

**Р.Н. Ефремов**

## **МЕТОДЫ СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА В ЭКОЛОГИИ АТМОСФЕРЫ ГОРОДА**

Разработаны методики для использования в автоматизированной системе контроля и регулирования загрязнения атмосферы города на основе радикального изменения существующего подхода к моделированию загрязнения воздуха.

Основной упор сделан на информацию, получаемую из наблюдений. Модель загрязнения подстраивается к полученным из измерений данным. Это позволяет отказаться от расчета большого числа трудно определяемых исходных параметров.

Методы системного анализа применяются для разработки алгоритмов создания и оптимального функционирования системы контроля и регулирования загрязнения воздуха.

В последние годы повысилось внимание к вопросам создания системы контроля за загрязнением воздуха атмосферы города. В этой связи следует указать, прежде всего, на необходимость разработки приборов, с достаточной точностью измеряющих уровень загрязнения. Другая важная задача – разработка математических моделей, необходимых для автоматизации управления работой системы контроля и регулирования с помощью ЭВМ. Такая система должна быть не только источником данных о загрязнении, но и системой, позволяющей регулировать это загрязнение. В связи с этим система моделей должна рассчитывать как прямые задачи по определению загрязнения воздуха и его прогнозу, так и обратные, позволяющие ответить на вопрос, что нужно предпринять для того, чтобы обратить некоторые показатели эффективности в максимум или минимум.

Необходимость решения обратных задач предьявляет, в соответствии с наукой управления, определенные требования к применяемым моделям. Они не должны быть излишне громоздкими, поскольку это приводит к слабой чувствительности по отношению к применяемым управлениям.

1. Существует ряд теоретических моделей для моделирования рассеяния примесей в атмосфере. Будем моделировать эмиссию примесей в атмосферу города как результат деятельности некоторой совокупности точечных непрерывных источников. Поскольку расчеты по модели предполагается проводить на ЭВМ, то загрязнение от автотранспорта (линейные непрерывные источники) можно моделировать совокупностью точечных источников.

В основу моделирования может быть положена следующая формула для загрязнения у земли от  $j$ -го источника:

$$q_j(x, y) = \frac{A_j}{(x - x_j)^2} \exp \left\{ -\frac{B}{x - x_j} - \frac{C(y - y_j)^2}{(x - x_j)^2} \right\}, \quad (1)$$

где  $q_j(x, y)$  – концентрация примеси у поверхности земли от  $j$ -го источника;  $A_j, B, C$  – коэффициенты, зависящие от метеорологических условий; величина  $A_j$  – пропорциональна мощности  $j$ -го источника;  $x_j, y_j$  – координаты  $j$ -го источника. Ось  $OX$  выбрана по направлению ветра, ось  $OY$  – перпендикулярно оси  $OX$ .

Общее загрязнение от  $n$  источников вычисляется по формуле

$$q = \sum_{j=1}^n q_j = \sum_{j=1}^n \frac{A_j}{(x - x_j)^2} \exp \left\{ -\frac{B}{x - x_j} - \frac{C(y - y_j)^2}{(x - x_j)^2} \right\}. \quad (2)$$

В методике автора коэффициенты  $A_j, B, C$  вычисляются не теоретически, а эмпирическим путем, в связи с чем формулы (1) и (2) становятся эмпирическими. Основой для расчетов являются данные  $q_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) – плотности загрязнения на  $k$ -м пункте наблюдения. Расчеты

коэффициентов проводятся методом наименьших квадратов, причем значения  $B$  и  $C$  рассчитываются для некоторого срока наблюдения градиентным методом, а для  $A_j$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ) автором получены аналитические формулы на основе метода наименьших квадратов. В целом коэффициенты  $A_j$ ,  $B$  и  $C$  рассчитываются методом последовательных приближений. Разработана соответствующая программа для ЭВМ.

От коэффициентов  $A_j$  можно перейти к мощностям источников  $Q_j$ . Это, в некотором частном случае, позволяет использовать алгоритм для обнаружения источника, допустившего несанкционированный выброс. Если на входе рассмотренного алгоритма задать  $q$  равным ПДК, то на выходе получим величины предельно допустимых выбросов для каждого источника.

2. Перепишем формулу (2) в следующем виде:

$$q = \sum_{j=1}^n A_j f_j(x - x_j, y - y_j), \quad (3)$$

где

$$f_j(x, y) = \frac{1}{(x - x_j)^2} \exp \left\{ -\frac{B}{x - x_j} - \frac{C(y - y_j)^2}{(x - x_j)^2} \right\}. \quad (4)$$

Пусть  $v$ -й источник произвел несанкционированный выброс, тогда в  $k$ -й точке наблюдения

$$\Delta q(x_k, y_k) = f_v(x_k - x_v, y_k - y_v) \Delta A_v, \quad (k = 1, 2, \dots, m). \quad (5)$$

Отсюда  $\Delta A_v$  равно

$$\frac{\Delta q_k}{f_v(x_k - x_v, y_k - y_v)}. \quad (6)$$

Теоретически если номер источника  $v$  выбран правильно, то отношение (6) не будет зависеть от номера  $k$  (то есть дисперсия для выражения (6) равна нулю). Практически это реализуется в минимум разброса (6) для разных  $k$ . Среднее значение выражения (6) имеет вид

$$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \frac{\Delta q_k}{f_v(x_k - x_v, y_k - y_v)}. \quad (7)$$

Отбрасывая постоянный множитель, получаем следующее выражение для статистической дисперсии:

$$D(v) = \sum_{k=1}^m \left( \frac{\Delta q_k}{f_v(x_k - x_v, y_k - y_v)} - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \frac{\Delta q_k}{f_v(x_k - x_v, y_k - y_v)} \right)^2. \quad (8)$$

Эта функция будет минимальна для того  $v$ , которому соответствует источник, допустивший несанкционированный выброс. Разработана программа, реализующая этот алгоритм.

3. Рассмотрим вероятностный подход к вопросу обнаружения источника, допустившего несанкционированный выброс. Если имеется достаточно большое число наблюдений над загрязнением атмосферного воздуха, то статистическим путем можно определить  $P(H_j)$  – вероятность того, что выброс совершен источником с номером  $j$ , и плотности распределения  $f_{\Delta A_j}(v)$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ).

Так как по соотношению (5)  $\Delta q_k$  зависит линейно от  $\Delta A_j$ , то на основании закона распределения для  $\Delta A_j$  можно получить закон распределения для  $\Delta q_k$ :

$$f_{\Delta q_k}(\Delta q_k / H_j) = f_{\Delta A_j} \left( \frac{\Delta q_k}{\varphi_j(x_k - x_j, y_k - y_j)} \right) \frac{1}{\varphi_j(x_k, y_k)}. \quad (9)$$

Далее получаем  $\Delta q_1, \Delta q_2, \dots, \Delta q_k$ , после чего можно применить обобщенную формулу гипотез

$$P(H_j / \Delta q_1, \Delta q_2, \dots, \Delta q_k) = \frac{P(H_j) f(\Delta q_1 / H_j) \dots f(\Delta q_k / H_j)}{\sum_{j=1}^n P(H_j) f(\Delta q_1 / H_j) \dots f(\Delta q_k / H_j)}, \quad (10)$$

( $j = 1, 2, \dots, n$ ).

Сравнивая эти условные вероятности, можно получить решение задачи о нахождении источника, допустившего несанкционированный выброс.

4. В настоящее время имеется достаточно много работ по оптимальному размещению пунктов наблюдения за загрязнением (например, [1, 2]). Многие авторы используют соображения об изменчивости поля, применявшиеся ранее в метеорологии к полям метеоэлементов. Однако представляется более целесообразным другой подход, основанный на рассмотрении поля загрязнения как результата функционирования определенного количества непрерывных источников.

В связи с этим будем характеризовать каждую точку города средним числом источников, к которым чувствителен пункт наблюдения, расположенный в этой точке. Интегрируя формулу (1) по скорости и по направлению ветра с учетом повторяемостей скорости и направления в течение года, получаем среднюю концентрацию от некоторого источника в точке с координатами  $(x_{ij}, y_{ij})$ . Моделирование для каждого источника позволяет найти число  $a_{ij}$  источников, которые формируют загрязнение в этой точке.

Рассмотрим теорию города как совокупность  $m \times n$  элементов. Каждый элемент характеризуем точкой  $x_{ij}, y_{ij}$ . Пусть далее значение  $X_{ij}$  равно 1, если в элементе следует поместить пункт наблюдения, и 0, если этот пункт помещать не нужно. С каждой точкой связано рассчитанное число  $a_{ij}$ . При расчетах учитывают только те источники, которые в данной точке формируют уровень загрязнения, превышающий определенное пороговое значение.

Запишем среднее число источников, <наблюдаемое> одним пунктом, в виде

$$\frac{1}{M} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} X_{ij}, \quad (11)$$

где  $M$  – общее число пунктов наблюдения. Окончательно сформируем следующую задачу оптимизации, позволяющую <расставить> пункты наблюдения. Необходимо найти максимум:

$$Q = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} X_{ij} \quad (12)$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij} = M, \quad \sum_{i=1}^m X_{ij} \geq 1, \quad \sum_{j=1}^n X_{ij} \geq 1. \quad (13)$$

Первое ограничение означает, что число пунктов наблюдения равно  $M$ , второе и третье ограничения обеспечивают распределение пунктов наблюдения по всей территории города.

Сформулированную задачу можно решить симплексным методом линейного программирования.

В частном случае, когда можно пренебречь вторым и третьим ограничениями, задача сводится к следующей простой процедуре. Рассчитываем поле  $a_{ij}$ , находим  $\max a_{ij}$ . Ему соответствует первый пункт наблюдения. Второй пункт наблюдения соответствует  $\max a_{ij}$  при условии, что  $a_{ij}$  для первого пункта наблюдения исключается из рассмотрения и т.д. Автором разработана программа, позволяющая решать рассмотренную задачу. На рисунке приведены расчеты на ЭВМ по разработанной методике. Предполагалось, что в городе следует разместить четыре пункта наблюдения. Обведенные рамкой числа соответствуют выбранным пунктам.

**Матрица видимых источников**

0.4	0.5	0.2	0.2	0.4	0.3
0.4	0.4	0.3	0.3	0.3	0.3
<span style="border: 1px solid black; padding: 1px;">1.2</span>	0.4	0.5	0.6	0.4	0.3
0.4	0.4	0.2	0.4	0.5	<span style="border: 1px solid black; padding: 1px;">1.2</span>
0.9	0.3	0.1	0.2	0.5	0.3
0.9	<span style="border: 1px solid black; padding: 1px;">1.2</span>	0.9	0.3	0.3	0.3
0.9	1.2	<span style="border: 1px solid black; padding: 1px;">1.2</span>	0.3	0.3	0.3

5. Одной из наиболее интересных задач является задача регулирования загрязнения в атмосфере города. Рассмотрим прежде всего задачу регулирования загрязнения от  $n$  точечных непрерывных источников. Пусть  $u_j$  – относительное уменьшение интенсивности выброса от  $j$ -го источника;  $\varphi_j(u_j)$  – функция, характеризующая стоимость уменьшения интенсивности выбросов;  $v_j$  – максимальное уменьшение интенсивности выбросов от  $j$ -го источника, причем

$$0 \leq u_j \leq v_j \leq 1. \quad (14)$$

Если производится регулирование, то концентрация примеси в точке  $(x, y)$  будет иметь вид

$$q(x, y) = \sum_{j=1}^n A_j (1 - u_j) f_j(x - x_j, y - y_j). \quad (15)$$

Можно сформулировать следующую задачу регулирования. Найти такой вектор  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ , который минимизирует стоимость регулирования

$$\Phi(u) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(u_j) \quad (16)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^n A_j (1 - u_j) f_j(x_k - x_j, y_k - y_j) \leq \text{ПДК} \quad (k = 1, 2, \dots, m), \quad 0 \leq u_j \leq v_j, \quad (17)$$

где  $m$  – число пунктов наблюдения.

Задача регулирования сформулирована в виде задачи линейного программирования и может быть решена симплексным методом.

Рассмотрим еще одну задачу регулирования. Пусть выделяемые на регулирование средства  $c \leq c_0$  ограничены. Нужно найти такой вектор управления  $u$ , который минимизирует среднее загрязнение:

$$Z(u) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n A_j (1 - u_j) f_j(x_k - x_j, y_k - y_j) \quad (18)$$

при ограничении  $\sum_{j=1}^n \varphi_j(u_j) \leq c_0$ . Эта задача также может быть решена симплексным методом.

Для первой из этих задач автором разработана программа расчетов на ЭВМ.

6. Регулирование загрязнения, вызванного автотранспортом, должно учитывать особенность загрязнения воздуха, связанную с тем, что уменьшение мощности линейных источников  $Q_j(0)$  на одних магистралях приводит к увеличению выбросов на других. Значения  $Q_j(0)$  можно определить: методом адаптации (см. п. 1) и на основе опытных данных об интенсивности движения на улицах, пересчитывая ее известными методами в  $Q_j(0)$ .

Рассмотрим методику статистического моделирования интенсивности движения на улицах города. Смоделируем начальную и конечную точки маршрута (простейшее предположение – равномерный закон распределения соответствующих случайных векторов). Маршрут между этими точками определяется методом динамического программирования. Повторим эти действия  $n$  раз. Суммируя длины всех маршрутов и разделив сумму на среднюю скорость движения, получим величину  $T$  – среднюю продолжительность одной поездки.

Для выбранных точек подсчитаем число маршрутов, проходящих через данную точку. Разделив эту величину на  $T$ , получим  $\mu(x, y)$  – вспомогательную интенсивность движения в точке  $(x, y)$ . Пусть далее  $N$  – число автомашин в городе, а  $v$  показывает, какая часть автомобилей находится в пути. Окончательная интенсивность движения [1/ед. времени] вычисляется по формуле

$$M(x, y) = \mu(x, y) (N v / n). \quad (19)$$

Далее интенсивность движения пересчитываем в интенсивность выбросов. Пусть

$$z_j = \begin{cases} 0, & \text{если улица с номером закрыта для движения,} \\ 1 & \text{– в противном случае.} \end{cases}$$

Обозначим буквой  $l_j$  длину  $j$ -й улицы. Пусть целевая функция

$$G = \sum_{j=1}^m z_j l_j \quad (20)$$

– суммарная длина улиц, открытых для движения, а  $m$  – общее число улиц. Тогда задачу регулирования можно сформулировать следующим образом. Найти  $z_j$  ( $j=1, 2, \dots, m$ ) так, чтобы максимизировать  $G$ , при условии, что уровень загрязнения на пунктах наблюдения не превышает ПДК.

7. Загрязнение воздуха города можно также регулировать во времени. Примем следующие простые предположения. Каждый  $j$ -й источник должен проработать некоторое время  $\Delta a_j$ . Начало работы источника  $x_j$  можно выбирать на некотором промежутке времени  $[a_{j1}, a_{j2}]$ , но так, чтобы  $\Delta a_j$  могло целиком поместиться на интервале  $[0, T]$ .

Один из возможных вариантов работы регулируемых источников показан в таблице (график Ганта). Двойные черточки обозначают время, когда работает источник.

Каждому варианту соответствует определенная функция трех переменных  $q(x, y, t)$ , т.е. уровень загрязнения воздуха города.

Один из вариантов работы регулируемых источников

N источника	Часы							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	=	=						
2		=	=	=	=			
3							=	=
4				=	=	=	=	

Примем в качестве функции цели выражение

$$G_1 = \max_{x, y, t} q(x, y, t). \quad (21)$$

Задача регулирования состоит в определении такого варианта работы источников, удовлетворяющего сформулированным ограничениям, который обращает в минимум величину  $G_1$ . При расчетах определяется также такой вариант работы, который минимизирует среднее загрязнение в городе

$$G_2 = q(\overline{x, y, t}),$$

где осреднение проводится по времени  $t$  и координатам  $x$  и  $y$ .

Сформулированные задачи регулирования являются одними из наиболее трудных для решения задач календарного планирования [3].

Будем решать эти задачи методом статистического моделирования, считая момент начала работы для  $j$ -го источника равномерно распределенным на интервале  $[0, T - \Delta a_j]$ . Это позволяет получить одну реализацию расписания и найти соответствующее значение функции цели. Квазиоптимальное расписание будет соответствовать минимальному значению функции цели. Автором разработана программа, реализующая рассмотренный алгоритм.

8. В п. 4 была разработана методика выбора расположения стационарных пунктов наблюдения за загрязнением воздуха. Рассмотрим задачу выбора оптимального маршрута для передвижной станции контроля загрязнения. Пусть станция должна дополнительно к стационарным пунктам произвести наблюдения в  $n$  пунктах. Введем в методику п. 4 конкретные метеословия, соответствующие наблюдениям за загрязнением. Исключим временно из рассмотрения те элементы площади города, которым соответствуют стационарные пункты наблюдения. Применяя методику п. 4, получим координаты точек, в которых следует провести наблюдения дополнительно. Далее для дополнительно найденных пунктов и исходной точки маршрута следует решить задачу коммивояжера: как объехать указанные точки, чтобы свети к минимуму затраты на проезд. Для данной задачи разработана программа для ЭВМ, позволяющая получить наиболее дешевый путь объезда дополнительных точек наблюдения методом ветвей и границ [3].

**Пример.** На основании методики п. 4 рассчитаны координаты точек наблюдения для передвижной станции и по ним получена матрица, вида

$$\begin{pmatrix} x & 1 & 4 & 12 \\ 2 & x & 5 & 8 \\ 3 & 6 & x & 10 \\ 11 & 7 & 9 & x \end{pmatrix},$$

которая характеризует затраты на проезд из  $i$ -го (номер строки) в  $j$ -й (номер столбца) пункт наблюдения передвижной станции (станция вы-езжает из 1-го пункта). Таким образом из проведенного расчета видно, что самый дешевый маршрут передвижения – это пункты 1–2–4–3–1, а минимальная стоимость проезда 21 ед.

1. Пененко В.В., Рапуга В.Ф., Быков А.В. Применение методов планирования эксперимента в задачах оценки состояния гидromетеорологических полей. Новосибирск, 1986. 19 с.
2. П р и м а к А. В. // Труды 2 Всесоюз. конференции. Л., 1986. С. 41–51.
3. Т а х а Х. Исследование операций. М.: Мир, 1985. Т. 1. 479 с. Т. 2. 495 с.

Российский государственный  
гидрометеорологический институт, Санкт-Петербург

Поступила в редакцию  
15 ноября 1993 г.

**R. N. Efremov. Methods of the Systems Analysis in Ecology of Town Atmosphere.**

A set of algorithms has been developed in a way allowing to use it in the automatic system of the town air pollution checkout and control on the basis of a radically changed approach to the air pollution estimation methods. The main emphasis is made on the information to be obtained from observations and on the adjusting the model (foreseen in the algorithms) to the data obtained. This permits to refuse many parameters, the value of which are difficult to determine .