

В.П. Аксенов, Е.В. Захарова, Ю.Н. Исаев

ВОССТАНОВЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИНТЕНСИВНОСТИ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ПО ТЕМПЕРАТУРЕ ПОВЕРХНОСТИ СЕКЦИОНИРОВАННОЙ МИШЕНИ

Решается задача восстановления интенсивности лазерного излучения по температуре поверхности нагреваемой мишени. Использование секционированной мишени позволяет свести многомерную обратную задачу теплопроводности к совокупности одномерных. Для различных граничных режимов нагрева «одномерных» элементов получены формулы инверсии температуры, позволяющие восстанавливать тепловой поток при произвольных значениях теплофизических параметров. Эффективность алгоритмов восстановления, разработанных на этой основе, исследуется в численных экспериментах.

При изучении закономерностей распространения мощного лазерного излучения в атмосфере возникает проблема измерения распределения интенсивности в поперечном сечении лазерных пучков. Возможный метод решения этой задачи состоит в восстановлении распределения интенсивности по измерениям температурного поля, которое возникает в результате нагрева поверхности мишени лазерным излучением. Задача становится технически осуществимой в связи с появлением устройств для дистанционного измерения температурного поля поверхности, в частности, тепловизоров [1, 2], способных обеспечить значительное пространственное и временное разрешение измерений. Проблема восстановления распределения интенсивности по температурному полю нагретой поверхности сводится в общем случае к решению многомерной пространственно-временной обратной задачи теплопроводности — задаче пересчета граничных условий [3]. Если в качестве мишени использовать матрицу из «одномерных» секций (с поперечным размером меньшим, чем характерный масштаб распределения интенсивности), то решение пространственно-временной задачи пересчета сводится к совокупности (по числу секций) временных задач. Прежде чем формулировать такую одномерную задачу, рассмотрим на примере простейших ситуаций, как связана временная зависимость температуры нагретой поверхности с временной зависимостью падающего на нее теплового потока. Обозначим температуру поверхности мишени $T(0, t)$, а $q(t)$ — тепловой поток на ней. В пренебрежении тепловыми потерями $q(t) = (1 - R)I(t)$, где R — коэффициент отражения; $I(t)$ — интенсивность падающего излучения. Использование уравнения теплового баланса для мишени, задняя поверхность которой поддерживается при постоянной температуре $T(0)$, дает

$$T(t) = T(0) + \frac{L}{k} q(t), \quad L \rightarrow 0; \quad (1)$$

для тонкой теплоизолированной мишени будем иметь

$$T(t) = T(0) + \frac{a^2}{kL} \int_0^t q(\tau) d\tau, \quad L \rightarrow 0, \quad (2)$$

где a^2 , k коэффициенты температуро- и теплопроводности; L — толщина мишени.

Из (1) следует, что температура тонкой охлаждаемой мишени повторяет временной ход теплового потока. В этом случае решения обратной задачи теплопроводности и не требуется. Соотношение типа (1) «работает» в тепловых приемниках излучения. Однако заметим, что в условиях $L \rightarrow 0$, при которых получено (1), абсолютные значения $T(t)$ близки к температуре основания мишени, что делает практически неосуществимыми измерения $q(t)$ на фоне шумов, сопровождающих дистанционные оптические измерения температуры [2].

Из (2) следует, что теплоизолированная мишень интегрирует $q(t)$ и оказывается наиболее эффективной в качестве измерителя энергии. Для определения временной зависимости $q(t)$ необходимо осуществлять дифференцирование значений температуры в процессе нагрева. Однако при значительных плотностях лазерного излучения лишенная теплоотвода мишень будет перегреваться и разрушаться. Таким образом, описанные выше простейшие конфигурации мишеней оказываются мало пригодными для практических измерений $q(t)$. Используемая мишень должна иметь достаточно высокую

температуру поверхности, чтобы обеспечить необходимое отношение сигнал-шум при измерениях температуры и в то же время отводить тепло для предотвращения разрушения. Чтобы совместить эти два условия, нужны достаточно толстые секции. Необходимые требования к их теплофизическим и геометрическим параметрам будут сформулированы ниже. На рис. 1 приведены результаты расчета температуры для алюминиевой мишени ($a^2 = 9,28 \text{ см}^2/\text{с}$, $L = 1 \text{ см}$) при воздействии на нее лазерного импульса с $q(0) = 10 \text{ Вт}/\text{см}^2$. Очевидно искажающее действие теплопереноса на поведение интенсивности. Проблеме компенсации этого влияния посвящено дальнейшее изложение. Для разных типов мишеней разработаны алгоритмы и проведены численные эксперименты по восстановлению $q(t)$.

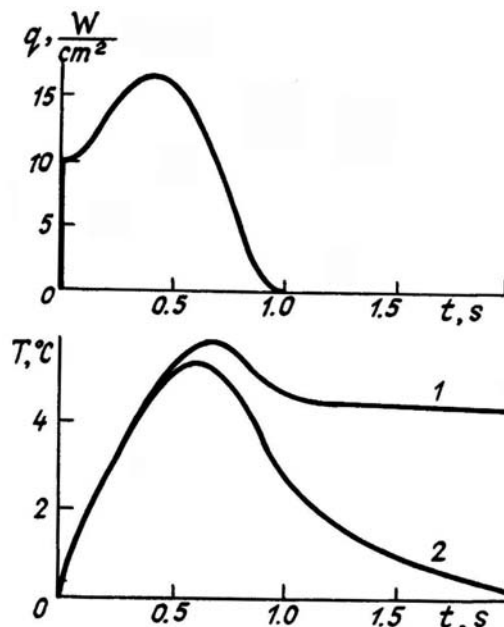


Рис. 1. Временная зависимость температуры поверхности теплоизолированной (1) и охлаждаемой (2) секций для лазерного импульса

Считая боковую поверхность секции теплоизолированной, а распределение интенсивности на ее передней поверхности равномерным, будем описывать процесс распространения тепла в секции одномерным уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad t > 0, \quad 0 \leq z \leq L, \quad (3)$$

граничные и начальные условия

$$q(t) = -k \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = (1 - R) I(t) - \vartheta [T(0, t) - T_{\text{н}}] - \sigma b [T^4(0, t) - T_{\text{н}}^4]; \quad (4)$$

$$T(z, t)|_{z=0} = T(t); \quad (5)$$

$$T(z, t)|_{z=L} = T_{\text{н}}; \quad (6)$$

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=L} = 0; \quad (7)$$

$$T(z, 0) = T_{\text{н}} \quad (8)$$

используем в следующих комбинациях: (4), (6), (8) — для решения задачи нагрева охлаждаемой мишени; (4), (7), (8) — для решения задачи нагрева теплоизолированной мишени. Комбинации (5), (6), (8) и (5), (7), (8) потребуются для решения обратных задач для охлаждаемой и теплоизолированной мишени соответственно. Здесь ϑ — коэффициент конвекционного теплообмена, σ — постоянная Стефана-Больцмана, b — коэффициент излучения.

Рассмотрим вначале ситуацию, когда задняя поверхность секции поддерживается при температуре, равной начальной $T(L, t) = T_{\text{н}}$. Решая уравнение теплопроводности с граничными условиями (4), (6), (8) для температуры поверхности мишени получим

$$T(0, t) = T_n + \frac{2a^2}{kL} \int_0^t d\tau q(\tau) \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left\{-\frac{a^2(2n-1)^2\pi^2}{4L^2}(t-\tau)\right\}. \quad (9)$$

Для того чтобы получить соотношение, обратное (9), решим уравнение (3) с граничными условиями (5), (6), (8), воспользовавшись принципом Дюамеля [4]. В соответствии с (4), вычисляя производную от температуры по пространственной координате в нуле, будем иметь

$$q(t) = \frac{k}{L} \int_0^t \frac{dT(\tau)}{d\tau} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left\{-\frac{a^2\pi^2 n^2}{L^2}(t-\tau)\right\}\right) d\tau. \quad (10)$$

Соотношение (10) справедливо при произвольных значениях a^2 , L и переменной t . Однако оно может быть упрощено при определенных соотношениях между этими величинами. Вводя обобщенный теплофизический параметр $F_0 = \frac{a^2 t}{L^2}$ – параметр Фурье, для $F_0 \gg 1$ из (14) методом Лапласа [5] получим

$$q(t) = \frac{k}{L} \left[T(t) - T_n + \frac{1}{3} \frac{L^2}{a^2} \frac{dT(t)}{dt} \right]. \quad (11)$$

В другом предельном случае $F_0 \ll 1$ (приближение полуограниченного тела), сводя бесконечное суммирование в (10) к интегрированию будем иметь

$$q(t) = \frac{k}{a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{dT(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \quad (12)$$

решение интегрального уравнения Абеля [6], к которому сводится обратная задача теплопроводности для полуограниченного тела.

Если задняя поверхность мишени теплоизолирована, то с использованием соответственно (1), (4), (7), (8) и (1), (5), (7), (8), так же как для охлаждаемой мишени, получим [7, 8]

$$T(t) = T_n + \frac{a^2}{kL} \int_0^t q(\tau) \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left\{-\frac{a^2\pi^2 n^2}{L^2}(t-\tau)\right\}\right] d\tau; \quad (13)$$

$$q(t) = \frac{2k}{L} \int_0^t \frac{dT(\tau)}{d\tau} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left\{-\frac{a^2\pi^2(2n-1)^2}{4L^2}(t-\tau)\right\} d\tau. \quad (14)$$

Из (14) в случае $F_0 \gg 1$ следует

$$q(t) = \frac{kL}{a^2} \frac{dT(t)}{dt}, \quad (15)$$

а при $F_0 \ll 1$ представление (14) переходит в решение уравнения Абеля (12), являющееся частным случаем представлений (10) и (14). Значительная часть погрешности восстановления $q(t)$ с помощью алгоритмов, разработанных по формулам (10), (12), (14), связана с накоплением ошибок вычисления производной $\frac{\partial T}{\partial \tau}$ по отрезку интегрирования $[0, t]$. Например, для решения уравнения Абеля имеем следующую мажоритарную оценку:

$$|q(t) - q_s(t)| \leq \sup_{0 < \tau < t} \left| \frac{\partial T(\tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial S(\tau)}{\partial \tau} \right| 2\sqrt{t}, \quad (16)$$

где $S(t)$ – гладкое приближение температуры. Из неравенства следует, что ошибка восстановления зависит от точности вычисления производной $\frac{\partial T}{\partial \tau}$ и нарастает с увеличением интервала интегрирования $[0, t]$. Это делает целесообразным разработку алгоритмов восстановления на основе формул, не содержащих операции дифференцирования измеренной температуры. Предполагая, что $T(t)$ удовле-

творяет условию Гельдера [9], интегрируя по частям, из (10), (12), (14) получим соответственно

$$q(t) = \frac{k}{L} \left\{ T(t) + 2T(t) \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{a^2 \pi^2 n^2}{L^2} t \right\} + \right. \\ \left. + 2 \int_0^t d\tau [T(t) - T(\tau)] \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{a^2 \pi^2 n^2}{L^2} (t - \tau) \right\} \frac{a^2 \pi^2 n^2}{L^2} \right\}; \quad (17)$$

$$q(t) = \frac{k}{a \sqrt{\pi}} \left\{ \frac{T(t)}{a \sqrt{\pi}} + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{T(t) - T(\tau)}{(t - \tau)^{3/2}} d\tau \right\}; \quad (18)$$

$$q(t) = \frac{2k}{L} \left\{ T(t) \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{a^2 \pi^2 (2n-1)^2}{4L^2} t \right\} + \right. \\ \left. + \int_0^t d\tau [T(t) - T(\tau)] \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{a^2 \pi^2 (2n-1)^2}{4L^2} (t - \tau) \right\} \frac{a^2 \pi^2 (2n-1)^2}{4L^2} \right\}. \quad (19)$$

Структура подынтегральных выражений в соотношениях (10), (12), (14), (17)–(19) такова, что операция интегрирования не приводит к сглаживанию шумовой составляющей, содержащейся в измеренных значениях температуры. Поэтому прямое вычисление $q(t)$ по этим формулам приводит к неустойчивости обращения [6, 10]. В связи с этим при разработке соответствующих алгоритмов восстановления функция $T(t)$ аппроксимировалась сглаживающими кубическими сплайнами [6, 11], учитывающими уровень ошибки измерений.

Восстановление интенсивности для теплофизических ситуаций, заданных граничными условиями (5)–(7), моделировалось в численном эксперименте. При этом начальная температура задавалась равной нулю $T(0) = T_n = 0$. В качестве материала мишени был выбран алюминий. Экспериментальные значения температуры регистрировались в точках τ_i : $0 = \tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \dots < \tau_n = 1$ с с временным разрешением Δt , равным временному разрешению тепловизора $\Delta t = 1/24$ с. Исходные данные имели случайную погрешность измерений ζ_i так, что

$$\tilde{T}_i = T(\tau_i) + \zeta_i, \quad i = 1, \overline{n}.$$

Предполагалось, что ζ_i имеет нормальный закон распределения с нулевым средним и дисперсией σ^2 . Функция $T(t)$ аппроксимировалась сглаживающим кубическим сплайном $S_{n,\alpha}(t)$ с краевыми условиями $S''_{n,\alpha}(0) = 0$, $S''_{n,\alpha}(t = 1 \text{ с}) = 0$ [6], учитывающим особенности решения некорректных задач. При такой замене интегралы в правых частях (10), (12), (14) и (17), (18), (19) вычисляются аналитически. Бесконечное суммирование в формулах (10), (14), (17), (19) ограничивалось заданной погрешностью. Во всех случаях она не превышала 0,001%.

Для численного эксперимента были выбраны в качестве моделей исходного теплового потока две функции «импульс»

$$q(t) = I_0 \theta(\tau) \{17\tau^4 - 32\tau^3 + 14\tau^2 + 1\}, \quad \theta(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau \geq 0 \\ 0, & \tau < 0, \tau \leq 1, \end{cases} \quad (20)$$

где $I_0 = 10 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}$, $\tau = t/t_0$, $t_0 = 1$ с, и „шапочка”

$$q(t) = \begin{cases} I_0 \exp \left\{ -\frac{(\tau - 0,5)^2}{(0,5)^2 - (\tau - 0,5)^2} \right\}, & |\tau - 0,5| \leq 0,5 \\ 0, & |\tau - 0,5| > 0,5. \end{cases} \quad (21)$$

Зависимость (20) приведена на рис. 2, 3 (кривая 1). В отсутствие ошибок в измеренных значениях температуры погрешность в вычислении $q(t)$ обусловлена заменой функции $T(t)$ кубическим сплайном $S_n(t)$ и заменой бесконечного суммирования конечным. Как показывает численный эксперимент, такая аппроксимация обеспечивает достаточно высокую точность вычисления соответствующих интегралов. Даже в случае «импульсной» зависимости (20) для $\Delta t = 1/24$ погрешность восстановления $q(t)$ не превышает 2,5%. В решении, восстановленном при использовании интерполяционных сплайнов в присутствии шумов измерений (кривые 2 на рис. 2, 3), проявляются случайные осцилляции, нарастающие с увеличением интервала интегрирования, поэтому дальнейший анализ про-

водился с использованием сглаживающих сплайнов $S_{n,\alpha}(t)$. Параметр сглаживания α выбирался по методу невязки [6, 10].

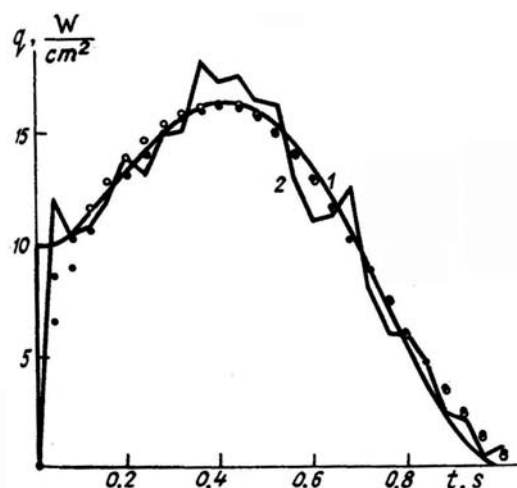


Рис. 2. Восстановление модельной зависимости $q(t)$ (20) по температуре поверхности охлаждаемой мишени: 1 — точное решение; 2 — восстановленное с использованием интерполяционных сплайнов; точки — сглаженное решение на основе выражения (10); кружки — сглаженное решение на основе (17)

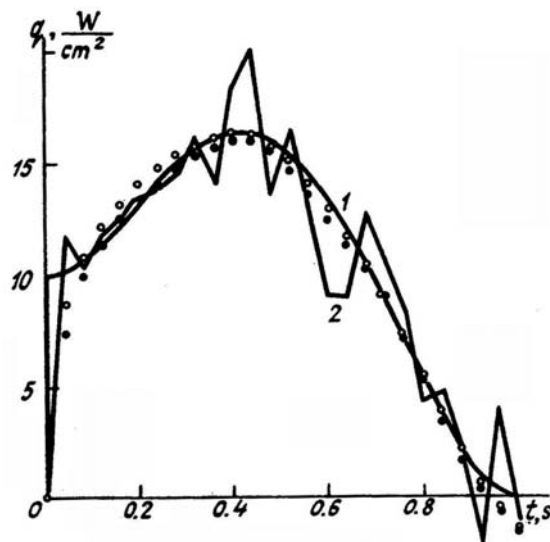


Рис. 3. Восстановление модельной зависимости $q(t)$ (20) по температуре поверхности теплоизолированной мишени: 1 — точное решение; 2 — восстановленное с использованием интерполяционных сплайнов; точки — сглаженное решение на основе выражения (14); кружки — сглаженное решение на основе (19)

На рис. 2, 3 приведены результаты восстановления $q(t)$ в случае модельной зависимости (20), при 3%-ной ошибке в исходных данных. Для модельной зависимости (21) $q(t)$ восстанавливается точнее. Рис. 2 соответствует охлаждаемой, а рис. 3 теплоизолированной мишени, причем, точками нанесены результаты восстановления, полученные с использованием зависимостей (10), (14), а кружками — результаты, рассчитанные на основе (17). Из рис. 2 следует, что качество восстановления $q(t)$ слабо зависит от типа граничной задачи. Зависимости, восстановленные по формулам (17), (19), не содержащим операции дифференцирования под знаком интеграла, оказываются более точными. Для достоверного сравнения вычислялась «дисперсия» ошибки решения при заданном t на основе выборки объемом $N_{\text{выб}}$ ($N_{\text{выб}} = 10$)

$$\Delta^2(t) = \frac{1}{N_{\text{выб}}} \sum_{l=1}^{N_{\text{выб}}} (q_{n,\alpha}^{(l)}(t) - q(t))^2. \quad (22)$$

Здесь $q(t)$ — точное решение, $q_{n,\alpha}^{(l)}(t)$ — решение, построенное по l -й реализации зашумленных значений температуры на основе сглаживающих сплайнов с параметром сглаживания α .

Результаты этого сравнения для $\sigma = 0,03$ в случае «импульсной» зависимости (20) приведены в

таблице, где

$$D(q_{n,\alpha}) = \left[\frac{1}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \Delta^2(t_j) \right]^{1/2} -$$

среднеквадратическая ошибка решения ($n_t = 25$). Из таблицы следует, что для алгоритмов, не содержащих дифференцирования измеренных значений температуры, $\Delta^2(t)$ может быть значительно меньше соответствующей величины для алгоритмов с дифференцированием. Сравнение расчетов, выполненных для «импульса» и «шапочки», показывает, что такое различие характерно для начальных участков «импульсной» зависимости (20).

Время	Решение при $\sigma=0,03$ для граничных условий			
	$\frac{dT(0,t)}{dz} = -\frac{1}{k} q(t); T(L,t)=0$		$\frac{dT(0,t)}{dz} = -\frac{1}{k} q(t); \frac{dT(L,t)}{dz} = 0$	
	«Дисперсия» ошибки решения на основе алгоритмов			
	(10)	(17)	(14)	(19)
Δt	0,141	0,021	0,1657	0,031
$2\Delta t$	0,038	0,003	0,05	0,004
$3\Delta t$	0,011	0,003	0,017	0,002
$4\Delta t$	0,004	0,003	0,007	0,002
$5\Delta t$	0,002	0,002	0,004	0,002
$D^2(q_n, \alpha)$	0,0006	0,0002	0,0008	0,0002

Для более гладкой исходной функции (21) разница оказывается менее заметной. Численные эксперименты проведены для мишеней с $L = 1$ см. При этом для времени наблюдения $t = 1$ с значение параметра Фурье F_0 составило 0,86. Оказывается, что при выполнении условия $F_0 \leq 0,2$ для восстановления можно пользоваться алгоритмами, построенными на основе обратного преобразования Абея (12), (18).

Нами решена задача восстановления интенсивности лазерного излучения по температуре нагретой поверхности мишени. При этом получены формулы инверсии температуры, позволяющие восстанавливать тепловой поток через поверхность «одномерной» мишени по ее температуре, для различных теплофизических режимов на границах. Построены соответствующие алгоритмы и проведены численные эксперименты по восстановлению тепловых потоков по зашумленным значениям температуры. Оценены точностные характеристики алгоритмов для характерных моделей временного хода интенсивности и показано, что использование сглаживающих сплайнов и алгоритмов, не содержащих дифференцирования значений температуры, повышает точность восстановления теплового потока.

1. Ллойд Дж. Системы тепловидения. М.: Мир, 1978. 414 с.
2. Кузиковский А.В., Погодаев В.А., Рождественский А.Е. //II Совещание по атмосферной оптике. Томск: ИОА СО АН СССР, 1980, Ч. II. С. 177.
3. Алифанов О.М. Идентификация процессов теплообмена летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1979. 216 с.
4. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 421 с.
5. Федорюк М.В. Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.
6. Воскобойников Ю.Е., Преображенский Н.Г., Сидельников А.И. Математическая обработка эксперимента в молекулярной газодинамике. Новосибирск: Наука, 1984. 239 с.
7. Григорьев А.Б. Импульсный нагрев излучениями. Ч. II. М.: Наука, 1979. 727 с.
8. Жук В.И., Голосов А.С. //ПФЖ. 1975. Т. 29. № 1. С. 45–50.
9. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
10. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 285 с.
11. Воскобойников Ю.Е. //Автометрия. 1986. № 1. С. 38.

Институт оптики атмосферы СО АН СССР,
г. Томск

Поступила в редакцию
20 марта 1990 г.

A. V. Aks' enov, E. V. Zakharova, Yu. N. Isaev. The Reconstruction of Laser Radiation Intensity Distribution from the Temperature along Sectioned Target Surface.

The problem of laser radiation intensity reconstruction from the temperature along heated target surface is solved. The use of sectioned target allows one to reduce the multidimensional inverse problem on heat conductivity to the set of one-dimensional ones. For different boundary conditions of heating one-dimensional elements there were derived formulas for temperature inversion, which allow one to restore the heat flow at arbitrary thermophysical parameters. The efficiency of restoration algorithms thus constructed, is investigated in numerical experiments.