«Оптика атмосферы», **2**, № 1 (1989) УДК 531.536

В.В. Учайкин, В.А. Литвинов

ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ В ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЙ

В работе предлагается новый метод распространения результатов решения отдельных задач на более широкую, чем в теории возмущений, область, не превосходящий по сложности алгоритма ее первого приближения. Рассмотрено применение метода для решения волнового и кинетического уравнений, описывающих распространение излучений в атмосфере. Показано, что новый метод позволяет описать изменение искомых функционалов более чем на порядок.

Важнейшей особенностью расчетов переноса излучений в атмосфере является неопределенность (точнее, многовариантность) состояния среды, в которой распространяется излучение. Особенно это важно в проблеме зондирования атмосферы, решение которой требует проведения большого количества расчетов поля излучения для различных возможных состояний атмосферы. Поскольку каждый из таких расчетов требует обычно больших затрат машинного времени, актуальной является задача извлечения максимума информации при минимальном количестве расчетов. Одним из методов, позволяющих сократить объем проводимых расчетов, является широко известный в теории переноса метод возмущений, пригодный для аппроксимации решения близких задач по результатам решения одной задачи.

В настоящей работе предлагается новый метод распространения результатов решения отдельных задач на более широкую, чем в теории возмущений, область, не превосходящий по сложности алгоритма ее первого приближения.

Пусть необходимо вычислить функционал $J = (D, \Phi)$ от решения линейного неоднородного уравнения $\mathrm{L}\Phi = S$ для семейства операторов $\mathrm{L} \in L$. при фиксированных функциях D и S. Если интересующая нас область операторного пространства L достаточно мала, то решение этой задачи дается теорией возмущений: выбирается основной оператор $\mathrm{L}_0 \in L$, находятся основное решение Φ_0 и соответствующая сопряженная функция Φ_0^+ и строится известным образом ряд теории возмущений [1, 2]:

$$J = J_0 - (\Phi_0^+,\ \mathrm{V}_0\Phi_0) + (\Phi_0^+,\ \mathrm{V}_0\mathrm{G}_0\mathrm{V}_0\Phi_0) - \ldots,$$

где $\mathrm{V}_0 = \mathrm{L} - \mathrm{L}_0$, а $\mathrm{G}_0 = \mathrm{L}_0^{-1}$ — оператор Грина невозмущенной задачи. Идея нового метода заключается в том, что если область L недостаточно мала для применения теории возмущений, то необходимо выбрать в ней несколько основных („опорных”) операторов L_1, $\mathrm{L}_2,\ldots$ решить задачу для каждого из них (то есть, найти Φ_i и $\Phi_i^+, I = 1,\ 2,\ldots$), а затем, воспользовавшись стационарной (т. е. удовлетворяющей вариационному принципу $\delta J = 0$) формой [1]

$$J = (\Phi^+,\ S)\,(D,\ \Phi)/(\Phi^+,\ \mathrm{L}\Phi),$$

представить входящие в нее Φ и Φ^+ в виде линейных комбинаций опорных решений

$$\Phi = \sum_i C_i \Phi_i,\ \ \Phi^+ = \sum_i C_i^+ \Phi_i^+.$$

В результате получим

$$J = \sum_{ij} C_i^+ C_j J_i J_j \Big/ \sum_{\kappa l} C_\kappa^+ C_l \mathrm{L}_{\kappa l}, \tag{1}$$

где $J_i = (\Phi_i^+, S) = (D, \Phi_i)$, $\mathrm{L}_{\kappa l} = (\Phi_\kappa^+, \mathrm{L}\Phi_i)$.

Из условия стационарности, принимающего в этом случае вид

$$\partial J/\partial C_n^+ = \partial J/\partial C_n = 0,$$

вытекают уравнения для постоянных коэффициентов C_i^+ и C_j.

$$\sum_{ij} C_i^+ C_j\,[J_n \mathrm{L}_{ij} - J_j \mathrm{L}_{in}] = 0,\ \ \sum_{ij} C_i^+ C_j\,[J_n \mathrm{L}_{ij} - J_i \mathrm{L}_{nj}] = 0.$$

В случае двух опорных операторов

$$C_1^+/C_2^+ = -(J_1 L_{22} - J_2 L_{21})/(J_1 L_{12} - J_2 L_{11}),$$
$$C_1/C_2 = -(J_1 L_{22} - J_2 L_{12})/(J_1 L_{21} - J_2 L_{11}).$$

Введя обозначения $V_i = L - L_i$ и учитывая, что

$$(L_i)_{\kappa l} = \begin{cases} J_\kappa, & \text{если } i = l, \\ J_l, & \text{если } i = \kappa, \end{cases}$$

приведем отношения коэффициентов (от которых только и зависит результат) к виду

$$C_1^+/C_2^+ = -(J_1 (V_2)_{22} - J_2 (V_2)_{21})/(J_1 (V_1)_{12} - J_2 (V_1)_{11});$$
$$C_1/C_2 = -(J_1 (V_2)_{22} - J_2 (V_2)_{12})/(J_1 (V_1)_{21} - J_2 (V_1)_{11}). \quad (2)$$

Отметим, что для совпадения коэффициентов C^+ и C достаточно, чтобы матричные элементы (V_1) и (V_2) были симметричными ($(V_i)_{\kappa l} = (V_i)_{l\kappa}$).

Подчеркнем три важные, на наш взгляд, особенности предложенного алгоритма. Во-первых, он реализует в определенном смысле идею интерполяции решения по двум в общем случае нескольким) известным решениям в области L, тогда как обычная теория возмущений носит скорее характер экстраполяции (зная решение в одной «точке» L_0, мы пытаемся распространить его на область L). Во-вторых, найденное нами решение не только совпадает с J_1 (J_2) при $L = L_1$ (L_2), но в окрестностях этих операторов совпадает с результатами теории малых возмущений, построенной около L_1 (L_2). Действительно, устремляя V_1 к нулю, получим $C_2^+ / C_1^+ \equiv \varepsilon^+ \to 0$, $C_2 / C_1 \equiv \varepsilon \to 0$, в результате чего

$$J \approx \frac{J_1^2 + (\varepsilon^+ + \varepsilon) J_1 J_2}{J_1 + (V_1)_{11} + (\varepsilon^+ + \varepsilon) J_2} \approx J_1 - (V_1)_{11}.$$

В-третьих, вычисление входящих в окончательный результат матричных элементов $(V_i)_{\kappa l}$ по сложности расчетов эквивалентно вычислениям в теории малых возмущений, значительно более простым, чем во втором приближении этой теории.

Рассмотрим применение предлагаемого метода к решению простейших задач переноса излучения в двух моделях: кинетической и волновой.

В кинетической модели поле излучения описывается дифференциальной плотностью потока фотонов $\Phi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}, \lambda)$, удовлетворяющей интегро-дифференциальному уравнению

$$L\Phi = \boldsymbol{\Omega}\nabla\Phi + \Sigma_t\Phi - \Sigma_s \int\limits_{4\pi} d\Omega' g(\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Omega}')\,\Phi(\boldsymbol{\Omega}', \boldsymbol{r}, \lambda) = S(\boldsymbol{r}, \Omega, \lambda),$$

где $\Sigma_t(\boldsymbol{r}, \lambda)$ — коэффициент молекулярного поглощения и рассеяния на единице длины пути (полное сечение взаимодействия); Σ_s — коэффициент (сечение) рассеяния; g — индикатриса рассеяния; $S(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}, \lambda)$ — дифференциальная плотность источников фотонов с направлением движения $\boldsymbol{\Omega}$ и длиной волны λ. Сопряженное уравнение имеет вид

$$L^+\Phi^+ = -\boldsymbol{\Omega}\nabla\Phi^+ + \Sigma_t\Phi^+ - \Sigma_s \int\limits_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' g(\boldsymbol{\Omega}'\boldsymbol{\Omega})\,\Phi^+(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}', \lambda) = D(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}, \lambda).$$

В качестве численного примера рассмотрим простейшую задачу переноса частиц в однородной среде без рассеяния: в начале координат находится единичный точечный источник, испускающий частицы в положительном направлении оси z детектор регистрирует число частиц в плоскости $z = t$. Назовем это задачей А. В этом случае достаточно использовать сокращенное фазовое пространство $\{z\}$, $S(x) = \delta(z)$, $D = \delta(z - t)$, оператор L зависит от единственного параметра — сечения взаимодействия Σ:

$$L(\Sigma) = \frac{d}{dz} + \Sigma, \quad L^+ = -\frac{d}{dz} + \Sigma.$$

Основная и сопряженная функции имеют вид:

$$\Phi(z) = e^{-\Sigma z}, \quad \Phi^+(z) = e^{-\Sigma(t-z)}, \quad 0 \leqslant z \leqslant t.$$

Пусть $L_0 \equiv L(\Sigma_0)$ — основной оператор, в окрестности которого необходимо построить семейство решений, т.е. найти $J = J(\Sigma)$. Теория возмущений в этом случае дает

$$J(\Sigma) = \left[1 - \Delta\Sigma_0 t + \frac{1}{2}(\Delta\Sigma_0 t)^2 - \dots\right] J_0, \ \Delta\Sigma_0 = \Sigma - \Sigma_0.$$

Чтобы применить вариационный метод интерполяции, выберем два опорных оператора $L_1 = L(\Sigma_1)$ и $L_2 = L(\Sigma_2)$ так, чтобы $\Sigma_1 < \Sigma_0 < \Sigma_2$ и $(\Sigma_2 - \Sigma_0)t = (\Sigma_0 - \Sigma_1)t \equiv a$. Обозначив $\Delta\Sigma_0 t = \xi$, запишем матричные элементы:

$$(V_1)_{11} = (\xi + a) J_1, \ (V_2)_{22} = (\xi - a) J_2, \ (V_1)_{21} = \frac{\xi + a}{2a}(J_1 - J_2),$$
$$(V_2)_{12} = \frac{(\xi - a)}{2a}(J_1 - J_2), \ J_1 = e^a J_0, \ J_2 = e^{-a} J_0, \ J_0 = e^{-\Sigma_0 t}.$$

Отсюда

$$C_1^+ = C_1 = (\xi - a)[2a - 1 + e^{-2a}],$$
$$C_2^+ = C_2 = (\xi + a)[2a + 1 - e^{2a}].$$

Результаты расчета для $0{,}5 \le a \le 2{,}5$ приведены на рис. 1. Видно, что вариационный метод позволяет существенно расширить область воспроизведения результата (по сравнению с теорией возмущений): при $a = 1{,}5$ хорошо вычисляются вариации функционала на порядок в обе стороны, тогда как теория малых возмущений удовлетворительно описывает лишь 30—40%-ные изменения функционала. При больших a решение начинает заметно «провисать» в центральной области.

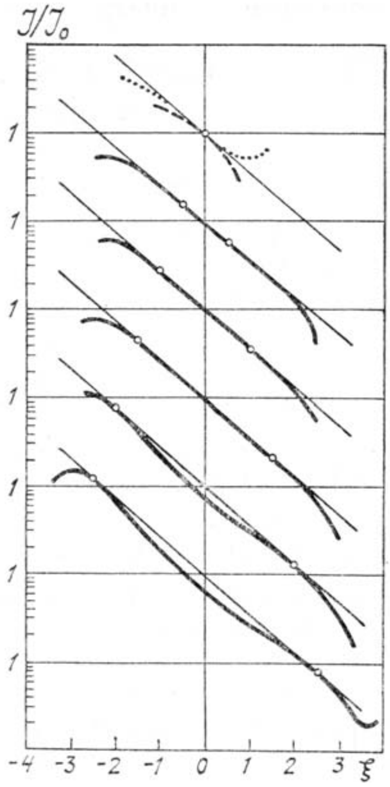

Рис. 1. Задача А. Светлые линии — точное решение; штриховые — первое приближение теории возмущений, точки — второе приближение; жирные линии — результаты вариационного метода, соответствующие значениям $a = 0{,}5, 1, 1{,}5, 2, 2{,}5$; кружочки — опорные точки

В волновой модели поле излучения описывается функцией, удовлетворяющей волновому уравнению. Ограничимся рассмотрением параболического уравнения для амплитуды волны [3]

$$2i\kappa \frac{\partial v}{\partial z} + \Delta_\perp v(z, \rho) + \kappa^2 (n(z, \rho) - n_0 + i\alpha(z, \rho)/\kappa) v = 0, \tag{3}$$

где $n(z, \rho)$ — показатель преломления; $\alpha(z, \rho)$ — коэффициент поглощения; κ — волновое число; $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$ — поперечная координата. Практически представляет интерес ситуация, когда нельзя пренебречь и дифракционными процессами и поглощением. В том случае, когда $2i\beta \equiv \kappa(n(z, \rho) - n_0 + i\alpha(z, \rho)/\kappa)$ не зависит от ρ, уравнение (3) при граничном условии

$$v(0, \rho) = [2\pi\sigma^2]^{-1} \exp(-\rho^2/2\sigma^2)$$

имеет аналитическое решение

$$v(z, \rho) = [2\pi(\sigma^2 + iz/\kappa]^{-1} \exp\{-\rho^2/2(\sigma^2 + iz/\kappa)\} \exp\left\{\int_0^z \beta(z')\,dz'\right\}. \quad (4)$$

Пусть нам требуется определить амплитуду поля излучения на плоскости $z = t$. В этом случае $D(z) = \delta(z - t)\,\delta(\rho - \rho_0)$ и $J = v(t, \rho_0)$. Введенный выше коэффициент β положим равным

$$\beta(\rho, z) = (5 - 4\exp(-\rho^2/2\sigma^2))\,\kappa^{-1}.$$

Назовем это задачей B. В том случае, когда $\sigma|d\beta/d\rho|\, z \ll 1$, можно воспользоваться теорией малых возмущений. В качестве опорного решения выберем решение уравнения (3) при $\beta = \beta_1 = \mathrm{const}$. Сопряженная функция опорного решения имеет вид

$$v^+(z, \rho) = [2\pi i(t - z)]^{-1} \exp\{-(\rho - \rho_0)^2/2i(t - z)\} \exp\left\{-\int_z^t \beta(z')\,dz'\right\}. \quad (5)$$

В том случае, когда $\Delta\beta t \geq 1$, теория малых возмущений неприменима. Проиллюстрируем метод вариационного интерполирования для задачи B. Выберем два опорных решения с $\beta_2 = 1/k$ и $\beta_1 = 5/k$. В этом случае $\beta_1 \leq \beta \leq \beta_2$. Для вычисления амплитуды волны v с заданным β воспользуемся полученными ранее соотношениями (1), (2) и опорными решениями (4) и (5). При вычислении матричных элементов $(V_i)_{kl}$ возникает необходимость численного интегрирования по переменной z.

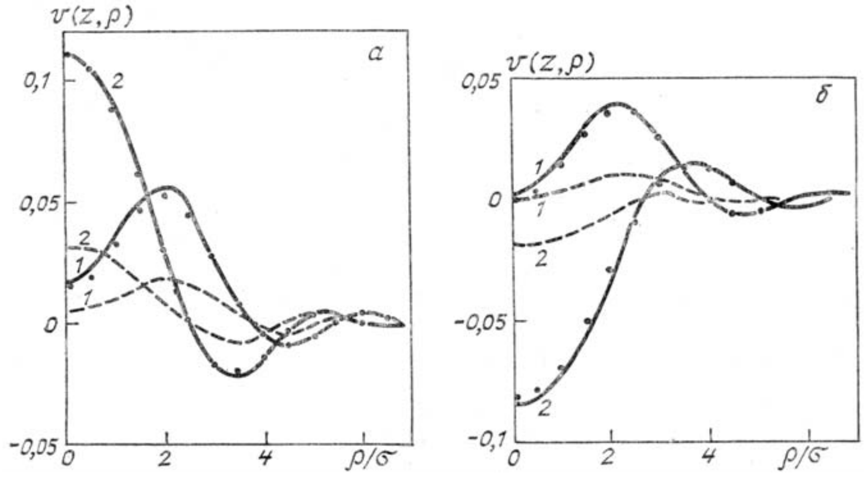

Рис. 2. Задача В. Светлые — точное решение; штриховые — первое приближение теории возмущений; точки — результат вариационного метода. *1* — Rev, *2* — Imv, а) $\Delta\beta t = 2{,}4$, б) $\Delta\beta t = 2{,}8$

Результаты расчетов приведены на рис. 2. Точное решение уравнения (3) находилось разностным методом. Отметим, что для выбранных глубин опорные решения отличаются более чем на порядок, и, как и предполагалось ранее, теория малых возмущений не описывает выбранное изменение функции $v(z, \rho)$. Данные же вариационного метода интерполирования практически совпадают с точным решением уравнения (3).

1. Марчук Г.И., Орлов В.В. К теории сопряженных функций //В кн.: Нейтронная физика. М.: Госатомиздат. 1961. С. 30—45.
2. Учайкин В.В. К расчету возмущений высших порядков в теории переноса гамма-излучения. //Изв. вузов. Физика. 1968. № 10. С. 88—91.

3. Р ы т о в С. М., К р а в ц о в Ю. А., Т а т а р с к и й В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. М.: Наука. 1978. 463 с.

Алтайский госуниверситет,
Барнаул

Поступила в редакцию
11 июля 1988 г.

V. V. U t c h a i k i n, V. A. L i t v i n o v. **Variational Method of Interpolation in the Radiation Transfer Theory**.

A new variational interpolation method is reported. The proposed procedure is based on the extension of solutions of certain unperturbed problems to a number of cases where perturbation theory is not valid. The algorithm adopted should not be more complicated than that of the first-order perturbation theory. To illustrate the method, examples of solutions of the wave and kinetic models for the radiative transfer are considered.