

С.Г. Балашов, А.А. Пахомов, А.Д. Ряхин, Ю.А. Садыков

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ, ИСКАЖЕННЫХ СИММЕТРИЧНЫМ СМАЗОМ

Теоретически исследована и подтверждена при математическом моделировании возможность восстановления двумерного изображения, искаженного симметричным смазом по отношению компонент его фурье-спектра.

В различных областях прикладной оптики, например, аэрофотографии, а также в астрономии при наблюдении через атмосферу объектов с длинной экспозицией или учете эффектов, обусловленных атмосферной дисперсией, зарегистрированное искаженное изображение $I(\mathbf{r})$ описывается интегралом свертки:

$$I(\mathbf{r}) = \int J(\mathbf{r}_1) H(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1, \quad (1)$$

где $J(\mathbf{r})$ — истинное изображение, а $H(\mathbf{r})$ — функция смаза. Обычно задачу восстановления изображения $J(\mathbf{r})$ решают хорошо развитыми методами линейной фильтрации [1], предполагая при этом, что функция смаза полностью известна. Однако нередки ситуации, когда информация о структуре смаза ограничивается условием его симметричности. Например, для линейно смазанных изображений $H(\mathbf{r})$ четная функция $H(-\mathbf{r}) = H(\mathbf{r})$, а для дефокусированных она обладает круговой симметрией: $H(\mathbf{r}) = H(|\mathbf{r}|)$. Использование этих свойств $H(\mathbf{r})$ позволяет выделить неискаженную информацию об отношении компонент Фурье-спектра изображения, а задачу компенсации смаза переформулировать как задачу восстановления изображения по этому отношению. Действительно, осуществляя Фурье-преобразование (1), в области пространственных частот \mathbf{x} имеем:

$$\tilde{I}(\mathbf{x}) = \tilde{J}(\mathbf{x}) \cdot \tilde{H}(\mathbf{x}). \quad (2)$$

Если $H(\mathbf{r})$ — четная функция, то $\tilde{H}(\mathbf{x})$ — действительная функция, и поэтому справедливо равенство

$$\frac{\operatorname{Im} \tilde{I}(\mathbf{x})}{\operatorname{Re} \tilde{I}(\mathbf{x})} = \frac{\operatorname{Im} \tilde{J}(\mathbf{x})}{\operatorname{Re} \tilde{J}(\mathbf{x})} \quad (3)$$

или, что эквивалентно:

$$\operatorname{tg} \Psi(\mathbf{x}) = \operatorname{tg} \Theta(\mathbf{x}), \quad (4)$$

где $\Psi(\mathbf{x}) = \arg \tilde{I}(\mathbf{x})$, $\Theta(\mathbf{x}) = \arg \tilde{J}(\mathbf{x})$. Отметим, что так как $\operatorname{tg} \Psi(\mathbf{x})$ нечувствителен к π -скачкам, обусловленным фазой передаточной функции смаза $H(\mathbf{x})$, то $\Theta(\mathbf{x})$ может отличаться от $\Psi(\mathbf{x})$ на π радиан. В случае круговой симметрии смаза $H(\mathbf{x}) = H(x_1, x_2)$ инвариантна к развороту, например, на 90° , т.е. $H(x_1, x_2) = H(x_2, -x_1)$. Поэтому из (2) получаем соотношение вида

$$\frac{\tilde{I}(x_1, x_2)}{\tilde{I}(x_2, -x_1)} = \frac{\tilde{J}(x_1, x_2)}{\tilde{J}(x_2, -x_1)} = a(x_1, x_2). \quad (5)$$

Необходимо подчеркнуть, что (5) является частным случаем (4), поскольку круговая симметрия $H(\mathbf{x})$ есть частный случай условия четности $H(\mathbf{x})$.

Рассмотрим однозначность восстановления изображения из (4). Подробно этот вопрос исследован в [2], где показано, что в практически важном двумерном дискретном случае при известной области S истинного изображения (S определяется как минимальная прямоугольная область, вне размеров которой изображение равно нулю) задача, как правило, (в смысле меры Лебега) имеет единственное решение. При этом для дискретного изображения $J(n_1, n_2)$ анализ однозначности сводится к

анализу разложимости z -образа $R_J(z_1, z_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1} \sum_{n_2=0}^{N_2} J_{n_1 n_2} z_1^{n_1} z_2^{n_2}$, являющегося двумерным полиномом, в

виде произведения хотя бы двух полиномов меньшей степени. В [3] показано, что мера Лебега множества разложимых полиномов среди множества всех двумерных полиномов равна нулю, откуда и следует вывод о единственности решения. Поясним метод доказательства однозначности восстановления из (5). Пусть кроме $J(n_1, n_2)$ есть другое решение $J_1(n_1, n_2)$ с той же областью S .

Из (5) для их z -образов получаем:

$$R_J(z_1, z_2) R_{J_1}(z_2, z_1^{-1}) = R_{J_1}(z_1, z_2) R_J(z_2, z_1^{-1}).$$

Поскольку полиномы, как правило, неразложимы, то должно быть либо $R_J(z_1, z_2) = R_{J_1}(z_1, z_2)$, либо $R_J(z_1, z_2) = R_{J_1}(z_2, z_1^{-1})$. Для изображений, не обладающих круговой симметрией, второй случай исключен. Поэтому возможен только первый случай, откуда следует $J(n_1, n_2) = J_1(n_1, n_2)$. Таким образом, задача почти всегда имеет единственное решение.

Наиболее перспективные, по мнению авторов, методы практического решения рассматриваемых задач основаны на итерационных алгоритмах вида [4]:

$$J_{k+1} = \hat{P}_1 \hat{P}_2 \hat{P}_3 J_k,$$

где J_k – оценка изображения на k -й итерации, \hat{P}_1 – оператор проекции на множество положительных функций; \hat{P}_2 – оператор проекции на множество финитных функций (с заданной областью S), \hat{P}_3 – оператор проекции на множество функций с заданным отношением ((4) или (5)) компонент Фурье-спектра. Сущность данного подхода заключается в асимптотическом приближении оценки J_k к истинному изображению путем последовательного ее согласования в соответствии с заданными априорными ограничениями. Поскольку все рассматриваемые множества выпуклы, сходимость итерационного процесса гарантирована [4].

Стоит отметить, что аналогичный подход успешно используется при решении сходных по формулировке фазовой и амплитудной проблем [5, 6]. Исходя из определения проекции, несложно убедиться, что действие оператора \hat{P}_1 сводится к обнулению отрицательных значений, \hat{P}_2 – к обнулению значений вне заданной области S , \hat{P}_3 изменяет спектр оценки, чтобы результирующий спектр удовлетворял либо (4), либо (5). Выражение для оператора \hat{P}_3 в задаче восстановления по отношению (4) получается следующим образом. После Фурье-преобразования оценки изображения J_k имеем Фурье-спектр $\tilde{J}_k = \text{Re}(\mathbf{x}) + i \text{Im}(\mathbf{x})$, который надо исправить минимальным образом так, чтобы отношение новых $\text{Re}_1(\mathbf{x})$ и $\text{Im}_1(\mathbf{x})$ удовлетворяло условию $\frac{\text{Im}_1}{\text{Re}_1} = \text{tg} \Theta$. Отсюда следует условие:

$$\sum_{\mathbf{x}} |\tilde{J}_k(\mathbf{x}) - \tilde{I}_k(\mathbf{x})|^2 = \sum_{\mathbf{x}} \{\text{Re}(\mathbf{x}) - \text{Re}_1(\mathbf{x})\}^2 + \{\text{Im}(\mathbf{x}) - \text{Im}_1(\mathbf{x})\}^2 = \min.$$

Подставляя в это выражение $\text{Im}_1 = \text{Re}_1 \text{tg} \Theta$ и дифференцируя по Re_1 , находим минимум (при заданных $\text{Re}(\mathbf{x})$ и $\text{Im}(\mathbf{x})$, при этом выражения для Re_1 и Im_1 имеют вид

$$\text{Re}_1(\mathbf{x}) = \frac{\text{Re}(\mathbf{x}) + \text{tg} \Theta \text{Im}(\mathbf{x})}{1 + \text{tg}^2 \Theta}, \quad \text{Im}_1(\mathbf{x}) = \frac{\text{tg} \Theta}{1 + \text{tg}^2 \Theta} \{\text{Re}(\mathbf{x}) + \text{tg} \Theta \cdot \text{Im}(\mathbf{x})\}.$$

Записывая это выражение более подробно, с учетом того, что $\text{Re}(\mathbf{x}) = |\tilde{J}_k| \cos \varphi_k(\mathbf{x})$, $\text{Im}(\mathbf{x}) = |\tilde{J}_k| \sin \varphi_k(\mathbf{x})$, для нового Фурье-спектра $\tilde{I}_k = \text{Re}_1(\mathbf{x}) + i \text{Im}_1(\mathbf{x})$ получаем выражение:

$$\tilde{I}_k = |\tilde{J}_k| \cos \{\Theta(\mathbf{x}) - \varphi_k(\mathbf{x})\} \exp \{i \Theta(\mathbf{x})\}.$$

Оператор \hat{P}_3 тем самым определяется как $\hat{P}_3 J_k = \hat{F}^{-1} \{\tilde{I}_k\}$, где $\varphi_k(\mathbf{x}) = \arg \tilde{J}_k$, $\tilde{J}_k = \hat{F} \{J_k\}$, а \hat{F} и \hat{F}^{-1} операторы соответственно прямого и обратного Фурье-преобразований. Отметим, что вид оператора не меняется при добавлении к $\Theta(\mathbf{x}) \pm \pi$ скачков, что соответствует изначальной постановке задачи.

При выводе оператора \hat{P}_3 по заданному отношению $\alpha(x_1, x_2)$ (5) в силу дискретности Фурье-спектра рассмотрение удобно провести для 1-й ($x_1, x_2 > 0$), 2-й ($x_1 < 0, x_2 > 0$), 3-й ($x_1, x_2 < 0$) и 4-й ($x_1 > 0, x_2 < 0$) четвертей по отдельности. Обозначим через $\alpha_1 = \tilde{J}(x_2) / \tilde{J}(x_1)$ отношение спектра $\tilde{J}(x_2)$ во 2-й четверти ($x_1 < 0, x_2 > 0$) к $\tilde{J}(x_1)$ в первой четверти ($x_1 > 0, x_2 > 0$). Аналогично запишем следующие три отношения спектров $\alpha_2 = \tilde{J}(x_3) / \tilde{J}(x_2)$ в 3-й ($x_1, x_2 < 0$) и 2-й ($x_1 < 0, x_2 > 0$) четвертях, $\alpha_3 = \tilde{J}(x_4) / \tilde{J}(x_3)$ в 4-й ($x_1 > 0, x_2 < 0$) и 3-й ($x_1, x_2 < 0$) четвертях, а также $\alpha_4 = \tilde{J}(x_1) / \tilde{J}(x_4)$ в 1-й и 4-й четвертях.

Пусть на κ -й итерации получена оценка Фурье-спектра $\tilde{J}_\kappa(x)$ с отношением β : $\beta_1 = \tilde{J}_\kappa(x_2) / \tilde{J}_\kappa(x_1)$, $\beta_2 = \tilde{J}_\kappa(x_3) / \tilde{J}_\kappa(x_2)$, $\beta_3 = \tilde{J}_\kappa(x_4) / \tilde{J}_\kappa(x_3)$, $\beta_4 = \tilde{J}_\kappa(x_1) / \tilde{J}_\kappa(x_4)$. Необходимо исправить $\tilde{J}_\kappa(x)$ минимальным образом, чтобы отношение β стало равным α . Отсюда следует, что необходимо минимизировать функционал:

$$\sum_x |\tilde{I}_\kappa(x_1) - \tilde{J}_\kappa(x_1)|^2 + |\tilde{I}_\kappa(x_2) - \tilde{J}_\kappa(x_2)|^2 + |\tilde{I}_\kappa(x_3) - \tilde{J}_\kappa(x_3)|^2 + |\tilde{I}_\kappa(x_4) - \tilde{J}_\kappa(x_4)|^2 = \min,$$

где $\tilde{I}_\kappa(x_i)$ — новая искомая оценка спектра в i -й четверти с истинным отношением α , а $\tilde{J}_\kappa(x_i)$ — полученная оценка спектра в i -й четверти с отношением β . Запишем более подробно выражение для функционала:

$$\sum_x \sum_{i=1}^4 \{\tilde{I}_\kappa(x_i) - \tilde{J}_\kappa(x_i)\} \{\tilde{I}_\kappa^*(x_i) - \tilde{J}_\kappa^*(x_i)\} = \min,$$

где ** — означает комплексное сопряжение. Дифференцируя это выражение по $\tilde{I}_\kappa(x_i)$, приравнявая производную нулю, учитывая антисимметрию спектра: $\tilde{I}_\kappa(-x_1, -x_2) = \tilde{I}_\kappa^*(x_1, x_2)$ и опуская промежуточные выкладки, находим выражение для нового спектра в каждой четверти $i = 1..4$:

$$\tilde{I}_\kappa(x_i) = \frac{\tilde{J}_\kappa(x_i) (1 + \alpha_i^* \beta_i) + \tilde{J}_\kappa^*(x_i) \alpha_i^* \alpha_{i+1}^* (1 + \alpha_i \beta_i^*)}{2 (1 + |\alpha_i|^2)}.$$

Тем самым, оператор \hat{P}_3 определяется как $\hat{P}_3 J_\kappa = \hat{F}^{-1} \{\tilde{I}_\kappa\}$, где $\tilde{J}_\kappa = \hat{F} \{J_\kappa\}$, ** — означает комплексное сопряжение, α_i и β_i — соответственно отношение истинного и порученного Фурье-спектра в i -й четверти.

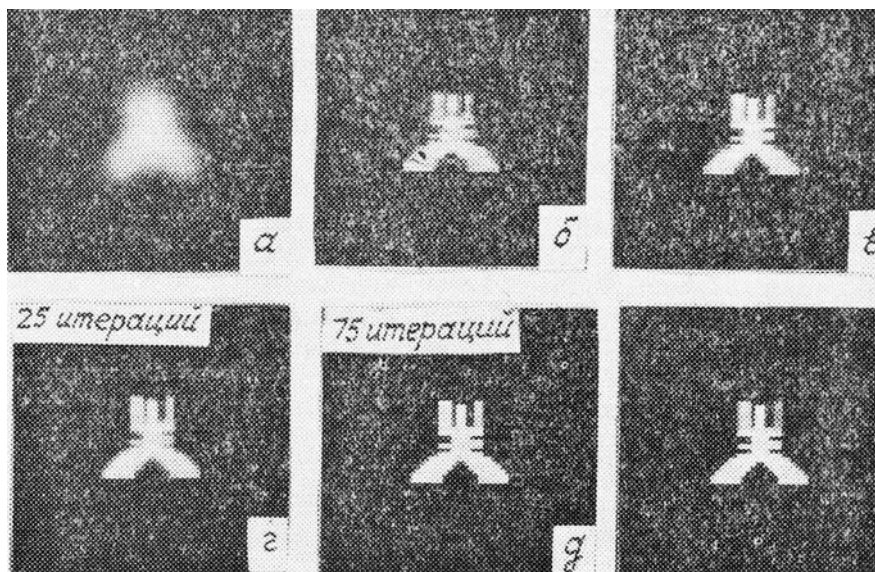


Рис. а — исходное смазанное изображение (величина смаза 9×9); б, в — результаты восстановления по отношению (3) соответственно после 25 и 75 итераций; з, д — результаты восстановления по отношению (5) соответственно после 25 и 75 итераций; е — истинное изображение

В заключение отметим следующее:

а) Вид дефокусирующей функции не влияет на постановку и решение задачи, существенным является лишь условие ее четности или круговой симметрии.

б) Искажения в модельных расчетах задавались при умножении Фурье-спектра изображения на Фурье-спектр от импульсного отклика смаза, равного единице, в пределах квадратной области $a \times a$ ($a = 9$). Передаточная функция в этом случае равна $\frac{\sin(ax_1 + ax_2)}{ax_1 + ax_2}$.

в) Разработанные алгоритмы были экспериментально проверены путем математического моделирования на ЭВМ СМ-1420 с массивами 64×64 . При этом авторы предполагали известными истинные размеры изображения (длину и ширину), а действие оператора \hat{P}_2 сводилось к умножению на прямоугольную маску. Типичные результаты восстановления представлены на рисунке. Моделирование показало, что относительная среднеквадратическая ошибка восстановления не хуже 1% достигается после 50–100 итераций (в зависимости от величины смаза).

1. Sondhi M. M. // Proc IEEE. 1982. V. 60. № 7. P. 842–856.
2. Hayes H. // IEEE Trans. Acoust. Speech. 1982. V. 24. № 2. P. 140–154.
3. Hayes H., Mc Clellan J. // Proc. IEEE. 1982. V. 70. № 2. P. 197–198.
4. Youba D., Webb H. // IEEE Trans. Med. 1982. V. 1. № 2. P. 81–94.
5. Бакут П. А., Пахомов А. А., Ряхин А. Д., Свиридов К. Н. // Радиотехника и электроника. 1988. Т. 33. № 4. С. 871–872.
6. Бакут П. А., Пахомов А. А., Ряхин А. Д., Свиридов К. Н. // Оптика и спектроскопия. 1988. Т. 64. № 1. С. 165–169.

Научно-производственное объединение «Астрофизика»

Поступила в редакцию
9 октября 1989 г.

S. G. Balashov, A. A. Pakhomov, A. D. Ryakhin, Yu. A. Sadykov. **Restoration of Images Distorted by Symmetrical Blur.**

Possibility of restoring a two-dimensional image distorted by symmetrical blur from the ratio of its Fourier spectrum components is theoretically investigated and confirmed by mathematical simulations.