«Оптика атмосферы и океана», **15**, № 2 (2002)

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОПТИЧЕСКИХ ВОЛН

УДК 551.46

С.А. Вицинский, А.Г. Журенков, В.А. Яковлев

Решение задачи рассеяния света на мелкомасштабных неоднородностях морской среды методом модифицированного приближения аномальной дифракции

НИИ ФООЛИОС ВНЦ «ГОИ им. С.И. Вавилова», г. Санкт-Петербург
НИИКИ ОЭП, г. Сосновый Бор

Поступила в редакцию 6.06.2001 г.

Рассмотрен новый приближенный метод решения задачи рассеяния света на оптических неоднородностях (модифицированное приближение аномальной дифракции). Дано строгое математическое обоснование метода, показаны пути его дальнейшего уточнения (учет объемной дифракции при использовании фазы Рытова), обоснована возможность строгой постановки задачи определения области применимости и скорости сходимости приближенного решения. Показано, что по сравнению с приближением Хюлста достигнуто значительное расширение области применимости приближения. Новый метод пригоден для расчета индикатрисы рассеяния при любых значениях угла рассеяния, включая рассеяние назад.

Интерпретация результатов оптических измерений физико-химических параметров морской среды существенно упрощается, если при постановке и решении соответствующей обратной задачи распространение светового поля в среде можно описывать в рамках простого аналитического приближения. Так, при исследовании морской среды по результатам дистанционного лидарного зондирования в конечном итоге требуется определить ее физические характеристики (например, концентрацию взвешенных частиц, их распределение по показателю преломления и размерам) [1]. В приближении однократного рассеяния («борновском») связь между физическими характеристиками среды и ее первичными оптическими характеристиками устанавливается с помощью достаточно простых аналитических выражений [2, 5–7].

К сожалению, широко известные приближенные методы решения задачи рассеяния света малоприменимы для морской взвеси. Практически единственным методом, позволяющим рассчитать характеристики рассеяния света частицами с $\rho_a \in [1, 200]$ ($\rho_a = 2\pi a/\lambda$, a – характерный размер частицы; λ – длина волны света), является приближение аномальной дифракции (ПАД), предложенное Хюлстом [2], но и оно пригодно только лишь для оптически мягких частиц и небольших углов рассеяния.

В работе [3] был предложен новый способ решения уравнений Максвелла с граничными условиями, соответствующими рассеянию электромагнитной волны на неоднородности диэлектрической проницаемости. При этом даже в первом приближении разложения получено новое решение задачи рассеяния света на частице – модифицированное приближение аномальной дифракции (МПАД).

Изложим кратко суть метода получения МПАД. Пусть монохроматическое электромагнитное поле распространяется в среде с магнитной проницаемостью $\mu = 1$ и проводимостью, равной нулю. Тогда для комплексной амплитуды напряженности электрического поля в точке $\mathbf{r}$ справедливо уравнение [4]:

$$\Delta\mathbf{E}(\mathbf{r}) + k^2\,[1 + \varepsilon_1(\mathbf{r})]\,\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \nabla\,[\nabla\mathbf{E}(\mathbf{r})], \qquad (1)$$

где

$$k = 2\pi/\lambda;\ \varepsilon_1 = \varepsilon/\varepsilon_o - 1 = (n^2 - \chi^2 - 1) + i(2n\chi)$$

– относительная диэлектрическая проницаемость оптической неоднородности ($n + i\chi = m$ – ее относительный комплексный показатель преломления [5]).

Будем искать решение уравнения (1) в виде $\mathbf{E} = \mathbf{e}u$, где скалярная функция $u(\mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta u(\mathbf{r}) + k^2\,u(\mathbf{r}) = -\,k^2\,\varepsilon_1(\mathbf{r})\,u(\mathbf{r}), \qquad (2)$$

а вектор поляризации $\mathbf{e}(\mathbf{r})$ уравнению

$$\Delta\mathbf{e}(\mathbf{r}) + 2\,[\nabla\,\ln(u(\mathbf{r})\,\nabla)]\,\mathbf{e}(\mathbf{r}) =$$
$$= -\,\nabla\,\ln\{u(\mathbf{r})\,\mathbf{e}(\mathbf{r})\,\nabla\,\ln[1 + \varepsilon_1(\mathbf{r})] -$$
$$-\,\nabla\,[\mathbf{e}(\mathbf{r})\,\ln(1 + \varepsilon_1(\mathbf{r}))]\}. \qquad (3)$$

Вычислим в указанных выше приближениях интенсивность света, рассеянного сферической частицей, имеющей радиус a и относительную диэлектрическую проницаемость $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon_a$, для случая, когда центр частицы находится в начале координат ($\mathbf{r}_{0a} = 0$), точка наблюдения расположена в зоне Фраунгофера ($\mathbf{r} \gg ka^2$), а первичное поле представляет собой плоскую волну

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = u_0\,\mathbf{e}_0\,\exp\,(ik\mathbf{n}_0\mathbf{r}). \qquad (4)$$

Здесь $u_0 = \text{const}$ – амплитуда первичного поля; $\mathbf{e}_0$ – его вектор поляризации, причем $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_0^*) = 1$; $\mathbf{n}_0$ – единичный вектор в направлении распространения первичной волны. Рассмотрим интегральное уравнение, эквивалентное уравнению (1), с учетом граничных условий:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) - \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times$$

$$\times \{k^2 \varepsilon_a(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}') + \nabla [\ln(1 + \varepsilon_a(\mathbf{r}'))]\} d\mathbf{r}', \quad (5)$$

где $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ – функция Грина.

Если в правую часть уравнения (5) подставим приближенное решение уравнения (1), то получим некоторое новое приближенное решение. Причем если исходный приближенный метод сходится к точному решению, то полученная «дочерняя» аппроксимация также является сходящейся.

Представим скалярную часть $\mathbf{E}$ в виде

$$u(\mathbf{r}) = u_0(\mathbf{r}) \exp [\varphi(\mathbf{r})]. \quad (6)$$

Тогда, подставив (6) в (2), для комплексной фазы $\varphi(\mathbf{r})$ получим уравнение

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) + [\nabla\varphi(\mathbf{r})]^2 + k^2 + k^2\varepsilon_a = 0, \quad (7)$$

которое может быть решено методом последовательных приближений.

Предлагаемый метод построения новых аппроксимаций состоит в следующем: в правую часть уравнения (5) подставляем приближенное решение (7). Например, в первом приближении решение (7) – это «рытовская» фаза [4]:

$$\varphi_P(\mathbf{r}) = - k^2 \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{u_0(\mathbf{r}')}{u_0(\mathbf{r})} \varepsilon_a(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}'. \quad (8)$$

Следуя предложенному выше методу построения аппроксимаций и ограничившись при решении (3) выражениями, линейными по ε_a, получим новое приближение (МПАД):

$$\mathbf{E}_{\text{МПАД}}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) - k^2 \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \exp [\varphi(\mathbf{r}')] \times$$

$$\times \{\mathbf{n}(\mathbf{rr}') [\mathbf{E}_0(\mathbf{r}') \mathbf{n}(\mathbf{rr}')]\} d\mathbf{r}', \quad (9)$$

где $\mathbf{n}(\mathbf{rr}') = (\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$.

Соответственно для рассеянного излучения имеем

$$\mathbf{E}^s(\mathbf{r}) = \frac{u_0\, k^2 \exp (ikr)}{4\pi r} [\mathbf{n}_s(\mathbf{e}_0\, \mathbf{n}_s)] \times$$

$$\times \int \varepsilon_a(\mathbf{r}') \exp [\varphi_P(\mathbf{r}') - i\mathbf{q}\mathbf{r}']\, d\mathbf{r}'. \quad (10)$$

Здесь $\mathbf{n}_s = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$; $\mathbf{q} = k\,(\mathbf{n}_s - \mathbf{n}_0)$.

Выражение (10) можно еще более упростить, подставив в него вместо «рытовской» фазы $\varphi_P(\mathbf{r})$ фазу, вычисленную в первом приближении геометрической оптики [4]:

$$\varphi_\Gamma(\mathbf{r}) = \varphi_\Gamma(z, \zeta, \varphi) = \frac{ik}{2} \int_0^z \varepsilon_a(\xi, \zeta, \varphi)\, d\xi. \quad (11)$$

При написании формулы (11) использовалась цилиндрическая система координат $\mathbf{r} = (z,\zeta,\varphi)$ и предполагалось, что рассматриваемая сферическая частица находится в области $z \geq 0$, а $\mathbf{E}_0 = u_0\, \mathbf{e} \exp (ikz)$. В этом случае

$$\mathbf{E}^s_{\text{МПАД}}(\mathbf{r},\theta) = \frac{u_0\, S(\theta,\rho_a,\varepsilon_a) \exp (ikr)}{kr} [\mathbf{n}_s(\mathbf{e}_0\mathbf{n}_s)]. \quad (12)$$

Здесь

$$S(\theta,\rho_a,\varepsilon_a) = \frac{\rho_a^2\varepsilon_a}{(1-\cos\theta+\varepsilon_a/2)} \times$$

$$\times \int_0^1 \left\{ \begin{aligned} & y\sqrt{1-y^2} J_0\left(\rho_a\sqrt{1-y^2}\sin\theta\right) \exp\left(\frac{i\varepsilon_a\rho_a}{2} y\right) \times \\ & \times \sin[\rho_a(1-\cos\theta+\varepsilon_a/2)y]\, dy \end{aligned} \right\}; \quad (13)$$

$J_0(x)$ – функция Бесселя 1-го рода; θ – угол рассеяния; $\varepsilon_a = (n^2 - \chi^2 - 1) + i(2n\chi)$; $n + i\chi = m$ [см. формулу (1)].

Содержащее векторный множитель уравнение вида (12) удобно переписать в матричном виде [5]:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}^s_\diamond \\ \mathbf{E}^s_\perp \end{pmatrix} = \frac{\exp (ikr)}{kr} \begin{pmatrix} S_2 & 0 \\ 0 & S_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}^0_\diamond \\ \mathbf{E}^0_\perp \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где $\mathbf{E}^0_\diamond$, $\mathbf{E}^s_\diamond$ – параллельные; $\mathbf{E}^0_\perp$, $\mathbf{E}^s_\perp$ – перпендикулярные плоскости рассеяния компоненты векторов первичного и рассеянного световых полей. Тогда

$$S_1 = S; \;\; S_2 = S \cos\theta, \quad (15)$$

где $S = S(\theta, \rho_a, \varepsilon_a)$ определяется в нашем приближении выражением (13). Эта же величина для сферической частицы может быть точно вычислена путем суммирования рядов Ми, а в борновском приближении выражается элементарной формулой [5]:

$$S = - 2\,(m - 1)\, \rho_a^3\, (\sin u - u \cos u)/u^3;$$

$$u = 2\rho_a \sin (\theta/2). \quad (16)$$

Вычислив матричные элементы S_1 и S_2, можно легко найти соотношение между интенсивностью первичного и рассеянного полей для различных случаев поляризации падающего светового поля $\mathbf{E}_0$ [5]. Например, если падающий свет неполяризован, то указанное соотношение имеет вид

$$S_{11}(\theta) = (|S_1|^2 + |S_2|^2)/2 = I_s(\theta)\, k^2\, r^2/I_i, \quad (17)$$

где $S_{11}(\theta)$ – элемент матрицы Стокса; I_i – интенсивность падающего излучения; $I_s(\theta)$ – интенсивность излучения, рассеянного в направлении, определяемом углом θ; $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число; r – расстояние от точки наблюдения до центра частицы.

Сопоставим область применимости полученного нами приближения (МПАД), а также области применимости борновского приближения и приближения Хюлста путем сравнения интенсивностей рассеяния, вычисленных по точным формулам Ми [5] для сферической частицы, с вычислениями, полученными в рамках трех рассматриваемых приближений для различных значений параметров θ, ρ_a и $\varepsilon_a(m)$.

На рис. 1 представлены зависимости $\ln(S_{11})$ от параметра $\rho_a = 2\pi a/\lambda$ (в данном случае a – радиус частицы, $\rho_a \in [1, 200]$) для трех углов рассеяния

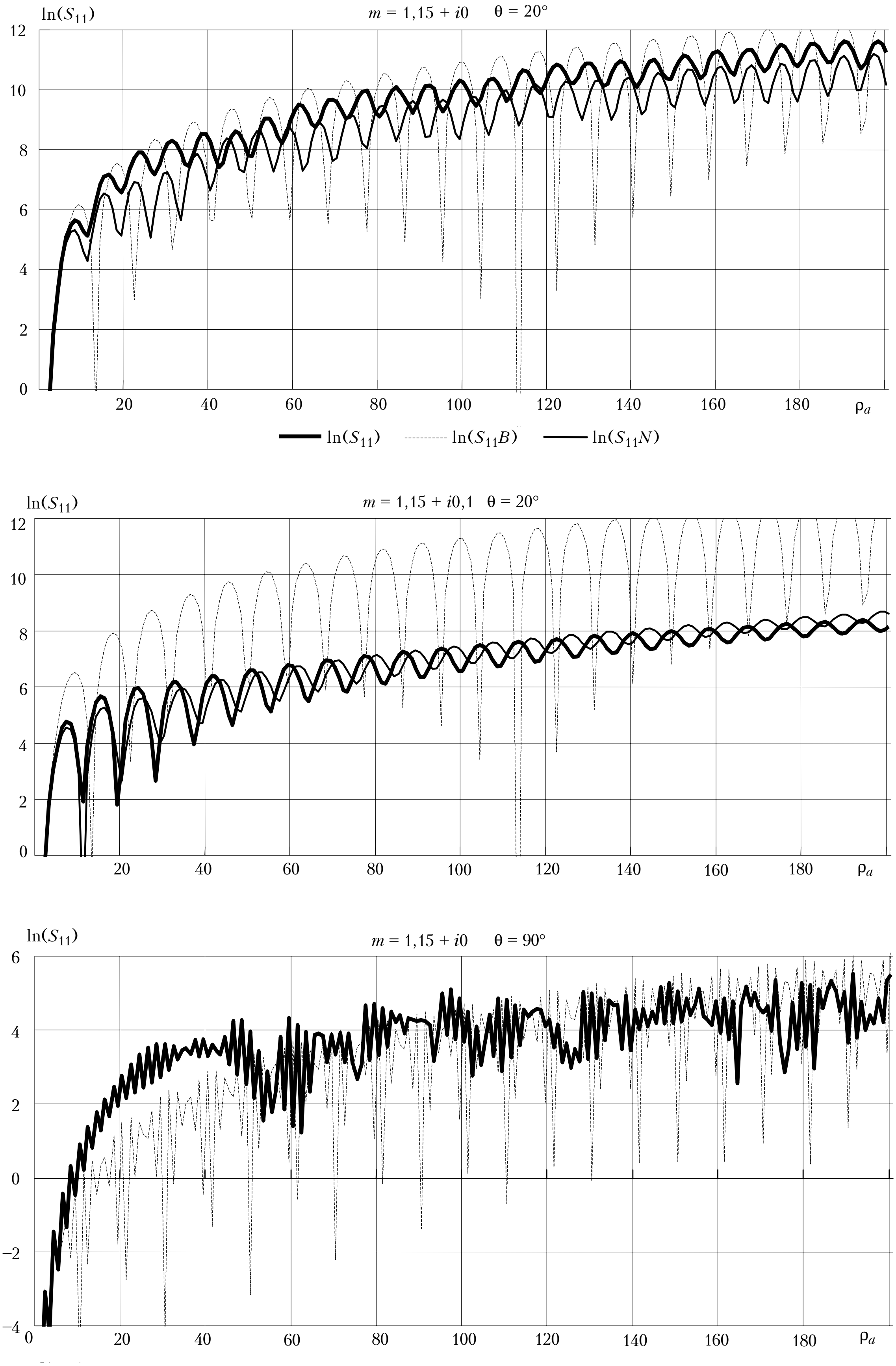
ln(S11)
m = 1,15 + i0 θ = 20°
ρa
ln(S11) ln(S11B) ln(S11N)
ln(S11)
m = 1,15 + i0,1 θ = 20°
ρa
ln(S11)
m = 1,15 + i0 θ = 90°
ρa

Рис. 1

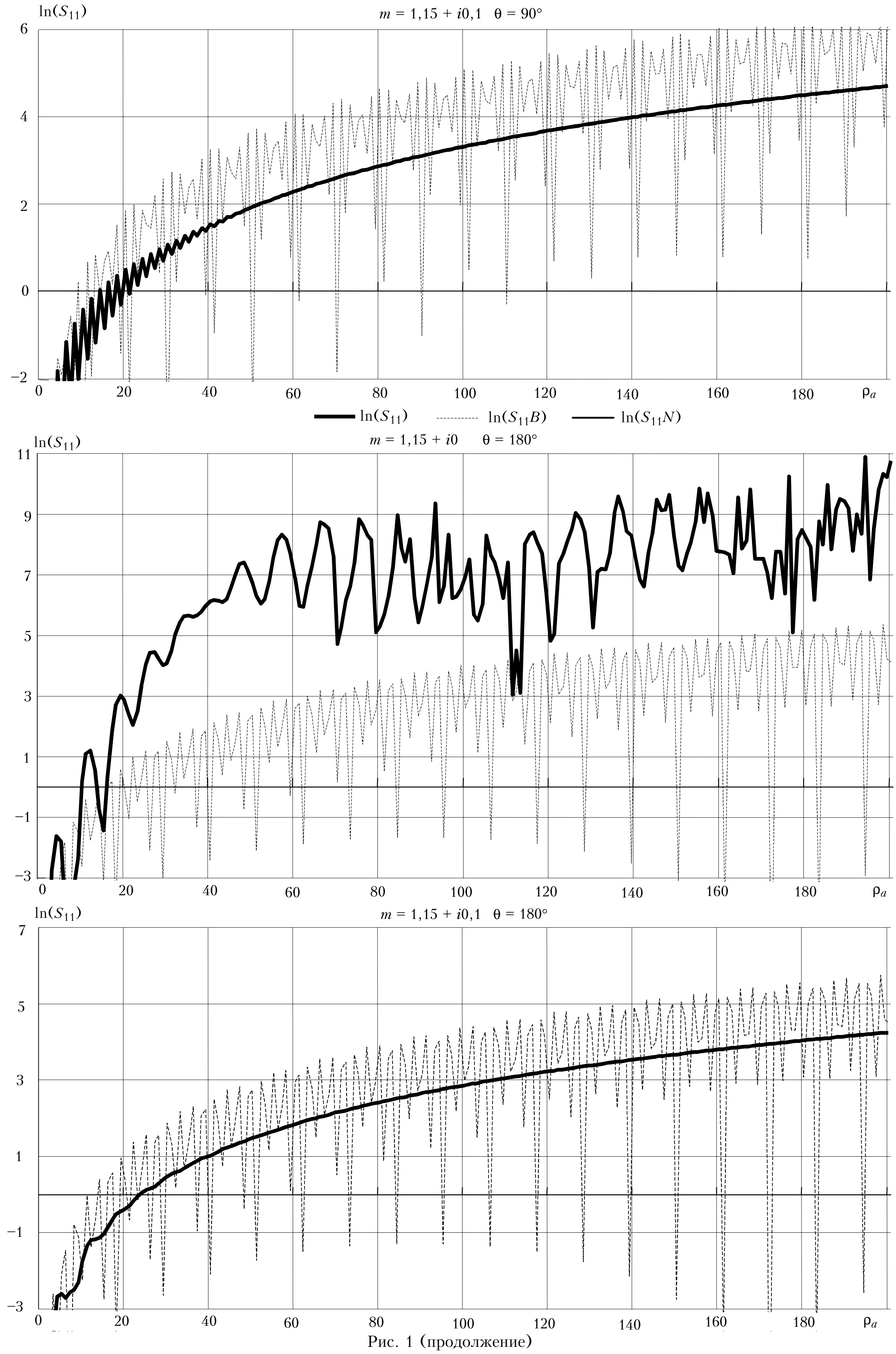

Рис. 1 (продолжение)

(θ = 20, 90, 180°) и двух значений относительного показателя преломления частицы $m = 1{,}15 + i0$ («непоглощающая» частица); $m = 1{,}15 + i0{,}1$. Величина $\ln(S_{11})$, как указано выше, рассчитана по точным формулам Ми – $\ln(S_{11})$; в борновском приближении [5] – $\ln(S_{11}B)$; в новой модификации приближения аномальной дифракции (МПАД) – $\ln(S_{11}N)$. Видно, что для реальных поглощающих частиц морской взвеси с $\mathrm{Im}(\varepsilon_a) \neq 0$ МПАД дает хорошее согласие при любых значениях θ вплоть до 180°, в то время как приближение Хюлста (поскольку в нем используется аппроксимация $\cos\theta = 1$) вообще неприменимо для $\theta > 20°$.

Таким образом, в результате учета объемного пространственного расположения осцилляторов достигнуто значительное расширение области применимости приближения, в то время как ПАД Хюлста применимо только для описания рассеяния на небольшие углы θ (до 20°) оптически мягкими неоднородностями, МПАД пригоден (причем именно в случае реальных комплексных значений m) для расчета индикатрисы рассеяния при любых значениях θ, включая рассеяние назад.

В заключение следует отметить, что по сравнению с приближением Хюлста МПАД представляет собой шаг вперед и фактически является новым приближенным методом решения задачи рассеяния света на оптических неоднородностях. В статье дано строгое математическое обоснование метода, показаны пути его дальнейшего уточнения (учет объемной дифракции при использовании фазы Рытова), обоснована возможность строгой постановки задачи определения области применимости и скорости сходимости приближенного решения. При расчете характеристик рассеяния света на ансамбле частиц усреднение по их размерам должно еще более улучшить точность МПАД. Более того, в этом случае для удовлетворительного качественного описания можно использовать борновское приближение [7] (это можно заметить из рисунка). Обоснованию этого утверждения будет посвящена отдельная статья.

1. *Межерис Р.* Лазерное дистанционное зондирование. М.: Мир, 1987. 550 с.
2. *Ван де Хюлст Г.* Рассеяние света малыми частицами. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1961. 536 с.
3. *Журенков А.Г., Яковлев В.А.* О решении задачи рассеяния света частицами морской взвеси в приближении аномальной дифракции // Изв. АН СССР. Физ. атмосф. и океана. 1990. Т. 26. № 8. С. 891–894.
4. *Татарский В.И.* Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1967. 548 с.
5. *Борен К., Хафмен Д.* Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М.: Мир, 1986. 664 с.
6. *Качурин В.К., Яковлев В.А.* Борновское приближение в задаче рассеяния света ансамблем жестких частиц // Оптика и спектроскопия. 1987. Т. 62. Вып. 5. С. 1170–1172.
7. *Шифрин К.С.* Введение в оптику океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1983. 278 с.

S.A. Vitsinsky, A.G. Zhurenkov, V.A. Yakovlev. **Solution of the problem of light scattering by small-scale inhomogeneities of maritime environment by the method of modified approximation of abnormal diffraction.**

A new approximation method for solving the problem of light scattering by optical inhomogeneities (modified approximation of abnormal diffraction) has been considered. A rigorous mathematical validation of the method is presented, the ways of its further correction (with allowance for the volume diffraction with the use of Rytov phase) are given, the possibility for rigorous formulation of the problem of determinination of the field of applicability and the velocity of convergence of the approximate solution is validated. It is shown that the field of applicability of the approximation is substantially expanded as compared to the Hulst approximation. The new method is suitable for calculation of the scattering phase function at any values of the scattering angle including the back scattering.