phi_{a,1}(z, r_\perp, s) = (\Theta_a, E_a) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega^-} d\bar{s}_1 \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_a(\bar{s}_1; z, r_\perp - r_{\perp 1}, s)\, E_a(r_{\perp 1}, \bar{s}_1)\, dr_{\perp 1}, \quad z \in [0, h]; \tag{24}$$

$$\Phi_{0k,1}(z, r_\perp, s) = (\Theta_{0k}, E_{0k}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega^+} d\overset{+}{s}_1 \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_{0k}(\overset{+}{s}_1; z, r_\perp - r_{\perp 1}, s)\, E_{0k}(r_{\perp 1}, \overset{+}{s}_1)\, dr_{\perp 1}, \quad z \in [h, H], \tag{25}$$

ядрами которых являются ФВ атмосферы $\Theta_a(\bar{s}; z, r_\perp, s)$ – решение краевой задачи (14) и ФВ океана $\Theta_{0k}(\overset{+}{s}; z, r_\perp, s)$ – решение задачи для слоя ($z \in [h, H]$):

$$\{\hat{K}\,\Theta_{0k} = 0, \quad \Theta_{0k}|_{\Gamma_H} = 0, \quad \Theta_{0k}|_{\Gamma_h^+} = f_\delta(\overset{+}{s}; r_\perp, s) \tag{26}$$

с источником $f_\delta(\overset{+}{s}; r_\perp, s) \equiv \delta(r_\perp)\, \delta(s - \overset{+}{s})$.

Для второго и следующих приближений ($n \geq 2$) ряда возмущений (17) краевая задача ($z \in [0, H]$)

$$\begin{cases} \hat{K}\Phi_n = 0, \ \Phi_n|_{\Gamma_0} = 0, \ \Phi_n|_{\Gamma_h^-} = \hat{R}_1\,\Phi_{n-1} + \hat{T}_{21}\,\Phi_{n-1}, \\ \Phi_n|_{\Gamma_h^+} = \hat{R}_2\,\Phi_{n-1} + \hat{T}_{12}\,\Phi_{n-1}, \ \Phi_n|_{\Gamma_H} = 0 \end{cases} \tag{27}$$

расщепляется по источникам на две задачи: для слоя $z \in [0, h]$

$$\{\hat{K}\,\Phi_{a,n} = 0,\quad \Phi_{a,n}|_{\Gamma_0} = 0,\quad \Phi_{a,n}|_{\Gamma_h^-} = \hat{R}_1\,\Phi_{a,n-1} + \hat{T}_{21}\,\Phi_{0k,n-1} \tag{28}$$

и для слоя $z \in [h, H]$

$$\{\hat{K}\,\Phi_{0k,n} = 0,\quad \Phi_{0k,n}|_{\Gamma_0} = 0,\quad \Phi_{0k,n}|_{\Gamma_h^+} = \hat{R}_2\,\Phi_{0k,n-1} + \hat{T}_{12}\,\Phi_{a,n-1}. \tag{29}$$

Для вектор-функции $\mathbf{f} = \{f_a(s_*;\ h,\ r_\perp,\ s), f_{0k}(s_*;\ h,\ r_\perp,\ s)\}$ с параметрами s_* определим векторный линейный функционал

$$(\mathbf{\Theta}, \mathbf{f}) = \{(\Theta_a, f_a), (\Theta_{0k}, f_{0k})\}, \tag{30}$$

компоненты которого – линейные функционалы ($s \in \Omega$):

$$[(\Theta_a, f_a)](s_*; z, r_\perp, s) \equiv \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega^-} ds^- \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Theta_a(s^-; z, r_\perp - r'_\perp, s)\, f_a(s_*; h, r'_\perp, s^-)\, dr'_\perp,\quad z \in [0, h], \tag{31}$$

$$[(\Theta_{0k}, f_{0k})](s_*; z, r_\perp, s) \equiv \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega^+} ds^+ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Theta_{0k}(s^+; z, r_\perp - r'_\perp, s)\, f_{0k}(s_*; h, r'_\perp, s^+)\, dr'_\perp,\quad z \in [h, H]. \tag{32}$$

Параметры s_* у функций f_a, f_{0k} могут отсутствовать.

Взаимодействие излучения с границей раздела описываем векторным функционалом, ядрами которого являются функции влияния атмосферы и океана:

$$[\hat{M}\,\mathbf{f}](h, r_\perp, s) \equiv \hat{P}(\mathbf{\Theta}, \mathbf{f}) = \begin{bmatrix} \hat{R}_1(\Theta_a, f_a) + \hat{T}_{21}(\Theta_{0k}, f_{0k}) \\ \hat{T}_{12}(\Theta_a, f_a) + \hat{R}_2(\Theta_{0k}, f_{0k}) \end{bmatrix}, \tag{33}$$

где матрица

$$\hat{P} \equiv \begin{bmatrix} \hat{R}_1 & \hat{T}_{21} \\ \hat{T}_{12} & \hat{R}_2 \end{bmatrix}.$$

Выпишем явные выражения компонент функционала (33):

$$[\hat{R}_1(\Theta_a, f_a)](s_*; h, r_\perp, s) = \int\limits_{\Omega^+} [(\Theta_a, f_a)](s_*; h, r_\perp, s^+)\, q_1(r_\perp, s, s^+)\, ds^+ =$$

$$= \int\limits_{\Omega^+} q_1(r_\perp, s, s^+)\, ds^+ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega^-} ds^- \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_a(s_*; h, r'_\perp, s^-)\, \Theta_a(s^-; h, r_\perp - r'_\perp, s^+)\, dr'_\perp,\quad s \in \Omega^-; \tag{34}$$

$$[\hat{R}_2(\Theta_{0k}, f_{0k})]\ (s_*; h, r_\perp, s) = \int\limits_{\Omega^-} [(\Theta_{0k}, f_{0k})](s_*; h, r_\perp, s^-)\, q_2(r_\perp, s, s^-)\, ds^- = \int\limits_{\Omega^-} q_2(r_\perp, s, s^-)\, ds^- \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega^+} ds^+ \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{0k}(s_*; h, r'_\perp, s^+)\, \Theta_{0k}(s^+; h, r_\perp - r'_\perp, s^-)\, dr'_\perp,\quad s \in \Omega^+; \tag{35}$$

$$[\hat{T}_{12}(\Theta_a, f_a)](s_*; h, r_\perp, s) = \int\limits_{\Omega^+} [(\Theta_a, f_a)](s_*; h, r_\perp, s^+)\, t_{12}(r_\perp, s, s^+)\, ds^+ =$$

$$= \int\limits_{\Omega^+} t_{12}(r_\perp, s, s^+)\, ds^+ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Omega^-} ds^- \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_a(s_*; h, r'_\perp, s^-)\, \Theta_a(s^-; h, r_\perp - r'_\perp, s^+)\, dr'_\perp, \quad s \in \Omega^+; \tag{36}$$

$$[\hat{T}_{21}(\Theta_{0k}, f_{0k})](s_*; h, r_\perp, s) = \int\limits_{\Omega^-} [(\Theta_{0k}, f_{0k})](s_*; h, r_\perp, s^-)\, t_{21}(r_\perp, s, s^-)\, ds^- =$$

$$= \int\limits_{\Omega^-} t_{21}\,(r_\perp, s, s^-)\, ds^- \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Omega^+} ds^+ \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{0k}(s_*; h, r'_\perp, s^+)\, \Theta_{0k}(s^+; h, r_\perp - r'_\perp, s^-)\, dr'_\perp, \quad s \in \Omega^-. \tag{37}$$

При $n = 2$ решение краевой задачи (27) записывается в виде линейных функционалов для двух компонент – решений краевых задач (28) и (29):

$$\Phi_{a,2} = (\Theta_a, \hat{R}_1\, \Phi_{a,1} + \hat{T}_{21}\, \Phi_{0k,1}) = (\Theta_a, \hat{R}_1\, \Phi_{a,1}) + (\Theta_a, \hat{T}_{21}\, \Phi_{0k,1}),$$

$$\Phi_{0k,2} = (\Theta_{0k}, \hat{R}_2\, \Phi_{0k,1} + \hat{T}_{12}\, \Phi_{a,1}) = (\Theta_{0k}, \hat{R}_2\, \Phi_{0k,1}) + (\Theta_{0k}, \hat{T}_{12}\, \Phi_{a,1}).$$

С помощью представлений (24)–(25), функционалов (31)–(32) и определений операторов (1)–(4) получаем

$$[\hat{R}_1\, \Phi_{a,1}](h, r_\perp, s) = \int\limits_{\Omega^+} q_1(r_\perp, s, s_1^+) ds_1^+ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Omega^-} ds_1^- \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Theta_a(s_1^-; z, r_\perp - r_{\perp 1}, s_1^+)\, E_a(r_{\perp 1}, s_1^-)\, dr_{\perp 1} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Omega^-} ds_1^- \int\limits_{-\infty}^{\infty} E_a(r_{\perp 1}, s_1^-)\, dr_{\perp 1} \int\limits_{\Omega^+} q_1(r_\perp, s, s_1^+)\, \Theta_a(s_1^-; z, r_\perp - r_{\perp 1}, s_1^+)\, ds_1^+ = \hat{R}_1(\Theta_a, E_a);$$

$$[\hat{T}_{21}\, \Phi_{0k,1}](h, r_\perp, s) = \int\limits_{\Omega^-} t_{21}(r_\perp, s, s_1^-)\, ds_1^- \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Omega^+} ds_1^+ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Theta_{0k}(s_1^+; z, r_\perp - r_{\perp 1}, s_1^-)\, E_{0k}(r_{\perp 1}, s_1^+) dr_{\perp 1} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Omega^+} ds_1^+ \int\limits_{-\infty}^{\infty} E_{0k}(r_{\perp 1}, s_1^+) dr_{\perp 1} \int\limits_{\Omega^-} t_{21}(r_\perp, s, s_1^-)\, \Theta_{0k}(s_1^+; z, r_\perp - r_{\perp 1}, s_1^-)\, ds_1^- = \hat{T}_{21}(\Theta_{0k}, E_{0k});$$

$$[\hat{R}_2\, \Phi_{0k,1}](h, r_\perp, s) = \int\limits_{\Omega^-} q_2(r_\perp, s, s_1^-)\, ds_1^- \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Omega^+} ds_1^+ \int\limits_{-\infty}^{\infty} E_{0k}(r_{\perp 1}, s_1^+)\, \Theta_{0k}(s_1^+; z, r_\perp - r_{\perp 1}, s_1^-)\, dr_{\perp 1} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Omega^+} ds_1^+ \int\limits_{-\infty}^{\infty} E_{0k}(r_{\perp 1}, s_1^+)\, dr_{\perp 1} \int\limits_{\Omega^-} q_2(r_\perp, s, s_1^-)\, \Theta_{0k}(s_1^+; z, r_\perp - r_{\perp 1}, s_1^-)\, ds_1^- = \hat{R}_2(\Theta_{0k}, E_{0k});$$

$$[\hat{T}_{12}\, \Phi_{a,1}](h, r_\perp, s) = \int\limits_{\Omega^+} t_{12}(r_\perp, s, s_1^+)\, ds_1^+ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Omega^-} ds_1^- \int\limits_{-\infty}^{\infty} E_a(r_{\perp 1}, s_1^-)\, \Theta_a(s_1^-; z, r_\perp - r_{\perp 1}, s_1^+)\, dr_{\perp 1} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Omega^-} ds_1^- \int\limits_{-\infty}^{\infty} E_a(r_{\perp 1}, s_1^-)\, dr_{\perp 1} \int\limits_{\Omega^+} t_{12}(r_\perp, s, s_1^+)\, \Theta_a(s_1^-; z, r_\perp - r_{\perp 1}, s_1^+)\, ds_1^+ = \hat{T}_{12}(\Theta_a, E_a).$$

Как видим, не выполняется свойство изопланарности, и поэтому

$$\hat{R}_1(\Theta_a, E_a) \ne (\hat{R}_1\, \Theta_a, E_a), \quad \hat{R}_2(\Theta_{0k}, E_{0k}) \ne (\hat{R}_2\, \Theta_{0k}, E_{0k});$$

$$\hat{T}_{21}(\Theta_{0k}, E_{0k}) \ne (\hat{T}_{21}\, \Theta_{0k}, E_{0k}), \quad \hat{T}_{12}(\Theta_a, E_a) \ne (\hat{T}_{12}\, \Theta_a, E_a).$$

Второе приближение ряда возмущений (17) находится в явном виде ($s \in \Omega$):

$$\Phi_{a,2}(z, r_\perp, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} d\bar{s}_2 \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_a(\bar{s}_2; z, r_\perp - r_{\perp 2}, s)\, [\hat{R}_1\, \Phi_{a,1}](h, r_{\perp 2}, \bar{s}_2)\, dr_{\perp 2} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} d\bar{s}_2 \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_a(\bar{s}_2; z, r_\perp - r_{\perp 2}, s)\, [\hat{T}_{21}\, \Phi_{0k,1}]\, (h, r_{\perp 2}, \bar{s}_2)\, dr_{\perp 2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} d\bar{s}_2 \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_a(\bar{s}_2; z, r_\perp - r_{\perp 2}, s)\, \{[\hat{R}_1\, (\Theta_a, E_a)](h, r_{\perp 2}, \bar{s}_2) + [\hat{T}_{21}(\Theta_{0k}, E_{0k})]\, (h, r_{\perp 2}, \bar{s}_2)\}\, dr_{\perp 2} =$$

$$= (\Theta_a, \hat{R}_1(\Theta_a, E_a)) + (\Theta_a, \hat{T}_{21}(\Theta_{0k}, E_{0k})), \quad z \in [0, h];$$

$$\Phi_{0k,2}(z, r_\perp, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^+} d\overset{+}{s}_2 \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_{0k}(\overset{+}{s}_2; z, r_\perp - r_{\perp 2}, s) \times$$

$$\times [\hat{R}_2\, \Phi_{0k,1}]\, (h, r_{\perp 2}, \overset{+}{s}_2)\, dr_{\perp 2} + \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^+} d\overset{+}{s}_2 \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_{0k}(\overset{+}{s}_2; z, r_\perp - r_{\perp 2}, s) \times$$

$$\times [\hat{T}_{12}\, \Phi_{a,1}](h, r_{\perp 2}, \overset{+}{s}_2)\, dr_{\perp 2} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^+} d\overset{+}{s}_2 \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_{0k}(\overset{+}{s}_2; z, r_\perp - r_{\perp 2}, s)\, \{[\hat{R}_2(\Theta_{0k}, E_{0k})](h, r_{\perp 2}, \overset{+}{s}_2) +$$

$$+ [\hat{T}_{12}(\Theta_a, E_a)](h, r_{\perp 2}, \overset{+}{s}_2)\}\, dr_{\perp 2} = (\Theta_{0k}, \hat{R}_2(\Theta_{0k}, E_{0k})) + (\Theta_{0k}, \hat{T}_{12}(\Theta_a, E_a)), \quad z \in [h, H].$$

Обратим внимание на следующую деталь: на уровне границы раздела $z = h$ компоненты $\Phi_{a,n}$ и $\Phi_{0k,n}$ определены для полной сферы направлений $s \in \Omega$.

Запишем три первых приближения в векторной операторной форме и воспользуемся определением (33):

$$\mathbf{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} \Phi_{a,1} \\ \Phi_{0k,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\Theta_a, E_a) \\ (\Theta_{0k}, E_{0k}) \end{bmatrix} = (\mathbf{\Theta}, \mathbf{E}); \tag{38}$$

$$\mathbf{F}_1 = \hat{P}\, \mathbf{\Phi}_1 = \hat{P}\, (\mathbf{\Theta}, \mathbf{E}) = \hat{M}\, \mathbf{E};$$

$$\mathbf{\Phi}_2 = (\mathbf{\Theta}, \mathbf{F}_1) = (\mathbf{\Theta}, \hat{M}\, \mathbf{E}) = (\mathbf{\Theta}, \hat{P}\, \mathbf{\Phi}_1) = (\mathbf{\Theta}, \hat{P}\, (\mathbf{\Theta}, \mathbf{E}));$$

$$\mathbf{F}_2 = \hat{P}\, \mathbf{\Phi}_2 = \hat{P}\, (\mathbf{\Theta}, \mathbf{F}_1) = \hat{M}\, \mathbf{F}_1 = \hat{M}^2\, \mathbf{E};$$

$$\mathbf{\Phi}_3 = (\mathbf{\Theta}, \mathbf{F}_2) = (\mathbf{\Theta}, \hat{P}\, \mathbf{F}_2) = (\mathbf{\Theta}, \hat{M}\, \mathbf{F}_1) = (\mathbf{\Theta}, \hat{M}^2\, \mathbf{E}).$$

Можно показать, что два последовательных n-приближения связаны рекуррентным соотношением

$$\mathbf{\Phi}_n = (\mathbf{\Theta}, \hat{P}\, \mathbf{\Phi}_{n-1}) = (\mathbf{\Theta}, \hat{M}^{n-1}\, \mathbf{E}), \tag{39}$$

в которое входит матричный оператор, описывающий один акт прохождения излучения через границу раздела на уровне $z = h$ с учетом многократного рассеяния в обеих средах. В результате

$$\mathbf{\Phi} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{\Phi}_n = (\mathbf{\Theta}, \mathbf{E}) + (\mathbf{\Theta}, \sum_{n=1}^{\infty} \hat{M}^n\, \mathbf{E}) = (\mathbf{\Theta}, \hat{Z}\, \mathbf{E});$$

$$\hat{Z}\, \mathbf{E} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \hat{M}^n\, \mathbf{E} \tag{40}$$

есть сумма ряда Неймана по кратности прохождения излучения через границу раздела. Представление решения краевой задачи (16) в виде функционала

$$\mathbf{\Phi} = (\mathbf{\Theta}, \hat{Z}\,\mathbf{E}) \tag{41}$$

есть оптический передаточный оператор системы «атмосфера–океан», устанавливающий явную связь измеряемого излучения со «сценарием» (40) на границе раздела. В свою очередь, «сценарий» (40) с помощью функций влияния атмосферы и океана описывается явно через характеристики отражения и пропускания границы раздела при заданной ее освещенности.

Уравнения для ПЧХ атмосферы и океана и оптический передаточный оператор

С помощью Фурье-преобразования по координате $r_\perp = (x, y)$:

$$\check{f}(p) \equiv F[f(r_\perp)](p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(r_\perp) \exp\,[i(p, r_\perp)]\, dr_\perp = \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int f(x, y) \exp\,[i\,(p_x x + p_y y)]\, dx\, dy,$$

где пространственная частота $p = (p_x,\ p_y)$ принимает только действительные значения $(-\infty < p_x, p_y < \infty)$, краевая задача

$$\begin{cases} \hat{K}\Phi = F_b,\ \ \Phi|_{\Gamma_0} = f_0,\ \ \Phi|_{\Gamma_H} = f_H, \\ \Phi|_{\Gamma_h^+} = f_h^+,\ \ \Phi|_{\Gamma_h^+} = f_h^- \end{cases}$$

приводится к параметрической одномерной краевой задаче [2]

$$\begin{cases} \hat{L}(p)\,\check{\Phi} = \check{F}_b,\ \ \check{\Phi}|_{\Gamma_0} = \check{f}_0,\ \ \check{\Phi}|_{\Gamma_H} = \check{f}_H, \\ \check{\Phi}|_{\Gamma_h^+} = \check{f}_h^+,\ \ \check{\Phi}|_{\Gamma_h^-} = \check{f}_h^- \end{cases} \tag{42}$$

с оператором

$$\hat{L}(p) \equiv \hat{D}_z - i(p, s_\perp) - \hat{S};\quad (p, s_\perp) = p_x \sin\vartheta \cos\varphi + p_y \sin\vartheta \sin\varphi\,.$$

Для Фурье-образов вводим метку «$\vee$». Краевая задача (42) отличается от обычной одномерной краевой задачи [2] появлением анизотропного и комплексного коэффициента экстинкции

$$\check{\sigma}_t(z, p, s_\perp) = \sigma_t(z) - i(p, s_\perp),$$

зависящего от параметра p. Если источником излучения является солнечный поток $(\check{F}_b = \check{f}_0 = \check{f}_H = 0)$, краевая задача (42) расщепляется на две: для слоя $z \in [0, h]$

$$\{\hat{L}(p)\,\check{\Phi} = 0,\ \ \check{\Phi}|_{\Gamma_0} = 0,\ \ \check{\Phi}|_{\Gamma_h^-} = \check{f}_h^- \tag{43}$$

и для слоя $z \in [h, H]$

$$\{\hat{L}(p)\,\check{\Phi} = 0,\ \ \check{\Phi}|_{\Gamma_H} = 0,\ \ \check{\Phi}|_{\Gamma_h^+} = \check{f}_h^+. \tag{44}$$

В [1–8] показано, что решения краевых задач (9)–(11) в форме Фурье-образов компонент светового поля $\check{\Phi}_{aR}^0$, $\check{\Phi}_{aR}^d$, $\check{\Phi}_{aR}$, как и решение краевой задачи (43), определяются через пространственно-частотную характеристику атмосферы $\Psi_a(s^-;\ z,\ p,\ s)$ – решение краевой задачи для слоя $z \in [0, h]$

$$\{\hat{L}(p)\,\Psi_a = 0,\ \ \Psi_a|_{\Gamma_0} = 0,\ \ \Psi_a|_{\Gamma_h^-} = \check{f}_\delta(s^-; p, s); \tag{45}$$

$$\check{f}_\delta(s^-; p, s) = F[f_\delta(s^-; r_\perp, s)] = \delta\,(s - s^-).$$

Пространственно-частотная характеристика и функция влияния атмосферы связаны прямым и обратным Фурье-преобразованием по координате $r_\perp$:

$$\Psi_a(s^-; z, p, s) \equiv F[\Theta_a(s^-; z, r_\perp, s)] = \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_a(s^-; z, r_\perp, s) \exp[i(p, r_\perp)]\, dr_\perp;$$

$$\Theta_a(s^-; z, r_\perp, s) = F^{-1}[\Psi_a(s^-; z, p, s)] = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_a(s^-; z, p, s) \exp[-i(p, r_\perp)]\, dp.$$

Будем искать решение краевой задачи (16) в Фурье-образах. Введем ряд возмущений

$$\check{\Phi}_{0k}(z, p, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta^n \check{\Phi}_n(z, p, s) \tag{46}$$

и двухкомпонентные векторы

$$\check{\mathbf{\Phi}}_n = \{\check{\Phi}_{a,n}, \check{\Phi}_{0k,n}\}, \quad \mathbf{E}_n = \{\check{E}_a, \check{E}_{0k}\}.$$

Запишем Фурье-образы для операторов отражения и пропускания (1)–(4):

$$[\check{R}_1\check{\Phi}](h, p, s) \equiv F[\hat{R}_1 \Phi](h, p, s) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} dp' \int_{\Omega^+} \check{q}_1(p-p', s, s^+)\, \check{\Phi}(h, p', s^+) ds^+ =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} dp' \int_{\Omega^+} \check{q}_1(p', s, s^+) \check{\Phi}(h, p-p', s^+) ds^+ ;$$

$$[\check{R}_2\check{\Phi}](h, p, s) \equiv F[\hat{R}_2 \Phi](h, p, s) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} dp' \int_{\Omega^-} \check{q}_2(p-p', s, s^-)\, \check{\Phi}(h, p', s^-) ds^- =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} dp' \int_{\Omega^-} \check{q}_2(p', s, s^-) \check{\Phi}(h, p-p', s^-)\, ds^- ;$$

$$[\check{T}_{12}\, \check{\Phi}](h, p, s) \equiv F[\hat{T}_{12}\, \Phi](h, p, s) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} dp' \int_{\Omega^+} \check{\Phi}(h, p', s^+)\, \check{t}_{12}(p-p', s, s^+) ds^+ =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} dp' \int_{\Omega^+} \check{\Phi}(h, p-p', s^+)\, \check{t}_{12}(p', s, s^+) ds^+ ;$$

$$[\check{T}_{21}\, \check{\Phi}](h, p, s) \equiv F[\hat{T}_{21}\, \Phi](h, p, s) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} dp' \int_{\Omega^-} \check{\Phi}(h, p', s^-)\, \check{t}_{21}(p-p', s, s^-) ds^- =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} dp' \int_{\Omega^-} \check{\Phi}(h, p-p', s^-)\, \check{t}_{21}(p', s, s^-) ds^- .$$

В линейном приближении ($n = 1$) краевая задача (19) в Фурье-образах расщепляется на две задачи: для океана ($z \in [h, H]$)

$$\{\hat{L}(p)\, \check{\Phi}_{0k,1} = 0, \quad \check{\Phi}_{0k,1}\big|_{\Gamma_H} = 0, \quad \check{\Phi}_{0k,1}\big|_{\Gamma_h^+} = \check{E}_{0k} \tag{47}$$

и для атмосферы ($z \in [0, h]$)

$$\{\hat{L}(p)\,\check{\Phi}_{a,1} = 0,\quad \check{\Phi}_{a,1}\big|_{\Gamma_0} = 0,\quad \check{\Phi}_{a,1}\big|_{\Gamma_h^-} = \check{E}_a. \tag{48}$$

Найдем Фурье-образы функционалов (22), (23):

$$\check{E}_a(p, s) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega^-} \delta(s - s^-)\,\check{E}_a(p, s^-)\,ds^-;$$

$$\check{E}_{0k}(p, s) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega^+} \delta(s - s^+)\,\check{E}_{0k}(p, s^+)\,ds^+,$$

и тогда решения задач (47), (48) можно записать в виде линейных функционалов ($s \in \Omega$):

$$\check{\Phi}_{a,1}(z, p, s) = (\Psi_a, \check{E}_a) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega^-} \Psi_a(s_1^-; z, p, s)\,\check{E}_a(p, s_1^-)\,ds_1^-,\quad z \in [0, h];$$

$$\check{\Phi}_{0k,1}(z, p, s) = (\Psi_{0k}, \check{E}_{0k}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega^+} \Psi_{0k}(s_1^+; z, p, s)\check{E}_{0k}(p, s_1^+)\,ds_1^+,\quad z \in [h, H],$$

ядрами которых являются ПХЧ атмосферы $\Psi_a(s^-; z, p, s)$ – решение краевой задачи (45) и ПЧХ океана

$$\Psi_{0k}(s^+; z, p, s) \equiv F[\Theta_{0k}(s^+; z, r_\perp, s)] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Theta_{0k}(s^+; z, r_\perp, s)\exp\,[i(p, r_\perp)]\,dr_\perp;$$

$$\Theta_{0k}(s^+; z, r_\perp, s) = F^{-1}\,[\Psi_{0k}(s^+; z, p, s)] = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Psi_{0k}(s^+; z, p, s)\,\exp\,[-\,i(p, r_\perp)]\,dp.$$

ПЧХ океана $\Psi_{0k}(s^+; z, p, s)$ – решение краевой задачи для слоя $z\in[h, H]$:

$$\{\hat{L}(p)\,\Psi_{0k} = 0,\quad \Psi_{0k}\big|_{\Gamma_H} = 0,\quad \Psi_{0k}\big|_{\Gamma_h^+} = \check{f}_{\mathrm{d}}(s^+; p, s) \tag{49}$$

с источником

$$\check{f}_{\mathrm{d}}(s^+; p, s) = F[f_\delta(s^+; r_\perp, s)] = \delta(s - s^+).$$

Фурье-образ вектор-функции влияния есть вектор ПЧХ

$$\boldsymbol{\Psi} \equiv F[\boldsymbol{\Theta}] = \{\Psi_a, \Psi_{0k}\},$$

компонентами которого являются ПЧХ атмосферы $\Psi_a(s^-; z, p, s)$ и океана $\Psi_{0k}(s^+; z, p, s)$.

Для вектор-функции $\check{\mathbf{f}} = \{\check{f}_a(s_*; h, p, s), \check{f}_{0k}(s_*; h, p, s)\}$ с параметрами s_* определим векторный линейный функционал ($s \in \Omega$):

$$(\boldsymbol{\Psi}, \check{\mathbf{f}}) = \{(\Psi_a, \check{f}_a), (\Psi_{0k}, \check{f}_{0k})\},$$

компоненты которого – Фурье-образы линейных функционалов (31)–(32):

$$[(\boldsymbol{\Psi}_a, \check{f}_a)](s_*; z, p, s) = F[(\Theta_a, f_a)] = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega^-} \Psi_a(s^-; z, p, s)\,\check{f}_a(s_*; h, p, s^-)\,ds^-,\quad z \in [0, h]; \tag{50}$$

$$[(\Psi_{0k}, \check{f}_{0k})](s_*; z, p, s) = F[(\Theta_{0k}, f_{0k})] = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega^+} \Psi_{0k}(s^+; z, p, s)\,\check{f}_{0k}(s_*; h, p, s^+)\,ds^+,\quad z \in [h, H]. \tag{51}$$

Взаимодействие излучения с границей раздела в Фурье-образах описывается векторным функционалом, ядрами которого являются ПЧХ атмосферы и океана:

$$[\hat{Q}\,\check{\mathbf{f}}](h,p,s) \equiv F[\hat{P}\,\mathbf{f}] = \hat{G}(\mathbf{\Psi},\,\check{\mathbf{f}}) = \begin{bmatrix} \check{R}_1(\Psi_a,\check{f}_a) + \check{T}_{21}(\Psi_{0k},\check{f}_{0k}) \\ \check{T}_{12}(\Psi_a,\check{f}_a) + \check{R}_2(\Psi_{0k},\check{f}_{0k}) \end{bmatrix}, \tag{52}$$

где матрица операторов

$$\hat{G} \equiv \begin{bmatrix} \check{R}_1 & \check{T}_{21} \\ \check{T}_{12} & \check{R}_2 \end{bmatrix}.$$

Проведем Фурье-преобразование выражений (34)–(37) и найдем явные выражения компонент функционала (52):

$$F[\hat{R}_1(\Theta_a,f_a)](s_*;h,p,s) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega^-} ds^- \int\limits_{\Omega^+} ds^+ \left\{ \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \check{q}_1\,(p-p',s,s^+)\,\check{f}_a(s_*;h,p',s^-)\,\Psi_a(s^-;z,p',s^+)\,dp' \right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega^-} ds^- \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \check{f}_a(s_*;h,p',s^-)\,dp' \int\limits_{\Omega^+} \Psi_a(s^-;z,p',s^+)\,\check{q}_1(p-p',s,s^+)\,ds^+ =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dp' \int\limits_{\Omega^+} \check{q}_1(p-p',s,s^+)\,[(\Psi_a,\check{f}_a)](s_*;h,p',s^+)ds^+ = [\check{R}_1(\Psi_a,\check{f}_a)](s_*;h,p,s). \tag{53}$$

Аналогично находим

$$F[\hat{R}_2(\Theta_{0k},f_{0k})](s_*;h,p,s) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dp' \int\limits_{\Omega^-} \check{q}_2(p-p',s,s^-)\,[(\Psi_{0k},\check{f}_{0k})](s_*;h,p',s^-)\,ds^- =$$

$$= [\check{R}_2(\Psi_{0k},\check{f}_{0k})](s_*;h,p,s); \tag{54}$$

$$F[\hat{T}_{12}(\Theta_a,f_a)](s_*;h,p,s) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dp' \int\limits_{\Omega^+} \check{t}_{12}(p-p',s,s^+)\,[(\Psi_a,\check{f}_a)](s_*;h,p',s^+)\,ds^+ =$$

$$= [\check{T}_{12}(\Psi_a,\check{f}_a)](s_*;h,p,s); \tag{55}$$

$$F[\hat{T}_{21}(\Theta_{0k},f_{0k})](s_*;h,p,s) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dp' \int\limits_{\Omega^-} \check{t}_{21}\,(p-p',s,s^-)\,[(\Psi_{0k},\check{f}_{0k})](s_*;h,p',s^-)\,ds^- =$$

$$= [\check{T}_{21}(\Psi_{0k},\check{f}_{0k})](s_*;h,p,s). \tag{56}$$

Условие изопланарности в (53)–(56) не выполняется, поэтому

$$\check{R}_1(\Psi_a,\check{f}_a) \neq (\check{R}_1\,\Psi_a,\check{f}_a),\ \check{R}_2(\Psi_{0k},\check{f}_{0k}) \neq (\check{R}_2\,\Psi_{0k},\check{f}_{0k});$$

$$\check{T}_{21}(\Psi_{0k},\check{f}_{0k}) \neq (\check{T}_{21}\,\Psi_{0k},\check{f}_{0k}),\ \check{T}_{12}(\Psi_a,\check{f}_a) \neq (\check{T}_{12}\,\Psi_a,\check{f}_a).$$

При $n = 2$ решение краевой задачи (28) в Фурье-образах определяется через ПЧХ $\Psi_a(s^-;z,p,s)$:

$$\check{\Phi}_{a,2}(z, p, s) = (\Psi_a, F[\hat{R}_1\, \Phi_{a,1}]) + (\Psi_a, F[\hat{T}_{21}\, \Phi_{0k,1}]),$$

а решение краевой задачи (29) – через ПЧХ $\Psi_{0k}(\overset{+}{s}; z, p, s)$:

$$\check{\Phi}_{0k,2}(z, p, s) = (\Psi_{0k}, F[\hat{R}_2\, \Phi_{0k,1}]) + (\Psi_{0k}, F[\hat{T}_{12}\, \Phi_{a,1}]).$$

Компоненты второго приближения получаем в явном виде:

$$\check{\Phi}_{a,2}(z, p, s) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega^-} \Psi_a(\bar{s}_2; z, p, s)\, d\bar{s}_2 \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dp_1 \int\limits_{\Omega^+} \check{q}_1(p - p_1, \bar{s}_2, \overset{+}{s}_1) \times$$

$$\times \left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega^-} \Psi_a(\bar{s}_1; h, p_1, \overset{+}{s}_1)\, \check{E}_a(p_1, \bar{s}_1)\, d\bar{s}_1\right\} d\overset{+}{s}_1 + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega^-} \Psi_a(\bar{s}_2; z, p, s)\, d\bar{s}_2 \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dp_1 \int\limits_{\Omega^-} \check{t}_{21}(p - p_1, \bar{s}_2, \bar{s}_1) \times$$

$$\times \left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega^+} \Psi_{0k}(\overset{+}{s}_1; h, p_1, \bar{s}_1)\, \check{E}_{0k}(p_1, \overset{+}{s}_1)\, d\overset{+}{s}_1\right\} d\bar{s}_1 = (\Psi_a, [\check{R}_1(\Psi_a, \check{E}_a)]) + (\Psi_a, [\check{T}_{21}(\Psi_{0k}, \check{E}_{0k})]);$$

$$\check{\Phi}_{0k,2}(z, p, s) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega^+} \Psi_{0k}(\overset{+}{s}_2; z, p, s)\, d\overset{+}{s}_2 \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dp_1 \int\limits_{\Omega^-} \check{q}_2(p - p_1, \overset{+}{s}_2, \bar{s}_1) \times$$

$$\times \left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega^+} \Psi_{0k}(\overset{+}{s}_1; h, p_1, \bar{s}_1)\, \check{E}_{0k}(p_1, \overset{+}{s}_1)\, d\overset{+}{s}_1\right\} d\bar{s}_1 + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega^+} \Psi_{0k}(\overset{+}{s}_2; z, p, s)\, d\overset{+}{s}_2 \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dp_1 \int\limits_{\Omega^+} \check{t}_{12}\,(p - p_1, \overset{+}{s}_2, \overset{+}{s}_1) \times$$

$$\times \left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega^-} \Psi_a(\bar{s}_1; h, p_1, \overset{+}{s}_1)\, \check{E}_a(p_1, \bar{s}_1)\, d\bar{s}_1\right\} d\overset{+}{s}_1 = (\Psi_{0k}, [\check{R}_2(\Psi_{0k}, \check{E}_{0k})]) + (\Psi_{0k}, [\check{T}_{12}(\Psi_a, \check{E}_a)]).$$

Запишем три первые приближения в векторной операторной форме, используя определение операции (52):

$$\check{\mathbf{\Phi}}_1 = \begin{bmatrix} \check{\Phi}_{a,1} \\ \check{\Phi}_{0k,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\Psi_a, \check{E}_a) \\ (\Psi_{0k}, \check{E}_{0k}) \end{bmatrix} = (\mathbf{\Psi}, \check{\mathbf{E}});$$

$$\check{\mathbf{F}}_1 = \hat{G}\,\check{\mathbf{\Phi}}_1 = \hat{G}\,(\mathbf{\Psi}, \check{\mathbf{E}}) = \hat{Q}\,\check{\mathbf{E}};$$

$$\check{\mathbf{\Phi}}_2 = (\mathbf{\Psi}, \check{\mathbf{F}}_1) = (\check{\mathbf{\Psi}}, \hat{Q}\,\check{\mathbf{E}}) = (\mathbf{\Psi}, \hat{G}\,\check{\mathbf{\Phi}}_1) = (\mathbf{\Psi}, \hat{G}(\mathbf{\Psi}, \check{\mathbf{E}}));$$

$$\check{\mathbf{F}}_2 = \hat{G}\,\check{\mathbf{\Phi}}_2 = \hat{G}\,(\mathbf{\Psi}, \check{\mathbf{F}}_1) = \hat{Q}\,\check{\mathbf{F}}_1 = \hat{Q}^2\,\check{\mathbf{E}};$$

$$\check{\mathbf{\Phi}}_3 = (\mathbf{\Psi}, \check{\mathbf{F}}_2) = (\mathbf{\Psi}, \hat{G}\,\check{\mathbf{\Phi}}_2) = (\mathbf{\Psi}, \hat{Q}\,\check{\mathbf{F}}_1) = (\mathbf{\Psi}, \hat{Q}^2\,\check{\mathbf{E}}).$$

Между двумя последовательными n-приближениями имеет место рекуррентная связь

$$\check{\mathbf{\Phi}}_n = (\mathbf{\Psi}, \hat{G}\,\check{\mathbf{\Phi}}_{n-1}) = (\mathbf{\Psi}, \hat{Q}^{n-1}\,\check{\mathrm{E}}),$$

в которой матричный оператор описывает в Фурье-образах один акт взаимодействия излучения с границей раздела и при этом учитывается многократное рассеяние в обеих средах. В результате

$$\check{\mathbf{\Phi}} = \sum_{n=1}^{\infty} \check{\mathbf{\Phi}}_n = (\mathbf{\Psi}, \check{\mathbf{E}}) + \left(\mathbf{\Psi}, \sum_{n=1}^{\infty} \hat{Q}^n\,\check{\mathbf{E}}\right) = (\mathbf{\Psi}, \hat{Y}\,\check{\mathbf{E}});$$

$$\hat{Y}\,\check{\mathbf{E}} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \hat{Q}^n\,\check{\mathbf{E}} \tag{57}$$

есть сумма ряда Неймана (в Фурье-образах) по кратности прохождения излучения через границу раздела с учетом многократного рассеяния в обеих средах. Представление

$$\overset{\vee}{\mathbf{\Phi}} = (\mathbf{\Psi}, \hat{Y}\overset{\vee}{\mathbf{E}}) \tag{58}$$

есть оптический передаточный оператор системы «атмосфера–океан», устанавливающий явную связь Фурье-образа измеряемого излучения с Фурье-образом «сценария» (57) на границе раздела. При этом выражение «сценария» (57) с помощью ПЧХ атмосферы и океана описывает явную связь с характеристиками отражения и пропускания границы раздела при заданном ее освещении.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-05-08542).

1. Численные решения задач атмосферной оптики// Сборник научных трудов ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР под редакцией М.В. Масленникова и Т.А. Сушкевич. М.: ИПМ АН СССР, 1984. 234 с.
2. Сушкевич Т.А., Стрелков С.А., Иолтуховский А.А. Метод характеристик в задачах атмосферной оптики. М.: Наука, 1990. 296 с.
3. Сушкевич Т.А. Решение краевых задач теории переноса с неортотропными границами методом ПЧХ и ФВ. М., 1990. 32 с. (Препринт/ИПМ АН СССР, № 107).
4. Сушкевич Т.А. // Оптика атмосферы. 1991. Т. 4. № 10. С. 1084-1099.
5. Сушкевич Т.А., Куликов А.К., Максакова С.В. Решения общей краевой задачи теории переноса методом ПЧХ и ФВ для моделирования радиационных процессов в природных объектах. М., 1993. 28 с. (Препринт/ИПМ РАН, № 64).
6. Сушкевич Т.А., Куликов А.К., Максакова С.В. Оптический передаточный оператор при дистанционном зондировании отражающей поверхности. М., 1994. 28 с. (Препринт/ИПМ РАН, № 15).
7. Сушкевич Т.А., Куликов А.К., Максакова С.В. // Оптика атмосферы и океана. 1994. Т. 7. № 6. С. 726–747.
8. Сушкевич Т.А. // Доклады РАН. 1994. Т. 339. № 2. С. 171-175.
9. Сушкевич Т.А., Куликов А.К., Курдюкова О.С., Максакова С.В. Моделирование излучения системы атмосфера–океан с выделением рэлеевского рассеяния. М., 1992. 44 с. (Препринт/ИПМ РАН).
10. Сушкевич Т.А. Моделирование излучения системы атмосфера–океан методом функций влияния. М., 1992. 16 с. (Препринт/ИПМ РАН, № 36).
11. Сушкевич Т.А. // Оптика атмосферы и океана. 1992. Т. 5. № 8. С. 812-822.
12. Сушкевич Т.А., Куликов А.К., Максакова С.В., Стрелков С.А. Оптический передаточный оператор системы атмосфера–океан с горизонтально-неоднородной границей раздела. М., 1994. 28 с. (Препринт/ИПМ РАН, № 77).

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН,
г. Москва

Поступила в редакцию
9 марта 1995 г.

T.A. Sushkevich, A.K. Kulikov, S.V. Maksakova, S.A. Strelkov. **To the Theory of Optical Transfer Operator of the Atmosphere–Ocean System.**

Optical transfer operator (OTO) of the atmosphere–ocean system (AOS) as a three-dimensional plane layer with the horizontally inhomogeneous reflecting and refracting dividing border of two media is formulated by means of the influence functions (IF) and spatial-frequency characteristics (SFCH) method using the perturbation theory series. The case is treated first when no splitting of spattial and angular variables is used in the refraction and reflection coefficients. Such an OTO has the most general form and is expressed in terms of linear IF and SFCH. The solution of the problem for total AOS is reduced to the solution of two problems for each medium by itself.