«Оптика атмосферы», **2**, № 2 (1989) УДК 621.391.266:535

С.В. Буцев, В.Ш. Хисматулин

СИНТЕЗ АЛГОРИТМА ОЦЕНИВАНИЯ СОСТОЯНИЯ ВОЛНОВОГО ФРОНТА ДЛЯ АДАПТИВНОЙ ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Рассматривается задача компенсации искажений волнового фронта. Синтезирован алгоритм оценивания состояния волнового фронта от удаленного точечного источника для адаптивной оптической системы с раздельной коррекцией аберраций различного порядка, позволяющий получить минимальную среднеквадратическую ошибку оценивания. В качестве измерителя ошибок коррекции используется датчик Гартмана.

Согласно современным представлениям, спектр фазовых флуктуаций волнового фронта ограничен со стороны высоких пространственных частот, и поэтому мгновенную реализацию волнового фронта можно представить в виде поля с пространственной и временной корреляцией. Исходя из рассматриваемой схемы коррекции, представим функцию фазовых искажений волнового фронта в виде

$$\Phi(\rho, t) = b_1(t) R_1(\rho) + b_2(t) R_2(\rho) + b_3(t) R_3(\rho) + \Phi_л(\rho, t), \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\rho}$ — вектор нормированных координат, определяющих положение данной точки относительно центра приемной апертуры: в полярных координатах $\boldsymbol{\rho}\{\rho, \varphi\}$, в прямоугольных координатах $\boldsymbol{\rho} = \{u, v\}$, причем $u = \dfrac{x}{R_0}$, $v = \dfrac{y}{R_0}$, $\rho = \sqrt{u^2 + v^2}$, x, y — метрическое расстояние по соответствующим осям, R_0 — радиус апертуры; $R_1(\rho) = \dfrac{Z_1(\rho)}{2} = \rho\cos\varphi = \dfrac{x}{R_0}$, $R_2(\rho) = \dfrac{Z_2(\rho)}{2} = \rho\sin\varphi = \dfrac{y}{R_0}$ — функции наклонов волнового фронта по осям X и Y, лежащим в плоскости приемной апертуры; $R_3(\rho) = \dfrac{Z_3(\rho)}{\sqrt{3}} = 2\rho^2 - 1$ — функция дефокусировки; $Z_1(\rho)$, $Z_2(\rho)$, $Z_3(\rho)$ — полиномы Цернике; $b_l(t)$ — модовые коэффициенты, являющиеся случайными функциями времени; $\Phi_л(\boldsymbol{\rho}, t)$ — остаточные фазовые искажения волнового фронта, соответствующие аберрациям типа астигматизм и аберрациям высших порядков.

В качестве входных воздействий для системы коррекции примем наклоны волнового фронта, являющиеся частными производными функции фазовых искажений по двум взаимно ортогональным направлениям

$$\Psi(\rho, t) = \frac{\partial\Phi(\rho, t)}{\partial u} = b_1(t) + 4ub_3(t) + \Psi_л(\rho, t); \tag{2}$$

$$\Theta(\rho, t) = \frac{\partial\Phi(\rho, t)}{\partial v} = b_2(t) + 4vb_3(t) + \Theta_л(\rho, t),$$

где $\Psi_л(\rho, t) = \dfrac{\partial\Phi_л(\rho, t)}{\partial u}$, $\Theta_л(\rho, t) = \dfrac{\partial\Phi_л(\rho, t)}{\partial v}$ — остаточные локальные наклоны волнового фронта.

Представим приемную апертуру в виде квадратной решетки, состоящей из N^2 элементарных ячеек. Будем полагать, что в пределах каждой из ячеек ($\rho \in \Omega_i$) наклоны волнового фронта характеризуются некоторыми усредненными значениями $\psi_i(t)$, $\theta_i(t)$, $I = 1\ldots N^2$, тогда с учетом (2) наклон волнового фронта в пределах i-й ячейки можно представить следующим образом:

$$\Psi_i(t) = b_1(t) + 4ub_3(t) + \Psi_{лi}(t); \quad \Theta_i(t) = b_2(t) + 4vb_3(t) + \Theta_{лi}(t). \tag{3}$$

Соответственно совокупность наклонов волнового фронта по осям X, Y будем характеризовать векторами-столбцами $\psi = \{\psi_i\}$ и $\theta = \{\theta_i\}$, $i = 1, \ldots, N^2$.

Исследования корреляционных свойств модовых коэффициентов $b_l(t)$, $l = 1, 2, 3$ аберраций первого и второго порядка (наклоны и дефокусировка) показали, что они хорошо аппроксимируются экспоненциальной корреляционной функцией [1]. Тогда для дискретного времени $t = \kappa T$ (T — период измерения), математические модели общего наклона волнового фронта и наклона от дефокусировки можно описать стохастическими разностными уравнениями:

$$b_l(\kappa T) = \beta_l b_l(\kappa T - T) + (\eta_l(\kappa T - T), \ (l = 1,\ 2,\ 3) \tag{4}$$

где $\beta_l = \exp\left(-\dfrac{T}{\tau_0}\right)$; τ_0 — постоянная времени корреляции коэффициентов b_l; η_l — дискретная белая последовательность с нулевым средним и дисперсией $d_{\eta l} = M\{b_l^2(\kappa T)\}(1-\beta_l^2) = d_{b_l}(1-\beta_l^2)$; $M\{\cdot\}$ — оператор математического ожидания.

Основываясь на [2] будем полагать, что пространственно-временные корреляционные функции остаточных локальных наклонов в первом приближении имеют следующий вид:

$$\Gamma_i(\rho,\ \tau) = d_{\text{л}i} \exp\left(-\sqrt{\frac{\rho^2}{\rho_0^2} + \frac{\tau^2}{\tau_0^2}}\right), \tag{5}$$

где $d_{\text{л}i}$ — дисперсия локальных искажений; ρ_0 — радиус пространственной корреляции; τ_0 — постоянная времени корреляции локальных искажений. В этом случае математическая модель остаточных локальных наклонов волнового фронта в дискретном времени описывается векторно-матричным стохастическим разностным уравнением

$$\underset{(\alpha=\psi,\ \theta)}{\boldsymbol{\alpha}_{\text{л}}(\kappa T)} = A_\alpha \boldsymbol{\alpha}_{\text{л}}(\kappa T - T) + \boldsymbol{\eta}_{\alpha_{\text{л}}}(\kappa T - T), \tag{6}$$

где $\boldsymbol{\alpha}_{\text{л}} = \{\alpha_{\text{л}i}\}$ — вектор-столбец локальных наклонов волнового фронта, состоящий из N^2 компонентов; $A_\alpha=\{\beta_{\alpha i\kappa}\}$ — матрица, коэффициенты которой $\beta_{\alpha ik} = \exp\left(-\sqrt{\dfrac{|\rho_i - \rho_\kappa|^2}{\rho_0^2} + \dfrac{T^2}{\tau_0^2}}\right)$; $i,\ \kappa = 1 \ldots N^2$; $\boldsymbol{\eta}_{\alpha_{\text{л}}} = \{\eta_{\text{л}i}\}$ — вектор-столбец дискретных белых последовательностей с матрицей дисперсий $D_{\eta\alpha\text{л}} = \operatorname{diag}\{d_{\eta_{\text{л}i}}\}$, в которой $d_{\eta_{\text{л}i}} = d_{\text{л}i}(1-\beta_{\alpha ii}^2)$.

Как видим, полное состояние волнового фронта определяется вектором $z^T = [b_1 \psi_{\text{л}}^T b_2 \theta_{\text{л}}^T b_3]$, содержащим $(3+2N^2)$ компонентов. Объединяя (4) и (6), получаем обобщенное рекуррентное уравнение состояния волнового фронта

$$\boldsymbol{z}(\kappa T) = A\boldsymbol{z}(\kappa T - T) + \boldsymbol{\eta}(\kappa T - T), \tag{7}$$

где A — блочная матрица переходов состояния; $\boldsymbol{\eta}(\kappa T) = [\eta_1, \boldsymbol{\eta}_{\psi_{\text{л}}}^T, \eta_2, \boldsymbol{\eta}_{\theta_{\text{л}}}^T, \eta_3]^T$ — вектор-столбец дискретных белых последовательностей с матрицей дисперсий D_η.

Если изображения отверстий диафрагмы датчика Гартмана, образующиеся на матрице фотодетекторов, достаточно разнесены (для исключения возможности значимой интерференции полей, создающих эти изображения), то ортогональные составляющие смещений центра «тяжести» изображения на каждом из фотодетекторов пропорциональны наклонам волнового фронта поля на выходе корректора в области, определяемой координатами центра соответствующего отверстия диафрагмы. Поэтому вектор-столбец $\boldsymbol{u}_{\text{д}}(\kappa T)$ выходных сигналов двухкоординатного датчика можно представить в виде

$$\boldsymbol{u}_{\text{д}}(\kappa T) = \kappa_{\text{д}}[\gamma(\kappa T) - \gamma_0(\kappa T)] + \boldsymbol{u}_f(\kappa T), \tag{8}$$

где $\gamma(\kappa T) = \begin{bmatrix}\psi(\kappa T)\\ \theta(\kappa T)\end{bmatrix}$ — объединенный вектор-столбец наклонов волнового фронта, падающего на корректор; $\gamma_0(\kappa T) = \begin{bmatrix}\psi_0(\kappa T)\\ \theta_0(\kappa T)\end{bmatrix}$ — объединенный вектор смещений, вносимых корректором в поле наклонов волнового фронта; $\kappa_{\text{д}}$ — крутизна характеристики датчика относительно величины наклона волнового фронта; $\boldsymbol{u}_f(\kappa T)$ — вектор-столбец ошибок измерений, являющихся взаимно некоррелированными белыми последовательностями с дисперсиями $d_{fi}(\kappa T)$.

Нетрудно убедиться, что вектор $\gamma(\kappa T)$ линейно связан с вектором состояния волнового фронта

$$\gamma(\kappa T) = C\boldsymbol{z}(\kappa T). \tag{9}$$

Для полученных моделей состояния волнового фронта (7), выхода (9) и измерений (8) алгоритм функционирования наблюдателя, оптимального по критерию минимума дисперсии ошибки оценивания, определяется следующими рекуррентными соотношениями [3]:

$$
\begin{aligned}
&\hat{z}(\kappa T/\kappa T-T) = A\hat{z}(\kappa T - T);\\
&D_z(\kappa T/\kappa T - T) = AD_z(\kappa T - T)A^T + D_\eta;\\
&D_z(\kappa T) = D_z(\kappa T/\kappa T - T)\left[\mathrm{I} - C^T\left(CD_z(\kappa T/\kappa T - T)C^T + \frac{D_f(\kappa T)}{\kappa_д^2}\right)^{-1}C\right]D_z(\kappa T/\kappa T - T);\\
&K(\kappa T) = D_z(\kappa T)C^T\kappa_д D_f^{-1};\\
&\hat{z}(\kappa T) = \hat{z}(\kappa T/\kappa T - T) + K(\kappa T)[u_д(\kappa T) - \kappa_д C\hat{z}(\kappa T/\kappa T - T) + \kappa_д\gamma_0(\kappa T)],
\end{aligned}
\tag{10}
$$

где $\hat{z}(\kappa T)$ — оценка состояния волнового фронта; $\hat{z}(\kappa T/\kappa T - T)$ — экстраполированное к моменту очередного цикла измерения состояние волнового фронта: $D_z(\kappa T) = M\{[z(\kappa T) - \hat{z}(\kappa T)][(\kappa T) - \hat{z}(\kappa T)]^T\}$ — матрица вторых центральных моментов (ковариаций) ошибки оценивания состояния; $D_z(\kappa T/\kappa T - T) = M\{[z(\kappa T) - \hat{z}(\kappa T/\kappa T - T)][z(\kappa T) - \hat{z}(\kappa T/\kappa T - T)]^T\}$ — матрица ковариаций ошибки экстраполяции состояния; I — единичная матрица, $K(\kappa T)$ — матрица коэффициентов усиления; $D_f(\kappa T) = \mathrm{diag}\{d_{fi}(\kappa T)\}$, $i = 1,\ldots,2N^2$.

Для функционирования данного рекуррентного алгоритма необходимо располагать информацией о начальном состоянии $Z(\kappa_0 T)$ и его ковариационной матрице $D_z(\kappa_0 T)$, причем ввиду асимптотической устойчивости оптимального наблюдателя [3] требования к качеству информации о начальном состоянии не являются жесткими.

Основная трудность при реализации данного алгоритма состоит в необходимости располагать информацией о векторе $\gamma_0(\kappa T)$ смещений, вносимых корректором. В случае, если функционирование корректора удовлетворяет условию

$$
\gamma_0(\kappa T) = C\hat{z}(\kappa T/\kappa T - T) + \mathring{\gamma}_0(\kappa T), \tag{11}
$$

где $\mathring{\gamma}_0(\kappa T)$ — центрированный случайный вектор ошибок, вносимых корректором' характеризуемый матрицей ковариаций $D_{\Delta\gamma}(\kappa T)$, последнее соотношение (10) можно привести к виду

$$
\hat{z}(\kappa T) = \hat{z}(\kappa T/\kappa T - T) + K(\kappa T)\,u_д(\kappa T),
$$

то есть исключить $\gamma_0(\kappa T)$ из алгоритма оценивания состояния. Дополнительную ошибку, появляющуюся вследствие неопределенности состояния корректора, следует учесть, добавив к матрице $D_f(\kappa T)$ матрицу $\kappa_д^2 D_{\Delta\gamma}(\kappa T)$.

Предложенный подход позволяет при наличии статистических данных о характеристиках внешних воздействий синтезировать алгоритм функционирования оптимального наблюдателя, дающий минимальную среднеквадратическую ошибку оценивания искажений волнового фронта.

1. Бугаенко О.И., Новиков С.Б. Методы повышения эффективности оптических телескопов. М.: Изд-во МГУ. 1987. С. 80—103.
2. Лукин В.П., Покасов В.В., Хмелевцев С.С. //Изв. вузов. Радиофизика. 1972. № 12. С. 1861.
3. Сейдж Э.П., Мелс Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. М.: Связь. 1976. 496 с.

Поступило в редакцию
9 августа 1988 г.

S.V. Butsev, V.Sh. Khismatulin. **Synthesis of Wave Front State Estimation Algorithm for Adaptive Optical System.**

The problem of compensating for the wave front distortions is discussed. An .algorithm for estimating the state of the wave front from a distant point source for an adaptive optical system with a separate correction for different-order aberrations is proposed that allows the rms estimation error to be minimized.