«Оптика атмосферы и океана», **5**, № 2 (1992)

УДК 551.521

И.Н. Мельникова

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ОБЛАЧНОГО СЛОЯ ПО ИЗМЕРЕННЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ ПОЛЯ СОЛНЕЧНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ. Ч. 1. ТЕОРИЯ.

Получены дополнительные члены асимптотических разложений для функций, описывающих рассеянное излучение в среде при слабом поглощении света, а также аппроксимационные соотношения для коэффициента отражения, значительно расширяющие область применимости асимптотик и облегчающие расчет данных функций. На основе асимптотических формул теории переноса для интенсивностей диффузного излучения на границах рассеивающего слоя большой оптической толщины получено выражение для параметра, описывающего истинное поглощение света $s^2 = (1-\Lambda)/(3-x_1)$, которое в совокупности с формулой для оптической толщины слоя τ_0 дает возможность определить объемные коэффициенты поглощения и рассеяния из измерений интенсивностей выходящего из слоя излучения. Исследована точность предлагаемых формул и их область применимости.

1. Введение

Определение оптических свойств облачных слоев представляет интерес для многих проблем физики атмосферы, например в задачах построения оптимальных моделей для климатических расчетов, при индикации возможных загрязнений атмосферы в экологическом мониторинге. Для получения оптических параметров реальных облачных слоев представляется возможным использовать измерения поля рассеянного солнечного излучения в атмосфере и решать, так называемую обратную задачу теории переноса излучения. Ранее подобные задачи решались, в частности, с помощью асимптотических формул теории переноса излучения (напр., [1, 2]) путем подбора подходящих значений оптических параметров облачного слоя, обеспечивающих наилучшее согласие вычисляемых по асимптотическим формулам (или другим методом) характеристик поля излучения с измеренными в атмосфере значениями.

В настоящей статье развивается метод определения объемных коэффициентов рассеяния и поглощения, основанный на получении аналитических зависимостей коэффициентов от измеряемых характеристик солнечного излучения в атмосфере для видимой области спектра, предложенный автором в работе [3]. В некоторых экспериментах проводятся измерения не потоков, а интенсивностей солнечного излучения [2], поэтому предложим соответствующие формулы, выражающие коэффициенты рассеяния и поглощения в облачном слое через интенсивности рассеянного излучения. При этом потребуются аналитические выражения для функций, описывающих отражение диффузного излучения от полубесконечной среды, которые также будут получены ниже.

2. Аппроксимационные формулы

Для описания процесса многократного рассеяния света в диффузной среде служит уравнение переноса излучения. В случае, когда среда имеет большую оптическую толщину, что характерно для облачных слоев, устанавливается так называемый глубинный или асимптотический режим и решением уравнения переноса являются асимптотические формулы. Область применимости асимптотических формул теории переноса излучения исследована в работах '[4, 5], общий вывод состоит в том, что при $\tau_0 \geq 7$ погрешность асимптотик не превышает 3%. Излучение, отраженное от плоского слоя большой оптической толщины τ_0, описывается коэффициентом отражения и выражается формулой [6]

$$\rho(\varsigma,\ \eta,\ \tau_0) = \rho(\varsigma,\ \eta) - \frac{MNu(\varsigma)\,u(\eta)\,\mathrm{e}^{-2\kappa\tau_0}}{1 - N^2\mathrm{e}^{-2\kappa\tau_0}}. \quad (1)$$

Здесь ζ и η — косинусы углов падения и отражения; функция $u(\zeta)$ описывает угловое распределение интенсивности излучения, выходящего из среды; $\rho(\zeta, \eta)$ — азимутально независимый член коэффициента отражения. полубесконечной атмосферы, величины M и N определяются интегральными соотношениями, куда входит функция $u(\zeta)$; величину k называют диффузионной длиной.

В случае слабого истинного поглощения в среде (что справедливо, например, для облаков в земной атмосфере в видимой области спектра) асимптотические величины и функции можно представить в виде разложений в ряд по степеням малого параметра, характеризующего поглощение. Разные авторы используют в этом качестве разные величины, здесь будет использована $s = \sqrt{(1-\Lambda)/(3-x_1)}$, где Λ — вероятность выживания кванта при одном рассеянии, x_1 — 1-й коэффициент разложения индикатрисы рассеяния по полиномам Лежандра. Часто индикатрису рассеяния описывают формулой Хеньи—Гринстейна: $x(\gamma) = \dfrac{1-g}{(1+g^2-2g\cos\gamma)^{1/2}}$, где параметр g определяет степень вытянутости индикатрисы рассеяния и совпадает со средним косинусом угла рассеяния, при этом выполняются соотношения: $g = \overline{\cos\gamma}$, $x_1 = 3g$ и $x_2 = 5g^2$-

Для разложений M, N, k известны коэффициенты вплоть до 3-го члена, что достаточно для прикладных задач в атмосферной оптике (например, [7]). Что касается функций $\rho(\eta, \zeta)$ и $u(\zeta)$, то для них получены пока только коэффициенты при первой степени s, а для плоского альбедо $a(\zeta) = 2\int_0^1 \rho(\eta, \zeta)\eta d\eta$ — первый' и второй коэффициенты. Разложения для этих функций имеют вид [6, 7]

$$a(\zeta) = 1 - 4u_0(\zeta)s + a_2(\zeta)s^2 + a_3(\zeta)s^3; \tag{2}$$

$$u(\zeta) = u_0(\zeta)(1 - 3/2\delta s) + u_2(\zeta)s^2; \tag{3}$$

$$\rho(\zeta, \eta) = \rho_0(\zeta, \eta) - 4u_0(\zeta)u_0(\eta)s + \rho_2(\zeta, \eta)s^2 + \rho_3(\zeta, \eta)s^3, \tag{4}$$

где $u_0(\zeta)$ — значение функции $u(\zeta)$ при чистом рассеянии света $\Lambda = 1$; $\delta = 4\int_0^1 u_0(\zeta)\zeta^2 d\zeta = 1,427$. Выражение для коэффициента разложения $a_2(\zeta)$ получено в работе [8]

$$a_2(\zeta) = \left[6\delta u_0(\zeta) + \frac{15(3-x_1)}{5-x_2}v_0(\zeta)\right] \text{и } v_0(\zeta) = \zeta^2 - 2\int_0^1 \rho_0(\zeta, \eta)\eta^3 d\eta, \ \varepsilon = 6\int_0^1 u_0(\zeta)\zeta^3 d\zeta = 1{,}667. \tag{5}$$

Приведем также выражение для сферического альбедо полубесконечной атмосферы $a^\infty = 2\int_0^1 a(\zeta)\zeta d\zeta$ из работы [9] и величины $q = 2\int_0^1 u(\zeta)\zeta d\zeta$:

$$\begin{aligned} Q &= 1 - 3/2\delta s + \left[9/4\delta^2 - \frac{(5\varepsilon - x_2)(3-x_1)}{(5-x_2)}\right]s^2; \\ a^\infty &= 1 - 4s + 6\delta s^2 - 3\left[2(2-x_1) + 3\delta^2 + \frac{4(3-x_1)}{3(5-x_2)}(11 + x_2 - 10\varepsilon)\right]s^3, \end{aligned} \tag{6}$$

где x_2 — второй коэффициент в разложении индикатрисы рассеяния, $x_2 = 5g^2$. Как показано в [3], из рассмотрения численных значений функций $u_0(\zeta)$ и $v_0(\zeta)$. приведенных в таблицах [9], частное $v_0(\zeta)/u_0(\zeta)$ хорошо аппроксимируется формулой $v_0(\zeta)/u_0(\zeta) = u_0(1)\zeta - 0.9$. причем отклонения от приведенного представления не превышают долей процента. Тогда выражение для коэффициента разложения $a_2(\zeta)$ примет вид

$$a_2(\zeta) = 3u_0(\zeta)\left[\frac{5(3-x_1)}{5-x_2}(u_0(1)\zeta - 0{,}9) + 2\delta\right]. \tag{7}$$

Интегрирование этого выражения по ζ приводит к величине, лишь на 0,4% отличающейся от $a_2^\infty = 6\delta$.

Рассмотрим функцию $u_2(\zeta)$ — 2-й коэффициент в разложении (3): $u_2(\zeta) = u(\zeta) - u_0(\zeta)(1 - 3/2\delta) - 0(s^3)$. Используя значения функции $u(\zeta)$, полученные в [9], исследуя численно разность и пренебрегая членом ~ s^3, можно заметить, что функция u_2 хорошо описывается квадратичной функцией вида $u_2(\zeta) = Q_2\varepsilon(\zeta^2 + 0{,}1)$. Учитывая, что $Q_2 = 2\int_0^1 u_2(\zeta)\zeta d\zeta$, легко проверить, что предложенное представление функции $u_2(\zeta)$ обеспечивает приближенное равенство $Q_2 = Q_2 \cdot 1{,}0002$. Численная проверка аппроксимации функции $u_2(\zeta)$ путем сравнения с табличными значениями, рассчитанными в [7], показывает, что погрешность не превышает 1% вплоть до значений $\Lambda = 0{,}990$ (табл. 1).

Таблица 1

Погрешности вычисления функции $u(\zeta)$, %

Λ	0.999		0.995		0.990	
g	0,5	0,9	0,5	0,9	0,5	0,9
ζ/s	0,0258	0,05774	0,05774	0,12910	0,08165	0,18257
0,1	0,1	0,2	0,4	1,0	0,5	2,0
0,5	0,1	0,4	0,1	2,0	0,1	4,0
0,7	0,03	0,5	0,3	0,8	0,4	3,0
1,0	0,2	0,6	0,6	2,0	1,0	4,0

Кроме того, учитывая связь функций $u_2(\zeta)$ и $a_3(\zeta)$, на которую было указано автором монографии [7], где $a_3(\zeta)$ — коэффициент при s^3 в разложении (2) для плоского альбедо, можно найти аналитическое представление функции $a_3(\zeta)$:

$$a_3(\zeta) = 4\left\{u_0(\zeta)\left[\frac{(5\varepsilon - 11)(3 - x_1)}{(5 - x_2)} - \varepsilon Q_2(\zeta^2 + 0,1)\right]\right\}. \tag{8}$$

Для задач, связанных с расчетом интенсивности отраженного излучения, представляет практический интерес повысить точность асимптотического разложения (4) для функции $\rho(\eta, \zeta)$ — коэффициента отражения для полубесконечного слоя. Для этого получим дополнительные члены разложения. Предположим по аналогии с выражением для $\rho_1(\eta, \zeta)$, что для функции $\rho_2(\eta, \zeta)$ выполняется соотношение $\rho_2(\eta, \zeta) = f(\eta)f(\zeta)$, где $f(\zeta)$ — произвольная функция. Тогда, учитывая, что $2\int_0^1 \rho_2(\eta, \zeta)\eta d\eta = a_2(\zeta)$ а также что второй коэффициент в разложении (6) для сферического альбедо $a_2 = 2\int_0^1 a_2(\zeta)\zeta d\zeta = 6\delta$, для функции $f(\zeta)$ можно записать следующие выражения:

$$2\int_0^1 \eta d\eta 2\int_0^1 f(\eta) f(\zeta)\zeta d\zeta = \left[2\int_0^1 f(\zeta)\zeta d\zeta\right]^2 = 6\delta;$$
$$2f(\zeta)\int_0^1 f(\eta)\eta d\eta = a_2(\zeta), \tag{9}$$

откуда $f(\zeta) = a_2(\zeta)/\sqrt{6\delta}$, а для функции $\rho(\eta, \zeta)$ получим

$$\rho_2(\eta, \zeta) = \frac{a_2(\eta)\, a_2(\zeta)}{6\delta}. \tag{10}$$

Проводя аналогичные рассуждения относительно 3-го коэффициента разложения (4), можно заметить, что справедливо также следующее соотношение:

$$\rho_3(\eta, \zeta) = \frac{a_3(\eta)\, a_3(\zeta)}{a_3^\infty}, \tag{11}$$

где выражения для $a_3(\zeta)$ и a_3^∞ приведены выше. Значения коэффициентов $\rho_2(\eta, \zeta)$ и $\rho_3(\eta, \zeta)$ при $\eta = \zeta = 1$ составляют в среднем $\rho_2 \sim 20$ и $\rho_3 \sim 80$; s^2и s^3 определяются истинным поглощением света и индикатрисой рассеяния, например, для земных облаков характерны значения $s^2 \sim 0,03$; $s^3 \sim 0,00,6$, а $\rho_0(\eta, \zeta) \sim 1$, поэтому 2- и 3-й члены разложения (4) составляют 10÷50% от $\rho(\eta, \zeta)$ и их учет значительно повышает точность вычисления коэффициента отражения от полубесконечного слоя. Погрешности вычисления функции $\rho(\zeta, \zeta)$ по асимптотическому разложению (4) с учетом полученных формул (10) и (11) меньше 1% для $\Lambda \geq 0,990$ и $g \leq 0,85$ (табл. 2).

Перейдем к рассмотрению коэффициента отражения для консервативного рассеяния ($\Lambda = 1$) $\rho_0(\eta, \zeta)$. Как известно (например, [7]), азимутально независимая часть коэффициента отражения представляется линейной комбинацией функций Амбарцумяна, например, в случае изотропного рассеяния ($x_1 = 0$ или $g = 0$)

$$\rho_0(\eta, \zeta, g = 0) = 1/4\,\frac{\varphi_0(\eta)\,\varphi_0(\zeta)}{\eta + \zeta}. \tag{12}$$

Функция Амбарцумяна $\varphi_0(\eta)$ при произвольном значении вероятности выживания кванта Λ представляется явным выражением достаточно сложного вида [7]. Краткая численная таблица значений функции $\varphi_0(\eta)$ и ее моментов приведена там же. Несмотря на довольно сложное аналитическое представление функции $\varphi_0(\eta)$, численный анализ ее значений показывает, что функция Амбарцумяна аппроксимируется линейной зависимостью, при этом погрешность не превосходит 0,25%

$$\varphi_0(\eta) = 1{,}81\,\eta + 1{,}10,\ \eta \geq 0{,}15,$$
$$\varphi_0(\eta) = 2{,}25\,\eta + 1{,}0,\ \eta < 0{,}15. \tag{13}$$

Таблица 2

Погрешности расчета функции $\rho(\zeta, \zeta)$ по асимптотическому разложению (4) с учетом формул (10) и (11), %

Λ	0,999		0,995		0,990	
g	0,5	0,9	0,5	0,9	0,5	0,9
ζ/s	0,0258	0,05774	0,05774	0,12910	0,08165	0,18257
0,1	0,2	0,6	0,2	1,0	0,3	2,6
0,5	0,2	0,3	0,4	1,0	1,0	3,0
1,0	0,1	0,3	0,5	1,0	0,7	3,0

В дальнейшем рассмотрении ограничение на значения η еще встретится, но дело в том, что при малых углах падения и отражения для решения задач используются более сложные методы, модель плоского слоя не применима, необходимо учитывать рефракцию и др. В случае же применения предлагаемых в настоящей статье формул к моделям плоской атмосферы требование $\eta \geq 0{,}2$ фактически не вносит ограничений. Таким образом, для функции $\rho_0(\eta, \zeta)$ в случае консервативного изотропного рассеяния справедливо следующее соотношение:

$$\rho_0(\eta, \zeta) = \frac{0{,}810\eta\zeta + 0{,}308}{\eta + \zeta} + 0{,}5. \tag{14}$$

Погрешности значений, полученных по формуле (14), равны ~ 0,4%.

При анизотропном рассеянии света вид функции $\rho_0(\eta, \zeta)$ значительно сложнее, но автору удалось получить аналитическое представление, хорошо аппроксимирующее коэффициент отражения.

Приведем здесь основные моменты анализа проблемы при анизотропном рассеянии. При этом будем использовать таблицы значений функции $\rho_0(\zeta, \zeta)$, полученные на основе строгих численных расчетов в [9] для широкого набора параметров индикатрисы рассеяния Хеньи—Гринстейна g и альбедо однократного рассеяния. Результат, приведенный в [9] для двучленной индикатрисы рассеяния, а также анализ численных значений показывают, что функция $\rho_0(\zeta, \zeta)$ линейна зависит от $g = 0{,}5 \div 0{,}9$. (Такие значения характерны для различных форм реальных облаков Земли и Венеры). Причем параметры линейной аппроксимации суть функции угла ζ. Иначе говоря, можно использовать представление вида

$$\rho_0(\zeta, \zeta) = \rho_0(\zeta, \zeta, g = 0) + \frac{\hat{f}_1(\zeta)}{2\zeta} + g\,\frac{\hat{f}_2(\zeta)}{2\zeta}, \tag{15}$$

где $\hat{f}_1$ и $\hat{f}_2$ функции, удовлетворяющие одному условию, а именно: необходимо учитывать, что функция $\rho(\eta, \zeta)$ симметрична относительно переменных η и ζ. Это приводит к требованию, чтобы функции $\hat{f}_1(\zeta)$ и $\hat{f}_2(\zeta)$ были представлены полными квадратами. Дальнейший численный анализ функции $\hat{f}_1$ и $\hat{f}_2$ и их производных по таблицам [7] приводит к следующим результатам:

$$\hat{f}_1(\zeta) = \hat{f}_1^2(\zeta) = (0{,}386 - 0{,}237\zeta)^2;$$
$$\hat{f}_2(\zeta) = 0{,}730\zeta^2 - 0{,}350\zeta - 0{,}188, \tag{16}$$

где функцию $\hat{f}_2$ легко выразить в виде линейной комбинации полных квадратов, при этом возможно много вариантов, нам же достаточно одного, а именно:

$$\hat{f}_2(\zeta) = f_2^2(\zeta) - f_3^2(\zeta) = (1{,}414 - 1{,}907\zeta)^2 - (1{,}479 - 1{,}705\zeta)^2. \tag{17}$$

Окончательно для коэффициента отражения в случае консервативного анизотропного рассеяния (g = 0,5÷0,9), получим аппроксимационную формулу

$$\rho_0(\eta, \zeta) = \frac{f_0(\eta) f_0(\zeta)}{\eta + \zeta} - \frac{f_1(\eta) f_1(\zeta)}{\eta + \zeta} + g \frac{f_2(\eta) f_2(\zeta) - f_3(\eta) f_3(\zeta)}{\eta + \zeta}, \tag{18}$$

функции f_1, f_2 и f_3 вычисляются по формулам (16) и (17), а функция $f_0(\eta) = \varphi_0(\eta)/2$. Сравнивая значения функции $\rho_0(\zeta, \zeta)$, полученные по формуле (18) и вычисленные на основе точного метода в [9], получим, что для значения ζ = 0,2 относительная ошибка меньше 3%, при ζ > 0,2, ошибка составляет доли процента (табл. 3).

Таблица 3

Погрешности аппроксимации функции $\rho_0(\eta, \zeta)$ формулой (16), %

ζ/g	0,5	0,75	0,8	0,85	0,9
0,1	12	15	17	19	27
0,2	3,0	0,3	0,9	1,5	3,0
0,4	0,1	0,5	0,7	0,8	0,4
0,6	0,1	<0,1	<0,1	<0,1	<0,1
0,8	0,1	0,05	0,2	0,1	0,3
1,0	≤0,1	<0,1	<0,1	<0,1	0,1

Можно предположить, что точность вычислений по формуле (18) сохранится и для других совокупностей η, ζ, При значении $\zeta \le 0{,}15$ ошибка возрастает до 15— 20% и предложенные формулы не пригодны. При необходимости положение можно улучшить, подобрав другие параметры линейных зависимостей функций f_2 и f_3, при этом функция f_1 сохраняет свой вид. Отметим, что формула (18) не переходит в формулу для изотропного рассеяния (12) при g = 0, потому что получена при условии $g \ge 0{,}5$. Точный численный метод расчета функции $\rho(\zeta, \eta)$ требует машинного счета и мало пригоден, например, в радиационных климатических моделях. Приближенные аналитические формулы, обеспечивающие достаточно высокую точность вычислений, удобнее для прикладных задач атмосферной оптики.

2. Формулы для коэффициентов рассеяния и поглощения облачного слоя, выраженные через интенсивность диффузного излучения

Рассмотрим плоский однородный облачный слой, бесконечно протяженный по горизонтали. Оптическая толщина слоя $\tau_0 = \varepsilon z$, где $\varepsilon = \sigma + \varkappa$ — объемный коэффициент ослабления; σ — объемный коэффициент рассеяния; $\varkappa$ — объемный коэффициент поглощения; z — геометрическая толщина слоя; $\Lambda = \sigma/(\sigma+\varkappa)$ — альбедо однократного рассеяния, причем в облачных слоях в видимой области спектра $1 - \Lambda \ll 1$.

Пусть на верхнюю границу слоя падает параллельный поток солнечного излучения πS, угол падения $\arccos\zeta$. Для описания отраженного и пропущенного слоем диффузного излучения введем усредненные по азимуту интенсивности

$$I(0, \eta, \zeta) = S\zeta\rho(0, \eta, \zeta);$$
$$I(\tau_0, \eta, \zeta) = S\zeta\sigma(\tau_0, \eta, \zeta), \tag{19}$$

где $\rho(0, \eta, \zeta)$ и $\sigma(\tau_0, \eta, \zeta)$ — коэффициенты яркости для диффузного отражения и пропускания, в случае большой оптической толщины слоя выражаются формулами [7],

$$\rho(0, \eta, \zeta) = \rho(\eta, \zeta) - \frac{u(\zeta) u(\eta) M\bar{N} e^{-2\kappa\tau_0}}{1 - N\bar{N} e^{-2\kappa\tau_0}};$$
$$\sigma(\tau_0, \eta, \zeta) = \frac{u(\zeta) \bar{u}(\eta) M e^{-\kappa\tau_0}}{1 - N\bar{N} e^{-2\kappa\tau_0}} \; (4), \tag{20}$$

где $I(0, \eta, \zeta)$ и $I(\tau_0, \eta, \zeta)$ могут измеряться в эксперименте, функция $u(\zeta)$ и величины M, N, k и Q зависят от истинного поглощения в облаке и индикатрисы рассеяния, описываемых параметрами Λ и g; зависимость от оптической толщины экспоненциальная. Таким образом, мы имеем два уравнения и три неизвестных Λ, g и τ_0. Предполагая параметр g известным, из независимых измерений или модельных расчетов постараемся определить величины Λ и τ_0. Влияние отражения света подстилающей поверхностью учитывается:

$$\left.\begin{aligned}\overline{N} &= N - AMQ^2/(1 - Aa^\infty)\\ \overline{u}(\eta) &= u(\eta) + AQa(\eta)/(1 - Aa^\infty)\end{aligned}\right\},\tag{21}$$

где A — альбедо поверхности,

Автор работы [10], решая задачу определения оптической толщины слоя по измерениям отраженной яркости, получил соотношение для оптической толщины $\tau' = \tau_0(3-x_1)$, преобразовав первое из уравнений (19). Здесь приведем промежуточное выражение, которое будет использовано ниже.

$$e^{2\kappa\tau_0} - \overline{N}N = \frac{MNu(\eta)\,u(\varsigma)}{\rho(\eta,\varsigma) - \rho(0,\ \eta,\ \varsigma)}.\tag{22}$$

Отметим, что в отличие от данной статьи в [8] делается предположение о том, что можно пренебречь слабым поглощением в облаках, а также спектральной зависимостью альбедо подстилающей поверхности и дальнейшее решение задачи проводится при условии $\Lambda = 1$ и $A = 0{,}2$.

Для решения системы уравнений (19) подставим соотношение (22) во второе из уравнений (19) и после очевидных преобразований получим

$$\sigma^2(\tau_0,\ \eta,\ \varsigma)\,\overline{N}u^2(\eta) = \overline{u}^2(\eta)\,\{Mu(\eta)\,u(\varsigma)\,[\rho(\eta,\ \varsigma) - \rho(0,\ \eta,\ \varsigma] - N[\rho(\eta,\ \varsigma) - \rho(0,\ \eta,\ \varsigma)]^2\}.\tag{23}$$

Выше отмечено, что для величин и функций, входящих в эту формулу при слабом поглощении, известны разложения по малому параметру. Приведем разложения для величин M и N, записанные по параметру s:

$$M = 8\,s + O(s^3),$$

$$N = 1 - 3\,\delta s + 9/2\,\delta^2 s^2 + O(s^3).\tag{24}$$

Подставим разложения (2)—(4) и (24) в уравнение (23) и обозначим разность $[\rho_0(\eta,\zeta) - \rho(0,\eta,\zeta)] = \rho$, тогда совершая необходимые преобразования и пренебрегая членами порядка s^3 и выше, получим уравнение относительно s^2, решение которого находится достаточно элементарно

$$s^2 = \frac{(1-A)^2\,[u_0^{\bar{2}}(\eta)\,\rho^2 - u_0^2(\eta)\,\sigma^2(\tau_0)]}{16u_0^2(\eta)\,[u_0^2(\varsigma)\,\overline{u}_0^2(\eta) - A^2\sigma^2(\tau_0)] - \overline{u}_0^2(\eta)\,a_2(\eta)\,a_2(\varsigma)\,\rho/(3\delta) - 12\delta\sigma^2(\tau_0)\,u_0^2(\eta) - A(1-A) + 2A\overline{u}_0^2(\eta)\,(a_2(\eta) - 6\delta u_0(\eta))\,\rho}.\tag{25}$$

Значения функций $\rho(0,\eta,\zeta)$ и $\sigma(\tau_0,\eta,\zeta)$ получаются из измерений отраженной и пропущенной облачным слоем интенсивности излучения. Значения функций $u_0(\eta)$, $a_2(\zeta)$ и $\rho_0(\eta,\zeta)$ для η, ζ соответствующих условиям измерений, находятся по таблицам [5, 7] или с помощью предложенных выше формул.

Запишем выражение для $\tau' = \tau_0(3-x_1)$, полученное в работе [8],

$$\tau' = (2s)^{-1}\ln\overline{N}\left[\frac{Mu(\eta)\,u(\varsigma)}{\rho(\eta,\ \varsigma - \rho(0,\ \eta,\ \varsigma)} + N\right].\tag{26}$$

Подставляя разложения для асимптотических констант it отбрасывая члены выше 3-го порядка по s, получим

$$\tau' = (2s)^{-1}\left\{2\ln N + \ln\frac{1 - A - 4As - 6A\delta s^2}{1 - A + 4As - 6A\delta s^2} + \right.$$

$$\left. + \ln\frac{\rho + 4u_0(\eta)u_0(\varsigma)\,s + a_2(\eta)\,a_2(\varsigma)\,s^2/(6\delta) - 18u_0(\eta)\,u_0(\varsigma)\,s^3}{\rho - 4u_0(\eta)\,u_0(\varsigma)\,s + a_2(\eta)\,a_2(\varsigma)\,s^2/(6\delta)}\right\}.\tag{27}$$

Кроме того, справедливы следующие формулы для объемных коэффициентов поглощения и рассеяния $x = (1-\Lambda)\tau_0/z$ или, учитывая определение параметра s, $\varkappa = \tau' s^2/z$. Для объемного коэффициента рассеяния имеем $\sigma = \tau'[(3-x_1)^{-1} - s^2]/z$.

3. Погрешности метода и область применимости

В предыдущей работе автора ([3]) были предложены формулы для определения относительных ошибок δs и $\delta\tau_0$. Более внимательное рассмотрение этого вопроса приводит к другим соотношениям, которые получаются из формул для s^2 и то согласно теории погрешностей, а именно, если измеряются потоки излучения $F^{\uparrow}$ и $F^{\downarrow}$:

$$\delta s \leqslant \frac{\Delta F}{1-F^{\uparrow}-F^{\downarrow}} + \frac{\Delta F\, 2a_2(\varsigma) + 16u_0\Delta u_0 + (1-F^{\uparrow})\,\Delta a_2}{16u_0(\varsigma) - 2a_2(\varsigma)(1-F^{\uparrow})}; \tag{28}$$

$$\delta\tau_0 \leqslant \left((3\delta+25)\,\Delta s + \frac{\Delta F}{(1-F^{\uparrow})^2}\right)\Big/\tau_0 + \frac{\Delta x_1}{3-x_1} + \frac{\Delta s}{s}, \tag{29}$$

где ΔF — абсолютная ошибка измерений потоков; величина $1-F^{\uparrow}-F^{\downarrow}$ определяющая относительную величину притока энергии к слою тем больше, чем сильнее поглощение излучения, она обычно находится в пределах 0,04—0,08 (малая разность близких величин). Таким образом, первый член суммы (28) определяет порядок погрешности величины s, а именно при $\Delta F = 0{,}002$, $\delta_s \leq 4\%$. Абсолютные погрешности Δu_0 и Δa_2 происходят из-за того, что на верхнюю границу облака падает поток, частично рассеянный вышележащей атмосферой. В монографии [7] показано, что доля рассеянного света в безоблачной атмосфере составляет 0,1. Полностью диффузному излучению вместо функции $u_0(\zeta)$ соответствует величина $\int_0^1 u_0(\zeta)\zeta d\zeta = 1$ и вместо $a_2(\zeta)$ — величина $6\delta = 8{,}5$, тогда, учитывая вышесказанное, можно записать

$$\Delta u_0(\zeta) = 0{,}1\,(u_0(\zeta)-1) \sim 0{,}02;$$

$$\Delta a_2(\zeta) = 0{,}1\,(a_2(\zeta)-6\delta) \sim 0{,}2. \tag{30}$$

Разности в соотношениях (30) зависят от величины косинуса зенитного угла ζ и минимальны при зенитных углах, соответствующих $\zeta \sim 0{,}6-0{,}7$. Это условие желательно выполнять при проведении измерений.

Погрешность величины τ_0 в основном определяется погрешностью определения s и неопределенностью задания параметра индикатрисы рассеяния x_1. В случае облаков большой оптической толщины 1-й член суммы (28) может быть малым и слабо влиять на величину погрешности. Легко показать, что в случае интенсивностей результат для погрешностей будет такой же, потому что соответствующие формулы имеют подобную структуру и выражаются через те же асимптотические константы.

При использовании полученных выражений для величин τ_0 и s надо учитывать, что они справедливы только в области применимости асимптотических формул и разложений, а именно ($\tau_0 \gg 1$), ($1-\Lambda \ll 1$).

Область применимости предложенного метода для соответствующего диапазона значений оптической толщины рассеивающего слоя и истинного поглощения в нем подробно рассмотрена в [3].

4, Заключение

Отметим, что метод, предложенный в [3] и развитый в настоящей статье для получения объемных коэффициентов рассеяния и поглощения по измерениям поля диффузного излучения на границах рассеивающего слоя полезен при исследовании облачных слоев, удовлетворяющих области применимости асимптотических формул. Для облаков малой оптической толщины или в области сильного поглощения полученные формулы не пригодны.

Аппроксимационные формулы и дополнительные члены асимптотических разложений, полученные выше, значительно улучшают точность расчетов, расширяют область применимости и позволяют пользоваться аналитическими представлениями для всех используемых функций, что особенно полезно при решении обратных задач.

1. Мельникова И. Н., Минин И. Н. //Изв. АН СССР, Сер. ФАО. 1977. Т. 13. № 3. С. 254—263.
2. King M. D. //J. Almos. Sci. V. 38. P. 2031—2044.
3. Мельникова И. Н. //Оптика атмосферы. 1991. Т. 4. № 4. С. 48—56.
4. King M. D. //J. Atmos. Sci. 1986. V. 43, P. 784—801.
5. Демьяников А. И. //Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1986. Т. 22. № 6. С. 652—655.
6. Соболев В., В. Рассеяние света в атмосферах планет, М.: Наука, 1972. 264 с.
7. Минин И. Н. Теория переноса излучения в атмосферах планет., М.: Наука. 1988. 264 с.

8. Я н о в и ц к и й Э. Г. //Астрон. Ж. 1972. Т. 49. С. 844—849.
9. D l u g a c h J. M., Y a n o v i t s k i j E. G. //Icarus. 1974. Т. 22. Р. 66—81.
10. K i n g M., D. //J. Atmos. Sci. 1987. V. 44. P. 1734—4751.

Ленинградский госуниверситет

Поступила в редакцию
10 июня 1991 г.

I. N. M e l ' n i k o v a. **Analytical Formulas for Determination of a Cloud Layer Optical Parameters from the Data of Solar Radiation Field Measurements. P. 1. Theory.**

Additional terms of asymptotic expansions of the functions, describing the diffuse light in weakly absorbing media and the approximate relationship for the reflection coefficient are obtained. These allow one to essentially widen the limits of the asymptotics applicability and to simplify the calculations of these functions. On the basis of asymptotic formulas of the radiation transfer theory for diffuse light intensity in an optically thick layer the expressions for light absorption are derived. In combination with the relationship for optical thickness they make it possible to obtain the volume absorption and scattering coefficients for clouds, using the intensity measurements on cloud top and bottom. The accuracy of these formulas is investigated.