«Оптика атмосферы и океана», **10**, N 1 (1997)

АДАПТИВНАЯ ОПТИКА

УДК 535.28

В.П. Лукин, Б.В. Фортес

СОПОСТАВЛЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ РАЗЛИЧНЫХ СХЕМ ФОРМИРОВАНИЯ ЛАЗЕРНЫХ ОПОРНЫХ ЗВЕЗД

Исследуются три возможные схемы формирования лазерной опорной звезды: моностатическая, бистатическая и промежуточная. Определены предельные возможности для коррекции случайных наклонов волнового фронта естественной звезды с использованием сигнала от лазерной звезды. Показано, что моностатическая схема формирования лазерной опорной звезды абсолютно не приемлема для этих целей. Определены возможности бистатической схемы коррекции. Показан переход от промежуточной схемы к бистатической.

Одна из серьезных проблем, с которой сталкиваются разработчики адаптивных оптических телескопов, — это необходимость использования достаточно ярких звезд в качестве опорных источников, поскольку датчик волнового фронта такого телескопа, как правило, требует большую часть энергии излучения звезды для обеспечения своего нормального функционирования. Требование к энергетике опорного источника, а также необходимость одновременного нахождения в одной изопланарной области и исследуемой звезды (или любого другого космического объекта) и достаточно яркой опорной звезды, ввиду малости угла изопланитизма атмосферы (в видимой области длин волн при распространении в зенит этот угол составляет 10–15$''$), существенно уменьшают процент покрытия неба таким телескопом.

Разработчики адаптивной оптики нашли путь решения этой проблемы в использовании фокусированного лазерного излучения, направляемого с Земли и рассеиваемого назад неоднородностями атмосферы [1–3]. Это может быть упругое аэрозольное рассеяние с высот 8–20 км или стимулированное переизлучение с высот 80–100 км на облаках атомарного натрия.

Задача создания лазерной опорной звезды тянет за собой целый шлейф научных и технических проблем, таких как изготовление специализированного лазерного устройства, выбор оптимальной высоты размещения опорной звезды, измерение фазы отраженного атмосферой лазерного излучения и, наконец, выбор управляющего алгоритма.

В этой связи очень показательно сообщение одного из известных в США разработчиков таких систем доктора Роберта Фугейта (Robert Fugate), который заявляет, что в период написания этого сообщения [4] (февраль 1996) ему не были известны успешно работающие лазерные опорные звезды, использующие рассеяние от натриевых облаков. Следует здесь отметить, что именно натриевые опорные звезды способны обеспечить наилучшие характеристики для адаптивных телескопов.

Помимо указанных проблем использование лазерных опорных звезд наталкивается на одну существенную проблему невозможности полной коррекции случайного наклона волнового фронта для реальной звезды на основе измерений наклона волнового фронта для лазерной опорной звезды.

Несомненно, что использование лазерных опорных звезд, формируемых в атмосфере на основе сигнала обратного рассеяния, связано с проблемой выбора оптимального алгоритма использования данных оптических измерений для коррекции случайного дрожания изображения звезд. Именно решению этой задачи и посвящена настоящая статья. Рассмотрим следующую схему оптического эксперимента: происходит формирование изображения естественной звезды в фокальной плоскости наземного телескопа (F – фокусное расстояние оптической системы, Σ – размер апертуры оптической системы). Как известно, из-за влияния атмосферной турбулентности телескопа имеет место дрожание формируемого в фокальной плоскости изображения звезды. Мы будем характеризовать дрожание этого изображения случайным смещением положения центра тяжести интенсивности (при условии малости этих флуктуаций) изображения звезды посредством вектора

$$\rho_F^{\text{пл}} = -\frac{F}{k\,\Sigma} \iint\limits_{\Sigma} d^2\rho \nabla_\rho S^{\text{пл}}(0, \rho)\ , \tag{1}$$

где k – волновое число излучения; $S^{\text{пл}}(0, \rho)$ – фазовые флуктуации в плоской волне, формируемой от звезды.

В свою очередь, измеряемый случайный вектор дрожания изображения лазерной опорной звезды, формируемой на основе фокусируемого лазерного излучения с помощью наземного лазерного устройства, дается в виде

$$\rho_m = \rho_c + \rho_F^{c\phi}\ , \tag{2}$$

где

$$\rho_c = \frac{1}{P_0} \int\limits_0^x d\xi (x - \xi) \iint d^2R\, I(\xi, \mathbf{R})\, \nabla_R\, n_1(\xi, \mathbf{R}) \tag{3}$$

– положение центра тяжести, фокусированного на расстояние x от источника гауссова лазерного пучка; $I(\xi, \mathbf{R})$ – текущее значение интенсивности оптического поля; $\nabla_R\, n_1(\xi, \mathbf{R})$ – градиент флуктуаций показателя преломления атмосферы. Считая, что лазерное излучение фокусируется в достаточно малое, не разрешаемое через атмосферу телескопом пятно, второе слагаемое (2) имеет следующий вид:

$$\rho_F^{c\phi} = -\frac{F}{k\,\Sigma} \iint\limits_{\Sigma} d^2\rho \nabla_\rho S^{c\phi}(\rho, 0)\ , \tag{4}$$

и представляет собой дрожание изображения точечного источника в фокальной плоскости телескопа.

Будем конструировать алгоритм коррекции дрожания [5, 6] изображения звезды $\rho_F^{\text{пл}}$ в виде

$$\rho_F^{\text{пл}} - \rho_k\ , \tag{5}$$

где $\rho_k = A\rho_m$, а коэффициент A выбирается для обеспечения минимума дисперсии остаточных искажений:

$$<(\rho_F^{\text{пл}} - A\ \rho_m)^2>_{\min} = <e^2>\ . \tag{6}$$

Находя минимум для дисперсии в виде (6), имеем

$$<e^2>_{\min} = <(\rho_F^{\text{пл}})^2> - \frac{<\rho_F^{\text{пл}}\ \rho_m>^2}{<(\rho_m)^2>}\ , \tag{7}$$

где корректирующий коэффициент A выражается только через детерминированные функции в виде

$$A = <\rho_F^{\text{пл}}\ \rho_m>/<(\rho_m)^2>\ . \tag{8}$$

Необходимо отметить, что традиционный алгоритм коррекции (5), где $A \equiv 1$, естественно, не обеспечивает минимума дисперсии (6) и поэтому не может рассматриваться как сколько-нибудь серьезная альтернатива.

В реальном эксперименте мы имеем только данные измерений ρ_m, поскольку вектор $\rho_F^{\text{пл}}$, характеризующий дрожание реальной звезды, изображение которой и необходимо скорректировать, мы не можем измерить, так как реальная звезда дает слишком мало света, чтобы выполнить измерения с помощью датчика волнового фронта.

Вместе с тем коэффициент A можно рассчитать, исходя из модельного описания высотного распределения интенсивности турбулентности $C_n^2(\xi)$. С учетом (2) и (8) дисперсию и корреляцию, как составные части (7), можно записать в виде

$$<(\rho_m)^2> = <(\rho_c)^2> + <(\rho_F^{c\phi})^2> + 2 <\rho_F^{c\phi}\ \rho_c> ; \qquad (9)$$

$$<\rho_F^{\text{пл}}\ \rho_m> = <\rho_F^{\text{пл}}\ \rho_c> + <\rho_F^{\text{пл}}\ \rho_F^{c\phi}> . \qquad (10)$$

Что же мы можем получить в смысле коррекции на основе предлагаемого алгоритма (5)? Прежде всего, на основании знаний моделей высотного профиля турбулентности можно:

1) Оценить предельный уровень коррекции общего наклона волнового фронта $\rho_F^{\text{пл}}$, исходя из следующего выражения:

$$<\beta^2>_{\min} = <(\varphi_F^{\text{пл}})^2> \left\{ 1 - \frac{<\varphi_F^{\text{пл}}\ \varphi_m>^2}{<(\varphi_F^{\text{пл}})^2><(\varphi_m)^2>} \right\},$$

где второе слагаемое оценивается на основе моделей турбулентной атмосферы.

2) Рассчитать коэффициент A пересчета измеряемых значений ρ_m в управляющий алгоритм, выражаемый через средние значения:

$$A = <\varphi_F^{\text{пл}}\ \varphi_m>/<\varphi_m^2> .$$

Существует несколько схем формирования лазерных опорных звезд. С точки зрения расчета дисперсии и корреляции из (9), (10) можно говорить о двух, как о предельных. К ним относятся моностатическая схема, при которой формирование изображения звезды в телескопе и формирование изображения лазерной опорной звезды происходят через одни и те же неоднородности атмосферы, и бистатическая схема, в которой опорная звезда формируется в изопланарной области для наблюдаемой (естественной) звезды, но само распространение фокусированного лазерного пучка, формирующего опорную звезду, происходит через турбулентные неоднородности, некоррелирующие с теми, что находятся на пути формирования естественной звезды.

Моностатическая схема

Итак, для моностатической схемы корректирующий коэффициент $A = A_{\text{м}}$ в формуле (8), и его составляющие рассчитываются соответственно по формулам (9), (10), где, выполнив нормировку и перейдя к угловым характеристикам, имеем

$$<\varphi_m^2> = \frac{<\rho_m^2>}{x^2} = (2^{7/6}\pi^2 0{,}033\ \Gamma(1/6))\left[R_0^{-1/3} + a_0^{-1/3} - 2^{7/6}\,(R_0^2 + a_0^2)^{-1/6}\right] \int_0^x d\xi (1 - \xi/x)^{5/3}\, C_n^2(\xi) , \qquad (11)$$

при условии, что фокусируемый ($x = f$) лазерный пучок достаточно широкий ($ka_0^2/x \gg 1$) и турбулентное уширение лазерного пучка не превалирует над фокусировкой (т.е. $\Omega^{-2}\left(\frac{1}{2} D_S(2a_0)\right)^{6/5} \ll 1$);

$$<\varphi_F^{\text{пл}}\ \varphi_c> = (-\,2^{4/3}\,\pi^2\, 0{,}033\ \Gamma(1/6)) \int_0^x d\xi\, C_n^2(\xi)(1 - \xi/x)\left[R_0^2 + a_0^2(1 - \xi/x)^2\right]^{-1/6}. \qquad (12)$$

При проведении этих вычислений считаем, что излучение от естественной звезды – это неограниченная плоская волна, распространяющаяся из направления в зенит, а лазерный пучок формируется соосно с основным телескопом, формирующим изображение, тогда

$$<\varphi_F^{\text{пл}}\ \varphi_F^{c\phi}> = (2^{4/3}\,\pi^2\, 0{,}033\ \Gamma(1/6))\, R_0^{-1/3} \int_0^x d\xi\, C_n^2(\xi)(1 - \xi/x)[1 + (1 - \xi/x)^2]^{-1/6} . \qquad (13)$$

Последнее выражение представляет собой корреляцию между дрожанием изображения плоской волны и дрожанием (измеряемым в фокальной плоскости телескопа) изображения точечного источника, находящегося на расстоянии x от телескопа.

Дисперсия дрожания изображения звезды соответственно рассчитывается по следующей формуле:

$$<(\overset{\text{пл}}{\varphi}_F)^2> = (2^{7/6}\,\pi^2\,0{,}033\,\Gamma(1/6))R_0^{-1/3}\int\limits_0^{\infty} d\xi\, C_n^2(\xi)\,. \tag{14}$$

Поскольку звезда находится за атмосферой, то верхний предел интегрирования в (14) стремится к ∞. В этих обозначениях минимальная дисперсия остаточных флуктуаций угловых смещений изображения звезды для моностатической схемы дается в виде

$$\frac{<e^2>_{\min}}{F^2} = <\beta^2>_{\min} = <(\overset{\text{пл}}{\varphi}_F)^2> \left\{1 - \frac{2^{1/3} f_{\text{м}}(x, C_n^2)}{[1 + b^{-1/3} - 2^{7/6}(1 + b^2)^{-1/6}]}\right\}, \tag{15}$$

где $b = a_0/R_0$;

$$f_{\text{м}}(x, C_n^2) = \frac{\left\{\int\limits_0^x d\xi\, C_n^2(\xi)\big([1+b^2(1-\xi/x)^2]^{-1/6} - [1+(1-\xi/x)]^{-1/6}\big)\right\}^2}{\int\limits_0^x d\xi\, C_n^2(\xi)(1-\xi/x)^{5/3}\int\limits_0^{\infty} d\xi\, C_n^2(\xi)}\,. \tag{16}$$

Из (11), (15), (16) видно, что при $b = 1$ ($a_0 = R_0$) сигнал φ_m становится не информативным, так как $<\varphi_m^2(R_0 = a_0)> \equiv 0$, одновременно при этом обращается в нуль и функция $f_{\text{м}}(x, C_n^2)$. Поэтому для моностатической схемы формирования лазерной опорной звезды с точки зрения информативности сигнала φ_m, а также с точки зрения энергетики область допустимых значений величины $b = a_0/R_0$ – это интервал (0, 1), т.е. $b < 1$. Для очень малых значений параметра b оценка минимальной величины дисперсии остаточных дрожаний изображения звезды выражается в следующем виде:

$$<\beta^2>_{\min} = <(\overset{\text{пл}}{\varphi}_F)^2> \left\{1 - \frac{2^{1/3} \hat{f}_{\text{м}}(x, C_n^2)}{[1 + b^{-1/3} - 2^{7/6}(1 + b^2)^{-1/6}]}\right\}, \tag{17}$$

где функция

$$\hat{f}_{\text{м}}(x, C_n^2) = \frac{\left\{\int\limits_0^x d\xi\, C_n^2(\xi)(1-\xi/x)(1 - [1 + (1-\xi/x)^2]^{-1/6})\right\}^2}{\int\limits_0^x d\xi\, C_n^2(\xi)(1-\xi/x)^{5/3}\int\limits_0^{\infty} d\xi\, C_n^2(\xi)} \tag{18}$$

и является пределом для функции $f_{\text{м}}(x, C_n^2)$ из (16) при параметре $b \to 0$.

Расчеты всех интересующих нас параметров для моностатической схемы приведены в табл. 1. Расчеты выполнены для различных значений параметра b (b = 0; 0,75; 0,80; 0,90; 0,95) с использованием модели [7] $C_n^2(\xi)$ для средних условий видения через турбулентную атмосферу для высот расположения опорного источника x в интервале от 5 до 100 км. Как видно из табл. 1, значение функции $\hat{f}_{\text{м}}(x, C_n^2)$ меняется от 6,48 до 11,2. В этой же табл. 1 приведены соответственно значения величины

$$A_{\text{м}} = <\overset{\text{пл}}{\rho}_F\, \rho_m>/<(\rho_m)^2>\,,$$

вычисляемой по формуле (8) для моностатической схемы формирования лазерной опорной звезды. Так, для параметра b = 0,95 значения $A_{\text{м}}$ меняются от —15,6 до —16,1. Здесь же приведена величина $C_{\text{м}} = <\beta^2>/<(\overset{\text{пл}}{\varphi}_F)^2>$, характеризующая отношение величины дисперсии остаточных флуктуаций к самой величине дисперсии сигнала дрожания естественной звезды. Как показывают данные расчета, значения $C_{\text{м}}$ изменяются от 0,9197 до 0,87. Эти результаты убедительно показывают, что ввиду малости $f_{\text{м}}(x, C_n^2)$ и незначительности отличия от 1 величины

$C_{\text{м}}$ ожидать сколько-нибудь эффективной коррекции случайных наклонов с использованием моностатической схемы формирования лазерной опорной звезды не приходится.

Таблица 1

Моностатическая схема формирования лазерной опорной звезды

x,км	$f_{\text{м}}\cdot 10^3$						$A_{\text{м}}$				
	0	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95
5	6,48	0,8096	0,522	0,295	0,1314	0,03286	–2,4	–3,22	–4,59	–7,33	–15,6
10	7,82	0,9644	0,6211	0,3506	0,156	0,03896	–2,42	–3,24	–4,62	–7,38	–15,7
15	8,58	1,05	0,6784	0,3828	0,1703	0,04251	–2,43	–3,26	–4,64	–7,41	–15,7
20	9,14	1,12	0,7199	0,406	0,1805	0,04505	–2,44	–3,28	–4,67	–7,45	–15,8
85	11,1	1,32	0,8494	0,4779	0,212	0,05277	–2,5	–3,35	–4,77	–7,61	–16,1
90	11,1	1,33	0,8522	0,4795	0,2126	0,05293	–2,5	–3,35	–4,77	–7,61	–16,1
95	11,2	1,33	0,8548	0,4809	0,2133	0,05308	–2,51	–3,35	–4,77	–7,61	–16,1
100	11,2	1,34	0,8572	0,4822	0,2138	0,05322	–2,51	–3,35	–4,77	–7,61	–16,1

x,км	$C_{\text{м}}$				
	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95
5	0,9387	0,934	0,9292	0,9245	0,9197
10	0,927	0,9214	0,9159	0,9103	0,9048
15	0,9202	0,9142	0,9082	0,9022	0,8961
20	0,9153	0,9089	0,9026	0,8963	0,8899
85	0,8998	0,8926	0,8853	0,8782	0,8711
90	0,8995	0,8922	0,885	0,8778	0,8707
95	0,8992	0,8919	0,8846	0,8774	0,8703
100	0,8989	0,8916	0,8843	0,8771	0,87

Примечание. В первой колонке приведены значения дальности (высоты) формирования звезды, следующие шесть колонок отведены для значений функции $f_{\text{м}}$, вычисляемой по формуле (16) соответственно для значений параметра $b = 0$; 0,75; 0,80; 0,90; 0,95. С восьмой по двенадцатую колонки содержат значения параметра $A_{\text{м}}$, вычисляемые по формуле (8). Модель высотного изменения структурной постоянной задана на основании работы [8]. Колонки с тринадцатой по семнадцатую содержат значения функции качества коррекции ($C_{\text{м}}$), рассчитанные по формуле (17).

Следует заметить, что этот результат получен для случая оптимальной коррекции, поэтому на основе алгоритма «прямой» коррекции с использованием данных оптических измерений (при $A \equiv 1$) получается еще меньший эффект от коррекции (6).

Ввиду малости величины $f_{\text{м}}(x, C_n^2)$ наиболее оптимальное значение отношения b, которое минимизирует дисперсию $\langle\beta^2\rangle_{\min}$, даваемую выражением (17), оказывается сравнимо с размером апертуры телескопа R_0. Известно, что при этом (когда $a_0 \to R_0$) измеряемый сигнал φ_m уменьшается, а его дисперсия $\langle\varphi_m^2\rangle$ стремится к нулю. Поэтому должен существовать реальный компромисс по поводу выбора такого отношения $b = a_0/R_0$, которое, с одной стороны, минимизирует дисперсию (17), а с другой – обеспечивает измеряемость сигнала φ_m, т.е. гарантирует достаточный уровень дисперсии (11). Например, можно выбрать величину $b = a_0/R_0$, такую, что

$$1 + b^{-1/3} - 2^{7/6}(1 + b^2)^{-1/6} \le 0{,}01 ,$$

т.е. измеряемый сигнал дрожания опорной звезды оказывается примерно в 10 раз меньше, чем дрожание реальной звезды (хотя, возможно, что это соображение слишком оптимистично), тогда оптимальное отношение b должно быть равным $b_{\text{opt}} \ge 0{,}86$. Однако известно, что очень трудно выполнить измерения малых сигналов в условиях шумов и флуктуаций фона с высокой точностью. Это еще раз убеждает в том, что коррекция наклонов волнового фронта в моностатической схеме мало эффективна, так как сколько-нибудь эффективную коррекцию следует ожидать для величины параметра $b \to 1$, т.е. для случая, когда сама измеряемая величина становится малой, а следовательно, измеряется с большой ошибкой.

Бистатическая схема

По бистатической схеме формирование лазерной звезды осуществляется через турбулентные неоднородности, некоррелирующие с теми неоднородностями, через которые формируется изображение естественной звезды в телескопе. Это может быть реализовано с помощью боковой подсветки лазером (при достаточно большом выносе оптической оси распространения лазерного пучка от оптической оси телескопа). Используя ту же процедуру поиска минимума дисперсии остаточных флуктуаций дрожания изображения, получаем для остаточного уровня флуктуаций из выражения (7) соответственно

$$<\beta^2>_{\min} = <(\overset{\text{пл}}{\varphi}_F)^2> - \frac{<\overset{\text{пл}}{\varphi}_F \overset{c\phi}{\varphi}_F>^2}{<(\varphi_б)^2>}\,, \tag{19}$$

где

$$<(\varphi_б)^2> = <\varphi_c^2> + <(\overset{c\phi}{\varphi}_F)^2>\,. \tag{20}$$

Выполняя те же вычисления, что и для моностатической схемы, получаем следующие выражения для корректирующего коэффициента $A = A_б$ и для остаточного уровня скорректированной дисперсии (7), где

$$A_б = \frac{<\overset{\text{пл}}{\varphi}_F \overset{c\phi}{\varphi}_F>}{<\varphi_c^2> + <(\overset{c\phi}{\varphi}_F)^2>} = \frac{2^{1/6}\int\limits_0^x d\xi\, C_n^2(\xi)(1-\xi/x)[1+(1-\xi/x)^2]^{-1/6}}{(1+b^{-1/3})\int\limits_0^x d\xi\, C_n^2(\xi)(1-\xi/x)^{5/3}}\,; \tag{21}$$

$$\frac{<e^2>_{\min}}{F^2} = <\beta^2>_{\min} = <(\overset{\text{пл}}{\varphi}_F)^2>\left\{1 - \frac{2^{1/3} f_б(x, C_n^2)}{(1+b^{-1/3})}\right\}; \tag{22}$$

$$f_б(x, C_n^2) = \frac{\left(\int\limits_0^x d\xi\, C_n^2(\xi)(1-\xi/x)[1+(1-\xi/x)^2]^{-1/6}\right)^2}{\int\limits_0^x d\xi\, C_n^2(\xi)(1-\xi/x)^{5/3}\int\limits_0^\infty d\xi\, C_n^2(\xi)}\,. \tag{23}$$

Как показывает анализ последних выражений, эффективная коррекция с бистатической схемой формирования опорной звезды гарантирует минимальную дисперсию остаточных дрожаний изображения (22) при коррекции вида

$$\overset{\text{пл}}{\varphi}_F - A_б\,\varphi_б\,,$$

где $\varphi_б$ – сигнал дрожания изображения опорной бистатической звезды; $A_б$ дается формулой (21). Видно, что в отличие от моностатической схемы, коррекция по бистатической схеме возможна при любом соотношении $b = a_0/R_0$, причем очевидно, что коррекция тем лучше, чем больше величина b (см. (22)). Если $b = 1$, из (22) находим, что

$$<\beta^2>_{\min} = <(\overset{\text{пл}}{\varphi}_F)^2>\{1 - 2^{-2/3} f_б(x, C_n^2)\}\,.$$

Функции $f_б(x, C_n^2)$, $A_б$, $C_б = 1 - \dfrac{2^{1/3} f_б(x, C_n^2)}{1 + b^{-1/3}}$ представлены в табл. 2 для модели турбулентной атмосферы [7] при различных высотах формирования опорного источника $x \in [1, 100]$ км и для значений параметра $b = a_0/R_0$ соответственно 0,1; 0,5; 1,0; 3,0. Значения функции $f_б(x, C_n^2)$ изменяются от 0,628 до 0,7930. Поэтому следует ожидать более эффективную коррекцию по бистатической схеме по сравнению с моностатической. Кроме того, здесь мы не встречаемся с ситуацией, когда измеряемый сигнал или его дисперсия $<(\rho_б)^2>$ обращаются тождественно в нуль. Безусловно, при бистатической схеме заведомо существует предельный уровень коррекции и дисперсия остаточных искажений (например, для $b = 1$) в результате такой коррекции оказывается равной

$$<\beta^2>_{\min} \approx <(\overset{\text{пл}}{\varphi}_F)^2>\{1 - 2^{-2/3} f_б(x, C_n^2)\}\,.$$

Т а б л и ц а 2

Бистатическая схема формирования лазерной опорной звезды

x, км	$f_б$	$A_б$ 0,1	0,5	1,0	3,0	$C_б$ 0,1	0,5	1,0	3,0
5	0,6284	0,3524	0,4918	0,5557	0,6564	0,749	0,6497	0,6041	0,5324
10	0,7127	0,3465	0,4837	0,5465	0,6455	0,7153	0,6027	0,551	0,4697
15	0,7523	0,3424	0,4779	0,54	0,6378	0,6995	0,5806	0,5261	0,4403
20	0,77	0,3383	0,4722	0,5335	0,6301	0,6925	0,5707	0,5149	0,4271
85	0,7919	0,3231	0,451	0,5096	0,6018	0,6837	0,5585	0,5011	0,4108
90	0,7922	0,3228	0,4505	0,5091	0,6012	0,6836	0,5583	0,5009	0,4106
95	0,7926	0,3225	0,4501	0,5086	0,6007	0,6834	0,5581	0,5007	0,4103
100	0,7929	0,3222	0,4497	0,5082	0,6002	0,6833	0,558	0,5005	0,4101

П р и м е ч а н и е. В первой колонке приведены значения дальности (высоты) формирования звезды, во второй колонке – значения функции $f_б$, вычисления которой проведены по формуле (23). Следующие четыре колонки отведены для значения функции $A_б$, вычисляемой по формуле (21) соответственно для значений параметра $b = 0{,}1;\ 0{,}5;\ 1;\ 3$. С седьмой по десятую колонки содержат значения функции $C_б$, рассчитанные по формуле (22).

Проводить сопоставление двух предельных схем формирования лазерных опорных звезд можно только путем конкретных оценок. И здесь следует заметить, что это необходимо делать уже не для отдельного телескопа (с адаптивной оптикой), а для целой обсерватории, например для обсерватории на горе Мауна Кия на Гавайях, где расположены три крупнейших телескопа Keck I, Keck II, CHFT, работающих с адаптивной коррекцией турбулентных искажений. Первые два телескопа с апертурой 10 м, а телескоп CHFT (Канада – Гавайи – Франция) с апертурой 3,6 м.

Таким образом, при работе по моностатической схеме для каждого из телескопов дисперсия остаточных искажений равна

$$\langle\beta^2\rangle_{\min} = \langle(\varphi_F^{\text{пл}})^2\rangle \left\{1 - \frac{2^{1/3} f_{\text{м}}(x, C_n^2)}{[1 + b^{-1/3} - 2^{7/6}(1+b^2)^{-1/6}}\right\}.$$

Если же телескоп Keck I создает бистатическую звезду для телескопа Keck II (расстояние между телескопами примерно 85 м), то имеем

$$\langle\beta^2\rangle_{\min} = \langle(\varphi_F^{\text{пл}})^2\rangle \{1 - 2^{-2/3} f_б(x, C_n^2)\};$$

если для телескопа CHFT, то

$$\langle\beta^2\rangle_{\min} = \langle(\varphi_F^{\text{пл}})^2\rangle \left\{1 - \frac{2^{1/3} f_б(x, C_n^2)}{1 + (10/3{,}6)^{-1/3}}\right\}.$$

А если CHFT создает звезду для пары Keck I/Keck II, то

$$\langle\beta^2\rangle_{\min} = \langle(\varphi_F^{\text{пл}})^2\rangle \left\{1 - \frac{2^{1/3} f_б(x, C_n^2)}{1 + (3{,}6/10)^{-1/3}}\right\}.$$

Прежде чем делать окончательные выводы, рассмотрим так называемую промежуточную схему формирования лазерной опорной звезды.

Промежуточная схема формирования лазерной опорной звезды

Рассмотрим более детально бистатическую схему формирования лазерной звезды в следующей постановке. Пусть имеется два телескопа, оси которых разнесены на расстояние (вектор) ρ_0. Для простоты будем считать, что один из этих телескопов нацелен в зенит и формирует изображение естественной звезды, а второй телескоп, формирующий лазерную опорную звезду, наклонен под углом места Θ относительно первого так, что угол места численно равен

$$\Theta = \pi/2 - \rho_0/x,$$

где x – высота, на которой происходит формирование лазерной опорной звезды.

Прежде всего рассмотрим взаимные корреляции случайных смещений центра тяжести $\rho_c(\rho_0)$, формируемого вторым телескопом лазерного пучка, ось диаграммы направленности которого смещена на вектор и наклонена под углом $\Theta = \pi/2 - \rho_0/x$ к горизонту, и смещения центра тяжести изображения плоской волны $\rho_F^{пл}$ и сферической волны ρ_F^{cf}, формируемой первым телескопом, т. е. корреляции

$$<\rho_F^{пл}\,\rho_c(\rho_0)>\,,\quad <\rho_F^{cф}\,\rho_c(\rho_0)>\,.$$

Интуитивно понятно, что первая корреляция – $<\rho_F^{пл}\,\rho_c(\rho_0)>$ для плоской волны – спадает с ростом разноса оптических осей телескопов ρ_0 быстрее, нежели вторая – $<\rho_F^{пл}\,\rho_c(\rho_0)>$ – для сферической волны. Попытаемся доказать это на основе аналитических и численных расчетов. Для начала запишем выражение для вектора энергетического центра тяжести лазерного пучка, формируемого вторым телескопом с Земли, в следующем виде:

$$\rho_c(\rho_0) = \frac{1}{P_0}\int_0^x d\xi(x-\xi)\iint d^2R <I(\xi,\mathbf{R})> \nabla_R\, n_1(\xi,\mathbf{R}), \tag{24}$$

где

$$\nabla_R\, n_1(\xi,\mathbf{R}) = i\iint d^2n\,(\xi,\boldsymbol{\kappa})\boldsymbol{\kappa}\,\exp(i\,\boldsymbol{\kappa}\mathbf{R})\,, \tag{25}$$

а распределение средней интенсивности лазерного пучка, смещенного на вектор и наклоненного под углом к Земле (причем $\Theta = \pi/2 - \rho_0/x$), дается выражением

$$<I(\xi,\mathbf{R})> = \frac{a_0^2}{a^2_{эф}(\xi)}\exp\{-(\mathbf{R}-\rho_0(1-\xi/x)^2/a^2_{эф}(\xi)\,. \tag{26}$$

После проведения вычислений получаем

$$\rho_c(\rho_0) = i\int_0^x d\xi(x-\xi)\iint d^2n(\xi,\boldsymbol{\kappa})\boldsymbol{\kappa}\,\exp\{-\kappa^2 a^2_{эф}(\xi)/4\}\,\exp\,[i\kappa\rho_0(1-\xi/x)]. \tag{27}$$

В результате имеем следующие выражения для дисперсии $\rho_c(\rho_0)$ и взаимных корреляций $<\rho_F^{пл}\,\rho_c(\rho_0)>$, $<\rho_F^{cф}\,\rho_c(\rho_0)>$:

$$<(\varphi_c(\rho_0))^2> = \frac{<(\rho_c(\rho_0))^2>}{x^2} = (2\pi^2 0{,}033\Gamma(1/6))2^{1/6}(R_0^2+a_0^2)^{-1/6}\,{}_1F_1\left(1/6,1;-\frac{\rho_0^2}{R_0^2+a_0^2}\right)\int_0^x d\xi\,C_n^2(\xi)(1-\xi/x)^{5/3}; \tag{28}$$

$$<\varphi_c(\rho_0)\varphi_F^{cф}> = \frac{<\rho_c(\rho_0)\rho_F^{cф}>}{xF} = (-2\pi^2 0{,}033\Gamma(1/6))2^{1/3}(R_0^2+a_0^2)^{-1/6}\,{}_1F_1\left(1/6,1;-\frac{\rho_0^2}{R_0^2+a_0^2}\right)\int_0^x d\xi\,C_n^2(\xi)(1-\xi/x)^{5/3}; \tag{29}$$

$$<\varphi_c(\rho_0)\varphi_F^{пл}> = \frac{<\rho_c(\rho_0)\,\rho_F^{пл}>}{x\,F} = [-2\pi^2\,0{,}033\,\Gamma(1/6)]\,2^{1/3}\int_0^x d\xi\,C_n^2(\xi)(1-\xi/x)\,\{R_0^2+a_0^2(1-\xi/x)^2\}^{-1/6}\times$$

$$\times\,{}_1F_1\left(1/6,1;\frac{\rho_0^2(1-\xi/x)^2}{(R_0^2+a_0^2(1-\xi/x)^2)}\right)\,. \tag{30}$$

Проанализировав два последних выражения, можно уже определенно сказать, что корреляция между наклоненным пучком и сферической волной спадает медленнее, чем корреляция между этим пучком и плоской волной.

Будем помечать все вычисляемые для этого промежуточного случая величины посредством нижнего индекса «п». Наряду с параметром $b = a_0/R_0$ введем параметр $d = \rho_0/R_0$, характеризующий пространственный вынос оси лазерного пучка, формирующего звезду, относительно оси основного телескопа. В общем случае (для произвольных значений параметров $b = a_0/R_0$ и $d = \rho_0/R_0$) имеем, используя (28), (29), (30), для корректирующего множителя $A = A_п$ и величин $C_п$, $<\beta^2>_п$, характеризующих дисперсию остаточных искажений, следующие выражения:

$$A_п = 2^{1/6}\left[\int_0^x d\xi\,C_n^2(\xi)(1-\xi/x)\left\{(1+(1-\xi/x)^2)^{-1/6} - (1+b^2(1-\xi/x)^2)^{-1/6}\,{}_1F_1\left(1/6,1;\frac{\rho_0^2(1-\xi/x)^2}{(1+b^2(1-\xi/x)^2)}\right)\right\}\right]\times$$

$$\times\left(\left[1+b^{-1/3}-2^{-7/6}(1+b^2)^{-1/6}\,{}_1F_1\left(1/6,1;\frac{d^2}{(1+b^2)}\right)\int_0^x d\xi\,C_n^2(\xi)(1-\xi/x)^{5/3}\right)^{-1};$$

$$\langle\beta^2\rangle_{\text{п}}=\langle(\varphi_F^{\text{пл}})^2\rangle\,C_{\text{п}};$$

$$C_{\text{п}}=1-2^{1/3}\left[\int_0^x d\xi\,C_n^2(\xi)(1-\xi/x)\left\{(1+(1-\xi/x)^2)^{-1/6}-(1+b^2(1-\xi/x)^2)^{-1/6}\,{}_1F_1\left(1/6,1;\frac{\rho_0^2(1-\xi/x)^2}{(1+b^2(1-\xi/x)^2)}\right)\right\}\right]^2\times$$

$$\times\left(\left[1+b^{-1/3}-2^{-7/6}(1+b^2)^{-1/6}\,{}_1F_1\left(1/6,1;-\frac{d^2}{(1+b^2)}\right)\right]\int_0^x d\xi\,C_n^2(\xi)(1-\xi/x)^{5/3}\int_0^\infty d\xi\,C_n^2(\xi)\right)^{-1}.$$

Видно, что при $d\to 0$ мы получаем выражения для моностатической схемы, а для $d\to\infty$ приходим к бистатике. Для произвольного параметра $d=\rho_0/R_0$ величины $A_{\text{п}}$, $C_{\text{п}}$, $\langle\beta^2\rangle_{\text{п}}$ существуют даже при $b=1$ ($a_0=R_0$) в отличие от моностатической схемы. При $b=1$ соответственно получаем

$$\langle\beta^2\rangle_{\text{п}}=\langle(\varphi_F^{\text{пл}})^2\rangle\left\{1-2^{-2/3}\frac{\left(\int_0^x d\xi C_n^2 u\left[(1+u)^2\right]^{-1/6}\left[1-{}_1F_1\left(1/6,1;-\frac{d^2u^2}{1+b^2u^2}\right)\right]\right)^2}{\left[1-{}_1F_1\left(1/6,1;-\frac{d^2}{2}\right)\right]\int_0^x d\xi C_n^2 u^{5/3}\int_0^\infty d\xi C_n^2(\xi)}\right\}. \tag{31}$$

П р и м е ч а н и е. В формулу (31) для краткости введено обозначение $(1-\xi/x)=$ u.

Рассмотрим асимптотическое поведение выражения для корректирующего множителя $A=A_{\text{п}}$ и величин $C_{\text{п}}$, $\langle\beta^2\rangle_{\text{п}}$ при параметре $d\to\infty$. При этом воспользуемся аналитическим продолжением для гипергеометрической функции

$${}_1F_1(1/6,1;z)=\frac{(-z)^{-1/6}}{\Gamma(5/6)}\left(1+\frac{1}{36(-z)}+...\right).$$

В результате знаменатель в $A_{\text{п}}$ оказывается равным

$$\left[1+b^{-1/3}-\frac{2^{7/6}d^{-1/3}}{\Gamma(5/6)}\right]\int_0^x d\xi\,C_n^2(\xi)\,(1-\xi/x)^{5/3},$$

а числитель соответственно

$$1-{}_1F_1\left(1/6,1;-d^2\frac{(1-\xi/x)^2}{1+b^2(1-\xi/x)^2}\right)=\frac{(1-\xi/x)^{-1/3}}{\Gamma(5/6)}(1+(1-\xi/x))^{1/6}.$$

Получаем

$$\langle\beta^2\rangle=\langle(\varphi_F^{\text{пл}})^2\rangle\,C_{\text{п}}=\langle(\varphi_F^{\text{пл}})^2\rangle\left\{1-\frac{2^{1/3}F^2}{\left[1+b^{-1/3}-\frac{2^{7/6}F^2}{G(5/6)}\right]\int_0^x d\text{x}\,C_n^2(\text{x})(1-\text{x}/x)^{5/3}\int_0^\infty d\text{x}\,C_n^2(\text{x})}\right\}, \tag{32}$$

а функция

$$F=\int_0^x d\xi\,C_n^2(\xi)\left\{\frac{(1-\xi/x)^2}{[1+(1-\xi/x)^2]^{-1/6}}-\frac{(1-\xi/x)^{2/3}}{\Gamma(5/6)\,d^{1/3}}\right\}. \tag{33}$$

Оказывается, что числитель функции $C_{\text{п}}$ (см. (32)) при $d\to\infty$ не зависит от параметра $b=a_0/R_0$, тогда как знаменатель от $b=a_0/R_0$ зависит следующим образом:

$$\left[1+b^{-1/3}-\frac{2^{7/6}d^{-1/3}}{\Gamma(5/6)}\right]\int_0^x d\xi\,C_n^2(\xi)\,(1-\xi/x)^{5/3}.$$

Таким образом, увеличивая $b=a_0/R_0$, можно уменьшить дисперсию (32) остаточных флуктуаций случайного положения звезды.

Таблица 3

Промежуточная схема формирования лазерной опорной звезды

x, км	$d^{1/3}$								
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	0,5372	0,5465	0,5496	0,5511	0,552	0,5526	0,5531	0,5534	0,5537
10	0,5299	0,5382	0,541	0,5423	0,5432	0,5437	0,5441	0,5444	0,5447
15	0,5271	0,5335	0,5357	0,5368	0,5374	0,5378	0,5381	0,5384	0,5386
20	0,5237	0,5286	0,5302	0,5311	0,5316	0,5319	0,5321	0,5323	0,5324
85	0,5075	0,5085	0,5089	0,509	0,5092	0,5092	0,5093	0,5093	0,5093
90	0,5071	0,5081	0,5084	0,5086	0,5087	0,5087	0,5088	0,5088	0,5088
95	0,5067	0,5077	0,508	0,5081	0,5082	0,5083	0,5083	0,5084	0,5084
100	0,5064	0,5073	0,5076	0,5077	0,5078	0,5079	0,5079	0,508	0,508

Примечание. В первой колонке приведены значения дальности (высоты) формирования звезды, в остальных – значения функции $A_п$ для различных величин пространственного разноса осей основного и вспомогательного телескопов.

В табл. 3 и 4 приведены результаты расчетов функции $A_п$ и $C_п$ по формуле (31) при $b = 1$, высоте бакена от 5 до 100 км, разносе первого и второго телескопов $d = 2^3$, 3^3,..., 10^3. Если сопоставить данные этих двух таблиц с колонкой (при $b = 1$) из табл. 2, то можно заметить тенденции стремления значений $A_п$ и $C_п$ к значениям $A_б$ и $C_б$ при $d \to \infty$.

Таблица 4

Промежуточная схема формирования лазерной опорной звезды

x, км	$d^{1/3}$								
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	0,814	0,7441	0,7091	0,6881	0,6741	0,6641	0,6566	0,6508	0,6461
10	0,7877	0,7089	0,6695	0,6458	0,63	0,6187	0,6102	0,6037	0,5984
15	0,7729	0,6907	0,6496	0,6249	0,6084	0,5966	0,5878	0,581	0,5755
20	0,765	0,6817	0,64	0,615	0,5983	0,5864	0,5775	0,5705	0,565
85	0,7512	0,6679	0,6262	0,6012	0,5845	0,5726	0,5637	0,5567	0,5512
90	0,751	0,6676	0,626	0,601	0,5843	0,5724	0,5634	0,5565	0,5509
95	0,7508	0,6674	0,6257	0,6007	0,5841	0,5722	0,5632	0,5563	0,5507
100	0,7506	0,76672	0,6255	0,6005	0,5839	0,572	0,563	0,5561	0,5505

Примечание. Для функции $C_п$ (31) пояснения те же, что в примечании к табл. 3.

Практически, используя результаты данного раздела, можно количественно характеризовать величину разноса осей основного телескопа и телескопа, формирующего лазерный пучок, при которой реализуется так называемая бистатическая схема.

Таким образом, в результате выполненных расчетов можно сформулировать следующие выводы:

1. Моностатическая схема практически не устраняет наклоны волнового фронта.
2. Бистатическая и промежуточная схемы (при разносе осей двух телескопов $d > 40$) практически тождественны.
3. Бистатическая схема, использующая пару телескопов для коррекции случайных наклонов, по эффективности тем выше, чем больше значение параметра b.

1. Primmerman C., Murphy D., et. al. // Nature (London). 1991. V. 353. C. 141–143.
2. Fugate R., Ellerbroek J., et. al. // J. Opt. Soc. Am. A. 1994. V. 11. P. 310–324.
3. Fried D., Belsher J. // J. Opt. Soc. Am. A. 1994. V. 11. P. 277–286.
4. Fugate R. // Optics and Photonics News. V. 4. N 6. P. 14–19. June 1993.
5. Лукин В.П. Атмосферная адаптивная оптика. Новосибирск: Наука, 1986. 275 с.
6. Lukin V.P. Laser beacons and full aperture tilt measurement. Proc. «Adaptive Optics», OSA. 1996. P. AMB35-1–AMB35-5.
7. Грачева М.Е., Гурвич А.С. // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1980. Т. 16. N 10. С. 1107–1111.

Институт оптики атмосферы СО РАН,
Томск

Поступила в редакцию
30 сентября 1996 г.

V.P. Lukin, B.V. Fortes. **Comparison of Limit Efficiencies for Various Schemes of Laser Reference Star Formation.**

Three possible schemes of a laser reference star formation are treated in the paper: monostatic, bistatic, and intermediate. The limit possibilities of stochastic slopes correction of a natural star wave front using a signal from a laser star are found. The monostatic scheme of a laser reference star formation is shown to be fully unsuitable for these purposes. The capability of the bistatic correction scheme is demonstrated. A transfer from the intermediate scheme to the bistatic one is shown.