«Оптика атмосферы», **2**, № 1 (1989) УДК 535.317.1

П.А. Бакут, С.Д. Польских, К.Н. Свиридов, Н.Ю. Хомич

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЕРОЯТНОСТНОГО ПОДХОДА К ДОСТИЖЕНИЮ ДИФРАКЦИОННОГО РАЗРЕШЕНИЯ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ В УСЛОВИЯХ АТМОСФЕРНОГО «ВИДЕНИЯ»

Анализируется возможность достижения дифракционного разрешения системы атмосфера—телескоп при короткоэкспозиционной регистрации изображения изопланатичного стационарного объекта. Введено понятие мгновенного пространственного радиуса корреляции атмосферных искажений поля светового излучения и статистическими методами машинного моделирования получено гамма-распределение его вероятности. На основании полученного распределения исследована вероятность хорошего «видения» и для различных соотношений диаметра телескопа D и параметра Фрида r_0 найдено требуемое число короткоэкспозиционных регистраций изображений объекта для получения среди них хотя бы одного дифракционно-ограниченного. Рассмотрены трудности практической реализации вероятностного подхода.

1. Введение

Наличие турбулентной атмосферы Земли между наблюдаемым объектом и приемной апертурой телескопа приводит к тому, что реальная разрешающая способность системы атмосфера — телескоп определяется не диаметром приемной апертуры телескопа D, а статистическими характеристиками атмосферных искажений светового излучения r_0 и в среднем ограничивается величиной порядка одной угловой секунды. Этого недостаточно для решения целого ряда практически важных задач наблюдательной астрономии и приводит к возникновению проблемы «видения» через турбулентную атмосферу. Одним из классических методов решения проблемы «видения» является вероятностный подход, основанный на пассивном ожидании моментов хорошего дифракционного «видения».

Действительно, в силу случайности атмосферных искажений поля светового излучения существует вероятность того, что в некоторые моменты времени эти искажения на приемной апертуре телескопа могут быть пренебрежимо малы. При этом либо мгновенная дисперсия атмосферных искажений фазы $\Theta(\rho)$ светового излучения на приемной апертуре телескопа $\sigma^2_{\Theta D}$ оказывается меньше единицы [1], либо величина мгновенного пространственного радиуса корреляции атмосферных искажений поля светового излучения $\tilde{r}_0$ оказывается больше величины диаметра приемной апертуры телескопа D. Очевидно, что короткоэкспозиционные изображения наблюдаемого объекта, регистрируемые в эти случайные моменты времени, могут характеризоваться дифракционным разрешением системы атмосфера—телескоп [2].

Исследуем вероятность $P(\tilde{r}_0 \geq D)$ подобных ситуаций получения дифракционно-ограниченных короткоэкспозиционных изображений в зависимости от соотношения пространственных характеристик атмосферы r_0 и телескопа D, что позволит нам для различных соотношений D и r_0 оценить среднее число короткоэкспозиционных изображений объекта $K \sim 1/P$, которое необходимо зарегистрировать, чтобы получить среди них хотя бы одно дифракционно-ограниченное.

Для проведения настоящих исследований необходимо: во-первых, определить статистические характеристики мгновенного пространственного радиуса корреляции атмосферных искажений поля светового излучения $\tilde{r}_0$ и, во-вторых, оценить вероятность удовлетворения неравенства $r_0 \geq D$, обеспечивающего достижение верхнего (дифракционного) предела разрешения системы атмосфера—телескоп в короткоэкспозиционном изображении объекта.

2. Статистические характеристики величины

Решение данной задачи начнем с определения величины мгновенного пространственного радиуса корреляции атмосферных искажений поля светового излучения.

Ранее [3] была введена величина среднего пространственного радиуса корреляции атмосферных искажений поля светового излучения r_0 (параметр Фрида), определяемая через среднюю оптическую передаточную функцию (ОПФ) системы атмосфера—телескоп для длинноэкспозиционного изображения [4] $\langle \tau^{\text{Д-Э}}_{\text{А-Т}}(\rho, \lambda) \rangle$, как

$$\int \langle \tau^{\text{Д-Э}}_{\text{А-Т}}(\rho, \lambda) \rangle d\rho = \int \exp\left\{-3{,}44\left[\frac{|\rho|}{r_0(\lambda, z^0)}\right]^{5/3}\right\} d\rho = \frac{\pi r_0^2(\lambda, z^0)}{4} \qquad (1)$$

и представленная [5] в виде

$$r_0(\lambda,\ z^0) = r_0(\lambda_0,\ 0^0)\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^{6/5}(\sec z^0)^{-3/5}, \tag{2}$$

где $r_0(\lambda_0,\ 0^0)$ — величина среднего пространственного радиуса корреляции атмосферных искажений поля светового излучения для вертикальной трассы распространения ($z^0 = 0^0$) на длине волны λ_0, определяемая [3]

$$r_0(\lambda_0,\ 0^0) = \left[0{,}423\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 \int\limits_0^L C_n^2(h)\left(\frac{h}{L}\right)^{5/3} dh\right]^{-3/5},$$

где $C_n^2(h)$ — зависимость структурной характеристики показателя преломления от высоты h над поверхностью Земли; L — длина турбулентной трассы. В дальнейшем для упрощения записи мы опустим зависимость всех величин от длины волны λ_0 и зенитного угла z^0.

Таким образом, аналогично (1), анализируя среднее разрешение системы атмосфера — телескоп для короткоэкспозиционных изображений, величину среднего значения мгновенного пространственного радиуса корреляции атмосферных искажений поля светового излучения $\langle\tilde{r}_0\rangle$ можно определить через среднюю ОПФ короткоэкспозпционного изображения [4]

$$< \tau_{\text{А}-\text{Т}}^{\text{к}-\text{э}}(\rho) >,$$

$$\int < \tau_{\text{А}-\text{Т}}^{\text{к}-\text{э}}(\rho) > d\rho = \int \exp\left\{-3{,}44\left[\frac{|\rho|}{r_0}\right]^{5/3}\left[1-\left(\frac{|\rho|}{D}\right)^{1/3}\right]\right\} d\rho = \frac{\pi < \tilde{r}_0 >^2}{4}, \tag{4}$$

и на основании несложных преобразований легко показать, что она связана с параметром Фрида (2) соотношением

$$< \tilde{r}_0 > \simeq r_0\left[1 + 0{,}29\left(\frac{r_0}{D}\right)^{1/3}\right] \tag{5}$$

при

$$D \geq 3{,}5 r_0 \tag{6}$$

и оказывается на (10 — 30)% больше, чем r_0 для телескопов средних диаметров (D = 1 — 2 м), что свидетельствует об аналогичном выигрыше в среднем разрешении при переходе от длинноэкспозиционной регистрации изображений к короткоэкспозиционной регистрации.

В соответствии с определениями (1) и (4) естественно определить величину мгновенного пространственного радиуса корреляции атмосферных искажений поля светового излучения $\tilde{r}_0$ через мгновенную ОПФ (ОПФ короткоэкспозиционыого изображения) системы атмосфера — телескоп как

$$\int |\tau_{\text{А}-\text{Т}}^{\text{к}-\text{э}}(\rho)|\, d\rho = \frac{\pi \tilde{r}_0^2}{4}, \tag{7}$$

где мгновенная ОПФ системы атмосферы — телескоп $\tau_{\text{А-Т}}^{\text{к-э}}(\boldsymbol{\rho})$ определяемая [6], представлена в виде

$$\tau_{\text{А}-\text{Т}}^{\text{к}-\text{э}}(\rho) = \frac{1}{S_\text{а}} \int W(\rho_1) W^*(\rho_1 - \rho)\, \Delta(\rho_1)\, \Delta^*(\rho_1 - \rho)\, d\rho_1, \tag{8}$$

где $S_\text{а}$ — площадь приемной апертуры телескопа, $S_\text{а} = \dfrac{\pi D^2}{4}$; $W(\rho)$ — апертурная функция, определяемая как $W(\boldsymbol{\rho}) = A(\boldsymbol{\rho})e^{i\Theta_\text{Т}(\boldsymbol{\rho})}$, $A(\rho)$ — функция зрачка, равная единице в пределах апертуры и нулю вне ее, а $\Theta_\text{Т}(\rho)$ — функция аберрационных искажений телескопа; $\Delta(\rho)$ — функция атмосферного изменения параметров светового излучения, определяемая при условии пренебрежения амплитудными атмосферными флуктуациями как

$$\Delta(\rho) = \exp\{j\Theta_\text{А}(\rho)\},$$

где $\Theta_A(\rho)$ – функция атмосферных фазовых флуктуаций светового излучения, представляющая собой двумерный гауссовский случайный процесс с нулевым средним значением $\langle\Theta_A(\boldsymbol{\rho})\rangle = 0$ и структурной функцией вида

$$D(\rho) = <[\Theta(\rho_1) - \Theta(\rho_2)]^2> = 6{,}88\left[\frac{|\rho_1 - \rho_2|}{r_0}\right]^{5/3}. \tag{9}$$

Для нахождения распределения вероятности величины $\tilde{r}_0$ определяемой (7), в соответствии с методикой, изложенной нами ранее [7], осуществляли моделирование на ЭВМ случайных мгновенных ОПФ системы атмосфера – телескоп. По полученным мгновенным ОПФ в соответствии с определением (7) получали для различных отношений D/r_0 выборки случайных значений величины $\tilde{r}_0$. Размер каждой такой выборки был равен 1200. Поведение выборочного среднего $\langle\tilde{r}_0\rangle$ (кривая *1*) и относительной выборочной дисперсии $\sigma^2_{\tilde{r}_0}/\langle\tilde{r}_0\rangle^2$ (кривая *2*) в зависимости от величины отношения D/r_0 показано на рис. 1. Здесь же для сравнения представлена аналитическая зависимость для $\langle\tilde{r}_0\rangle$, полученная на основании (6) (кривая *3*), а также зависимость r_0 (кривая *4*). Сравнение полученных зависимостей свидетельствует о хорошем согласии теории и эксперимента.

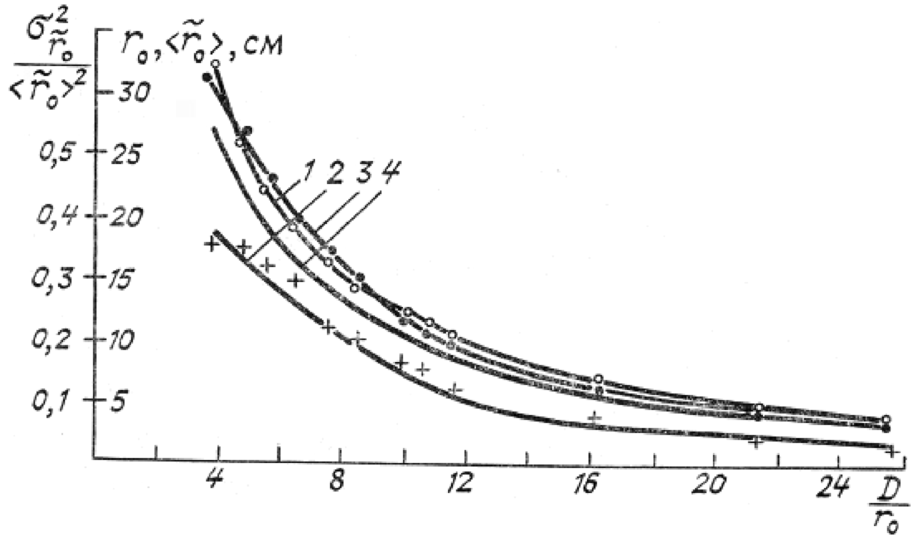

Рис. 1. Статистические характеристики величины $\tilde{r}_0$: *1* – среднее значение $\langle\tilde{r}_0\rangle$; *2* – относительная дисперсия $\sigma^2_{\tilde{r}_0}/\langle\tilde{r}_0\rangle^2$; *3* – зависимость $\langle\tilde{r}_0\rangle$ (5); *4* – параметр Фрида r_0

На рис. 2 представлены гистограммы распределений вероятности величины $\tilde{r}_0$ полученные путем статистической обработки 1200 ее выборочных значений, синтезированных при различных отношениях D/r_0. Здесь же для сравнения представлены аналитические зависимости для трех возможных законов распределения вероятности величины $\tilde{r}_0$ а именно:

– логарифмически-нормального (кривая *1*)

$$p(\tilde{r}_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\ln\tilde{r}_0}} \cdot \frac{1}{\tilde{r}_0} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\ln\tilde{r}_0 - <\ln\tilde{r}_0>}{\sigma_{\ln\tilde{r}_0}}\right]^2\right\}; \tag{10}$$

– гамма-распределения (кривая *2*)

$$p(\tilde{r}_0) = \frac{\tilde{r}_0^{\alpha-1}\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha) <\tilde{r}_0>^\alpha} \exp\left\{-\frac{\alpha\tilde{r}_0}{<\tilde{r}_0>}\right\}, \tag{11}$$

где

$$\alpha = \frac{<\tilde{r}_0>^2}{\sigma^2_{\tilde{r}_0}}, \ \Gamma(a) \text{ –гамма-функция;} \tag{12}$$

— нормального распределения (кривая *3*)

$$p(\tilde{r}_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\tilde{r}_0}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\tilde{r}_0 - <\tilde{r}_0>}{\sigma_{\tilde{r}_0}}\right]^2\right\}, \tag{13}$$

полученные для средних $\langle \tilde{r}_0 \rangle$ и $\langle \ln \tilde{r}_0 \rangle$ и дисперсий $\sigma^2_{\tilde{r}_0}$ и $\sigma^2_{\ln \tilde{r}_0}$, вычисленных на основании экспериментальных гистограмм.

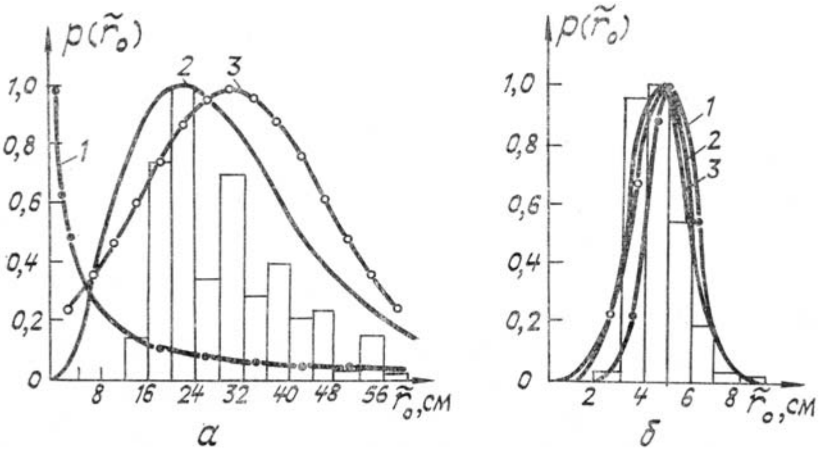

Рис. 2. Гистограммы распределения вероятностей величины $\tilde{r}_0$: *а* — $D/r_0 = 3{,}75$; *б* — $D/r_0 = 21$; *1* — логнормальное распределение; *2* — гамма-распределение; 3 — нормальное распределение

В результате визуального сравнения теоретически полученных зависимостей распределений вероятности величины $\tilde{r}_0$ с экспериментально полученными гистограммами можно сделать качественный вывод, что в диапазоне изменения отношения D/r_0, определяемом неравенством (6), гамма-распределение вероятности (11) лучше согласуется с экспериментальными данными, чем логарифмически-нормальное (10) и нормальное (13) распределения.

Таблица 1

$<\tilde{r}_0^m>/<\tilde{r}_0>^m$

D/r_0 (λ, z^0)

m	3,75				6,5				11,5				16			
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
2	1,4	1,4	1,28	3,8	1,23	1,23	1,22	3,15	1,096	1,096	1,095	2,39	1,076	1,076	1,076	1,53
3	2,81	2,51	1,88	19,1	2,1	1,81	1,69	13,4	1,32	1,31	1,29	7,93	1,26	1,25	1,23	3,6
4	7,24	5,49	3,03	109	5,34	3,08	2,54	64,9	1,74	1,68	1,6	19,1	1,61	1,53	1,48	12,7

21				25			
1	2	3	4	1	2	3	4
1,055	1,055	1,055	1,093	1,05	1,05	1,05	1,08
1,18	1,17	1,16	1,26	1,16	1,16	1,15	1,2
1,4	1,38	1,34	1,78	1,37	1,35	1,3	1,44

Примечание. 1 — эксперимент, 2 — гамма-распределение, 3 — нормальное распределение, 4 — логнормальное распределение.

Для более точного количественного сравнения экспериментальных гистограмм с теоретическими распределениями (10)—(13) были вычислены отношения моментов $\langle \tilde{r}_0^m \rangle / \langle \tilde{r}_0 \rangle^m$, представленные для $m = 2$, 3, 4 и различных D/r_0 в табл. 1. На основании анализа данных, представленных в табл. 1, во-первых, следует, что эксперимент хорошо согласуется с гамма-распределением вероятности (11) величины $\tilde{r}_0$ во всем диапазоне возможных значений отношения D/r_0 и, во-вторых, видно хорошее согласие эксперимента со всеми тремя теоретическими распределениями вероятности для величины $\tilde{r}_0$ при очень больших отношениях D/r_0 в силу центральной предельной теоремы, естественной нормализации распределений (10), (11) и стремления $\langle\tilde{r}_0\rangle$ к r_0 (5).

Заметим, что этот вывод находится в хорошем согласии с экспериментально полученными для больших телескопов [8] предположениями о близости закона распределения вероятности величины r_0 к логарифмически нормальному закону, который является допустимым приближением к истинному распределению вероятности величины $\tilde{r}_0$ при больших отношениях D/r_0.

В связи с тем, что при исследовании вероятностного подхода к достижению дифракционного разрешения системы атмосфера — телескоп наибольший интерес представляют сравнительно небольшие отношения D/r_0, необходимо при оценке вероятности хорошего «видения» ориентироваться на использование полученного выше гамма-распределения вероятности случайной величины $\tilde{r}_0$, являющегося наиболее точной аппроксимацией истинного распределения вероятности величины $\tilde{r}_0$ при любых отношениях D/r_0.

3. Вероятность достижения дифракционного разрешения системы атмосфера—телескоп в короткоэкспозиционных изображениях

В соответствии с выбранным нами критерием хорошего «видения», то есть в связи с упомянутой выше необходимостью удовлетворения неравенства

$$\tilde{r}_0 \geq D, \tag{14}$$

естественно определить вероятность хорошего (дифракционного) «видения» через гамма-распределение вероятности (11) величины $\tilde{r}_0$ как

$$P(\tilde{r}_0 \geqslant D) = \int_D^\infty p(\tilde{r}_0)\, d\tilde{r}_0. \tag{15}$$

Легко показать, что вероятность (15) удовлетворения неравенства (14) соответствует вероятности того, что дисперсия атмосферных фазовых искажений светового излучения на приемной апертуре телескопа диаметра D, определяемая [9] как

$$\sigma^2_{\Theta,D} \simeq 0{,}141[D/r_0]^{5/3}, \tag{16}$$

удовлетворяет неравенству

$$\sigma^2_{\Theta,D} \leq 0{,}141\,\text{рад}^2, \tag{17}$$

что является более жестким условием хорошего «видения», чем условие, использованное Фридом [1], а именно:

$$\sigma^2_{\Theta,D} \leq 1\,\text{рад}^2. \tag{18}$$

Значения вероятностей хорошего «видения», вычисленные на основании (15) с учетом (11) для различных отношений D/r_0, сведены в табл. 2 и представлены в логарифмическом масштабе на рис. 3.

Таблица 2

$D/r_0(\lambda, z^0)$	3,75	4,75	5,5	6,5
p	$2{,}19 \cdot 10^{-3}$	$7{,}02 \cdot 10^{-4}$	$4{,}65 \cdot 10^{-5}$	$5{,}53 \cdot 10^{-7}$

Полученная линейная зависимость $\ln P(\tilde{r}_0 \geq D)$ от отношения $[D/r_0]^2$ свидетельствует о возможности ее аппроксимации эмпирической зависимостью вида

$$P(\tilde{r}_0 \geqslant D) \simeq K_1 \exp\{-K_2 [D/r_0]^2\};\ D \geqslant 3{,}5r_0, \tag{19}$$

где значения коэффициентов K_1 и K_2, определенные на основании полученной зависимости рис. 3, соответственно равны

$$K_1 = 0{,}496,\ K_2 = 0{,}33. \tag{20}$$

Следует заметить, что аналогичная отрицательно-экспоненциальная зависимость вероятности хорошего «видения» P от отношения $[D/r_0]^2$ была качественно предсказана Хафнагелем [10] и для критерия хорошего «видения» (18) была количественно подтверждена Фридом [1] в виде

$$P\,(\sigma^2_{\theta,D} \leqslant 1\,\text{рад}^2) \simeq K_1^{\text{ф}} \exp\{-K_2^{\text{ф}}\,[D/r_0]^2\};\ D \geqslant 3{,}5 r_0, \tag{21}$$

где $K_1^{\text{ф}} = 5{,}6$, а $K_2^{\text{ф}} = 0{,}1557$.

Из сравнения полученных зависимостей (19) и (21) видно, что они отличаются только коэффициентами K_1 и K_2, причем зависимость (21), полученная Фридом, является более оптимистичной. Это отличие обусловлено как принципиально различными подходами, использованными при получении выражений для вероятностей хорошего «видения» (19) и (22), так и различием использованных критериев хорошего «видения» (14) и (18), из которых последний (18) (критерий Фрида) является менее жестким.

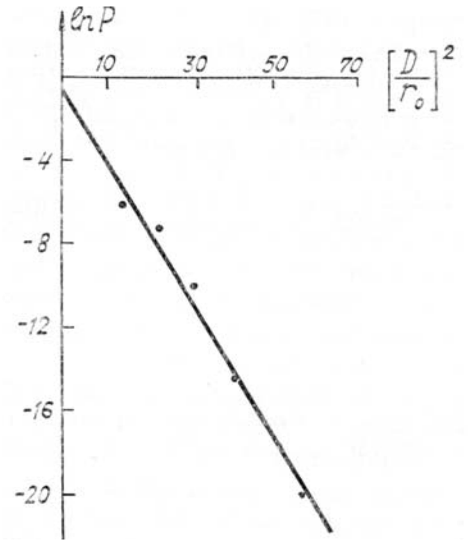

Рис. 3. Зависимость логарифма вероятности хорошего «видения» от отношения $(D/r_0)^2$

На основании полученной нами зависимости, представленной на рис. 3, нетрудно видеть, что для достижения дифракционного разрешения при $D/r_0 = 3{,}5$ необходимо осуществить не менее $K = 100$ короткоэкспозиционных регистраций изображений объекта, при $D/r_0 = 4$ необходимо зарегистрировать не менее $K = 400$ короткоэкспозиционных изображений, при $D/r_0 = 4{,}5$ требуемое число короткоэкспозиционных регистраций изображения объекта в среднем увеличивается до $K = 1600$, а при $D/r_0 \geq 5$ и более требуемое число короткоэкспозиционных регистраций изображения изоплапатичного объекта становится настолько большим ($K > 7 \cdot 10^3$), что описанный вероятностный подход к получению дифракционного разрешения системы атмосфера—телескоп в короткоэкспозиционном изображении объекта становится практически нереализуемым.

4. Заключение

Итак, на основании проведенных выше исследований очевидно, что для обеспечения реальной возможности достижения мгновенного дифракционного разрешения системы атмосфера—телескоп необходимо, во-первых, точно оценивать величину $r_0(\lambda, 0°)$ (3) в точке стояния телескопа и по ней определять величину $r_0(\lambda, z^0)$ (2) для данных условий атмосферного «видения», а во-вторых, иметь возможность (и это важно подчеркнуть) уменьшения (например, путем диафрагмирования) приемной апертуры телескопа до диаметра $D_{\text{Д}}$ для создания условий практической реализуемости вероятностного подхода, например, путем обеспечения соотношения $D_{\text{Д}}/r_0 = 3{,}5$.

Следует заметить, что, говоря о дифракционном разрешении, мы подразумевали идеальный безаберрационный ($\Theta_{\text{Т}}(\rho) = 0$) телескоп диаметра D. При наличии аберраций, характерных для любого реального телескопа, его эффективный диаметр $D_{\text{эфф}}$ получается меньше D и достижение эффективного дифракционного разрешения оказывается возможным с большей вероятностью, чем достижение дифракционного разрешения, реализовать которое при наличии аберраций телескопа вероятностным методом практически невозможно. Кроме того, возможности практической реализации рассмотренного вероятностного подхода ограничиваются и наличием нескомпенсированной атмосферной дисперсии [11], приводящей к поперечному окрашиванию изображений, превалирующему при больших зенитных углах ($z^0 > 45°$) над их турбулентным размытием. Отмеченные ограничения свидетельствуют о малой эффективности классического вероятностного подхода к достижению высокого углового разрешения в системах атмосферного «видения» и указывают на необходимость разработки неклассических методов преддетекторной [12, 13] и последетекторной [14, 15] компенсаций атмосферных искажений.

1. Fried D.L. //JOSA. 1978. V. 68. № 12. P. 1651–1658.
2. Bensimon D. et al. //JOSA. 1981. V. 71. № 9. P. 1138–1139.
3. Fried D.L. //JOSA. 1965. V. 55. № 10. P. 1427–1435.
4. Бакут П.А. и др. //Зарубежная радиоэлектроника. 1976. № 7. С. 15.
5. Fried D.L., Meverse G.E. //Appl. Opt. 1974. V. 13. № 11. P. 2620–2622.
6. Greenwood R.E., Fried D.L. //JOSA. 1976. V. 66. № 2. P. 193–206.
7. Hufnagel R.E. //In: Restoration of Atmospherically Degraded Images (National Academy of Sciences—National Research Council). Washington. 1966. V. 3. № 1. P. 11.

Поступила в редакцию
31 августа 1988 г.

P.A. Bakut, S.D. Pol'skikh, K.N. Sviridov, N.Y. Khomich. **The Research of Probabilistic Approach to Improvement of Diffraction-Limited Resolution of Optical Systems in the Case of Atmospheric «Seeing».**

The possibility of obtaining a diffraction-limited resolution of the atmosphere--telescope system in the case of registration of the short-exposition images of the isoplanatic stationary object is analyzed. The concept of instantaneous spatial correlation radius of atmospheric distortions of light radiation field is introduced, and γ-distribution of its probability is obtained by statistical computer simulation methods. The probability of good «seeing» is investigated on the basis of obtained distribution, and the required number of short-exposition image registrations for obtaining at least one diffraction-limited is found for different ratios between the telescope diameter D and the Freed parameter r_0. Practical realization difficulties of probability approach are discussed.