«Оптика атмосферы и океана», 12, № 3 (1999)

УДК 551.521.31

С.Д. Творогов

УСРЕДНЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ ПО СТОХАСТИЧЕСКИМ ПАРАМЕТРАМ СРЕДЫ

Институт оптики атмосферы СО РАН, Томск

Поступила в редакцию 3.12.98 г. Принята к печати 7.12.98 г.

Метод кинетических тождеств статистической физики применен для задач о переносе излучения в стохастически неоднородной среде.

1. Предисловие

Постановка рассматриваемой здесь задачи появилась во время обсуждения с Георгием Александровичем Титовым известного вопроса о нарушении баланса световых потоков в системе «Солнечное излучение – сплошная облачность». Георгий Александрович с присущей ему обстоятельностью исследовал гипотезу «горизонтального переноса» в аэрозольной стохастической среде, применяя ради этого метод Монте-Карло, которым он владел мастерски. В своей докторской диссертации Георгий Александрович отдал должное и обычному приему статистической физики – непосредственному усреднению уравнений со случайными параметрами, а не их решений. Подробное, параллельное методу Монте-Карло, расследование гипотезы «горизонтального переноса» представлялось ему необходимым звеном задачи. В рамках этой программы автором статьи и была предпринята попытка применить известный прием [1–3] к ситуации типа «уравнение переноса излучения».

К сожалению, мы не успели объединить оба подхода, и остается только выразить надежду на то, что это все-таки будет сделано. Сейчас же ограничимся лишь доказательствами того, что метод [4] годится и для уравнения переноса.

2. Постановка задачи

Пусть $I(\mathbf{r}, \mathbf{n} \mid \xi)$ – спектральная функция (от частоты ω) интенсивности луча, идущего в точке $\mathbf{r}$ в направлении орта $\mathbf{n}$. Характеристики среды – пространственные случайные функции, и они, обозначаемые как $\Theta(\mathbf{r})$, полагаются представленными стандартным разложением $\Theta(\mathbf{r}) = \int d\nu\, \zeta(\nu) \exp(i\nu\mathbf{r})$. Именно в ζ входят регламентируемые содержанием задачи статистические параметры ξ, $\Phi(\xi)$ – функция (многомерная, разумеется) их распределения и статистическое среднее некой $\Theta(\xi)$ – обычное

$$\Theta_{st} = \int \Theta(\xi)\, \Phi(\xi)\, d\xi. \tag{1}$$

Существенно то, что при подобном описании ξ фигурируют лишь как параметры в уравнении переноса, т.е. операторы последнего действуют только на $\mathbf{r}$, $\mathbf{n}$; и если $\hat{T}(\mathbf{r}, \mathbf{n} | \xi)$ – такой оператор, то остается прежнее определение (1) для $\hat{T}_{st}$.

Уравнение переноса

$$I(\mathbf{r}, \mathbf{n} | \xi) = I^{(0)}(\mathbf{r}^{(\sigma)}, \mathbf{n}) \exp\left[-\int_0^{|\mathbf{r}-\mathbf{r}^s|} dR'\, \chi(\mathbf{r} - R'\mathbf{n} | \xi) \right] +$$
$$+ \int_0^{|\mathbf{r}-\mathbf{r}^s|} dR \exp\left[-\int_0^{R} dR'\, \chi(\mathbf{r} - R'\mathbf{n} \mid \xi) \right] \times$$
$$\times \int d\mathbf{n}'\, \varphi(\mathbf{r} - R\mathbf{n}, \mathbf{n}, \mathbf{n}' \mid \xi)\, I(\mathbf{r} - R\mathbf{n}, \mathbf{n}' \mid \mid \xi). \tag{2}$$

Здесь χ – коэффициент ослабления; φ – индикатриса рассеяния (не нормированная на коэффициент рассеяния); $\mathbf{r}^{(\sigma)}(\mathbf{r}, \mathbf{n})$ – «граничная точка»; $I^{(0)}$ – излучение, входящее в среду извне.

Далее используются обозначения: x – совокупность переменных $\mathbf{r}$, $\mathbf{n}$; $Y(x \mid \xi)$ заменяет I, $Y^{(0)}_{(x)} - I^{(0)}$, $g(x \mid \xi)$ – «бугеровскую экспоненту»; $\hat{T}(x|\xi)$ – интегральный оператор уравнения (2). Теперь (2) обретает форму

$$Y(x \mid \xi) = Y^{(0)}(x)\, g(x \mid \xi) + \hat{T}(x|\xi)\, Y(x \mid \xi). \tag{3}$$

В последующем, краткости ради, полагаем, что $Y^{(0)}(x)$ включена в $g(x \mid \xi)$. Введем еще функцию $Z(x, \xi) = Y(x \mid \xi)\, \Phi(\xi)$, уравнение для которой

$$Z(x, \xi) = g(x \mid \xi)\, \Phi(\xi) + \hat{T}(x|\xi)\, Z(x, \xi) \tag{4}$$

получается простым умножением (3) на $\Phi(\xi)$ – ведь $\hat{T}$ – не оператор относительно ξ.

3. Применение метода проекционного оператора к уравнению вида (4)

Соотношением $\hat{P}\,\Theta(x, \xi) = \Phi(\xi) \int d\xi\, \Theta(x, \xi)$ для интегрируемой (по ξ) $\Theta(x, \xi)$ введем проекционный оператор $\hat{P}$. Функция $Z_1(x, \xi) \equiv \hat{P}\, Z(x, \xi) = \Phi(\xi)\, Y_{st}(x)$ в силу (1) и определений Z и $\hat{P}$. Еще одна функция $Z_2(x,\xi) = (1-\hat{P})\,Z$, и, разумеется, $Z_1 + Z_2 = Z$.

Умножая (4) слева на $\hat{P}$, используя только что выписанные соотношения и затем интегрируя по ξ, получим относительно $Y_{st}(x)$ уравнение

$$Y_{st}(x) = g_{st}(x) + \hat{T}_{st}(x)\,Y_{st}(x) + \int d\xi\,\hat{T}(x|\xi)\,Z_2(x,\xi). \tag{5}$$

Чтобы из (5) исключить Z_2, на (4) действуем оператором $\hat{T}(1-\hat{P})$; в левой части возникает функция $H \equiv \hat{T} Z_2$, первое слагаемое из первой части превратится в $\hat{T}\,[g(x\mid\xi) - g_{st}(x)]\,\Phi(\xi) \equiv \alpha(x,\xi)$, а другое дает сумму $\beta(x,\xi) = \hat{T}\,(1-\hat{P})\,\Phi Y_{st}$ и $\hat{T}\,(1-\hat{P})\,H$. Относительно H появится уравнение $H = \alpha + \beta + \hat{T}\,(1-\hat{P})\,H$ с формальным решением

$$H(x,\xi) = \frac{1}{1-\hat{T}\,(1-\hat{P})}\,[\alpha(x,\xi) + \beta(x,\xi)]$$

и обычным обозначением $1/\hat{O} = \hat{O}^{-1}$ оператора $\hat{O}$. После интегрирования по ξ

$$\int d\xi\,\hat{T} Z_2 \equiv \Psi(x) = \int d\xi \frac{1}{1-\hat{T}\,(1-\hat{P})}\,\{\hat{T}(g(x\mid\xi) - g_{st}(x))\,\Phi(\xi) +$$

$$+ \hat{T}\,(1-\hat{P})\,\hat{T}\,\Phi(\xi)\,Y_{st}(x)\}. \tag{6}$$

Конечно же, надобны такие преобразования (6), после которых, во-первых, уже явно не будет фигурировать $\hat{P}$ и, во-вторых, «минимизируется» участие $\hat{T}(x|\xi)$. Здесь сказываются полезными некоторые операторные тождества.

Для оператора

$$\hat{A}(x,\xi)\,\frac{1}{1+\hat{T}\hat{P}}\,\hat{A}\,\Phi = \hat{A}\,\Phi - \hat{T}\,\Phi\frac{1}{1+\hat{T}_{st}}\int \hat{A}\,\Phi\, d\xi. \tag{7}$$

Действительно, ряд

$$\frac{1}{1+\hat{T}\hat{P}} = 1 - \hat{T}\hat{P} + \hat{T}\hat{P}\hat{T}\hat{P} - \hat{T}\hat{P}\hat{T}\hat{P}\hat{T}\hat{P} + \ldots$$

существует, ибо в нашем случае с уравнением переноса $\|\hat{T}\|<1$, а собственное значение $\hat{P}$ есть ± 1. Определение $\hat{P}$ влечет за собой равенство $(\hat{T}\hat{P})^m\,\hat{A}\,\Phi = \hat{T}\,\Phi\,\hat{T}_{st}^{m-1}\int \hat{A}\,\Phi\, d\xi$ для целого $m \geq 1$; последующее суммирование ряда дает (7). После интегрирования (7) по ξ величину $\int \hat{A}\Phi d\xi$ можно будет написать справа, и перед нею будет $1 - [\hat{T}_{st}/(1+\hat{T}_{st})] = 1/(1+\hat{T}_{st})$, поскольку здесь фигурирует лишь один оператор $\hat{T}_{st}$. Поэтому

$$\int \frac{1}{1+\hat{T}\hat{P}}\,\hat{A}\,\Phi(\xi)\,d\xi = \frac{1}{1+\hat{T}_{st}}\int \hat{A}\,\Phi\, d\xi. \tag{8}$$

Далее, существует оператор M – решение эквивалентных уравнений

$$\hat{M} = \hat{T} + \hat{T}\frac{1}{1+\hat{T}\hat{P}}\,\hat{M},\quad \hat{M} = \hat{T} + \hat{M}\frac{1}{1+\hat{T}\hat{P}}\,\hat{T} \tag{9}$$

и входящий (как $\hat{M}_E$) в общее определение

$$\frac{1}{\hat{C}-\hat{E}} = \frac{1}{\hat{C}}\left(1 + \hat{M}_E\,\frac{1}{\hat{C}}\right). \tag{10}$$

Подобные тождества весьма популярны при преобразованиях операторов типа «резольвента» (см., например, [3]).

Непосредственная подстановка убеждает, что (9) и (10) (при наших $\hat{C}$ и $\hat{E}$) удовлетворяет

$$\hat{M} = \hat{T} + \hat{T}\frac{1}{1+\hat{T}\hat{P}-\hat{T}}\,\hat{T}.$$

Последнее выражение, (7), (8) и определение $\hat{P}$ дают для действующего (под знаком $\int d\,\xi\ldots$) на Y_{st} оператора из (6) цепочку:

$$\frac{1}{1-\hat{T}\,(1-\hat{P})}\,\hat{T}\,(1-\hat{P})\,\hat{T}\,\Phi = \hat{T}\,(1-\hat{P})\frac{1}{1-\hat{T}\,(1-\hat{P})}\,\hat{T}\,\Phi =$$

$$= T\frac{1}{1+\hat{T}\hat{P}-\hat{T}}\,\hat{T}\,\Phi - T\Phi\int d\xi\frac{1}{1+\hat{T}\hat{P}-\hat{T}}\,\hat{T}\,\Phi =$$

$$= (\hat{M}-\hat{T})\,\Phi - \hat{T}\,\Phi\int d\xi\,(\hat{T}^{-1}\hat{M}-1)\,\Phi = \hat{M}\,\Phi -$$

$$- \hat{T}\Phi\int d\xi\left(\Phi + \frac{1}{1+\hat{T}\hat{P}}\,\hat{M}\,\Phi\right) = \hat{M}\,\Phi -$$

$$- \hat{T}\,\Phi\,\frac{1}{1+\hat{T}_{st}}\int \hat{M}\,\Phi\, d\xi - \hat{T}\,\Phi.$$

После интегрирования по ξ соответствующее слагаемое Ψ обретет вид

$$\frac{1}{1+\hat{T}_{st}}\int \hat{M}\,\Phi\, d\xi\, Y_{st} - \hat{T}_{st}\,Y_{st}. \tag{11}$$

Интеграл из (11) преобразуется привлечением решения (9) в виде ряда

$$\hat{M}\,\Phi = (\hat{A}_0 + \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \ldots)\,\Phi;\ \hat{A}_0 \equiv \hat{T},\ \hat{A}_1 = \hat{T}\frac{1}{1+\hat{T}\hat{P}}\,\hat{A}_0,\ \hat{A}_2 =$$

$$= \hat{T}\frac{1}{1+\hat{T}\hat{P}}\,\hat{A}_1,\ \ldots\,.$$

Формула (7) порождает цепочку $\hat{A}_0\,\Phi = \hat{T}\,\Phi$:

$$\hat{A}_1\,\Phi = \hat{T}\hat{A}_0\,\Phi - \hat{T}^2\,\Phi\,\frac{1}{1+\hat{T}_{st}}\,g_0,\quad g_0 = \int \hat{A}_0\,\Phi\, d\xi = \hat{T}_{st},$$

$$\hat{A}_2\,\Phi = \hat{T}\hat{A}_1\,\Phi - \hat{T}^2\,\Phi\,\frac{1}{1+\hat{T}_{st}}\,g_1,\ g_1 = \int \hat{A}_1\,\Phi\, d\xi,$$

с очевидным следствием

$$\hat{M}\,\Phi - \hat{T}\,\Phi = \hat{T}\,\hat{M}\,\Phi - \hat{T}^2\,\Phi\,\frac{1}{1+\hat{T}_{st}}\,\hat{X}. \tag{12}$$

Введем еще $\hat{X}_m = \int d\xi\, \hat{T}^m\, \hat{M}\, \Phi$ с целым m, и искомая величина есть $X_0 \equiv X$.

Ясно, что интегрированием (12) по ξ уравнение относительно X не получить, ибо в него войдет тоже неизвестный X_1. Необходима поэтому стандартная процедура: (12) умножается слева на $\hat{T}$ в соответствующей степени (формально начиная с первой) и интегрируется по ξ; итогом окажется система:

$$\hat{X} - \hat{T}_{st} = \hat{X}_1 - (\hat{T}^2)_{st} \frac{1}{1+\hat{T}_{st}} \hat{X},$$

$$\hat{X}_1 - (\hat{T}^2)_{st} = \hat{X}_2 - (\hat{T}^3)_{st} \frac{1}{1+\hat{T}_{st}} \hat{X},$$

$$\hat{X}_2 - (\hat{T}^3)_{st} = \hat{X}_3 - (\hat{T}^4)_{st} \frac{1}{1+\hat{T}_{st}} \hat{X}.$$

При почленном суммировании исчезнут $\hat{X}_m$ с $m \geq 1$ и останется

$$\hat{X} - [\hat{T}_{st} + (\hat{T}^2)_{st} + (\hat{T}^3)_{st} + ...] = -[(\hat{T}^2)_{st} + (\hat{T}^3)_{st} + (\hat{T}^4)_{st} + ...] \times$$

$$\times \frac{1}{1+\hat{T}_{st}} \hat{X}.$$

Выражения в квадратных скобках сворачиваются в

$$\left(\hat{T}\frac{1}{1-\hat{T}}\right)_{st}, \quad \left(\hat{T}^2\frac{1}{1-\hat{T}}\right)_{st},$$

и для X появляется уравнение с формальным решением

$$\hat{X} \equiv \int \hat{M}\, \Phi\, d\xi = \frac{1}{1+\left(\hat{T}^2\frac{1}{1-\hat{T}}\right)_{st}\frac{1}{1+\hat{T}_{st}}}\left(\hat{T}\frac{1}{1-\hat{T}}\right)_{st}.$$

Оператором, действующим в (11) на Y_{st}, будет теперь

$$\frac{1}{1+\hat{T}_{st}}\,\frac{1}{1+\left(\hat{T}^2\frac{1}{1-\hat{T}}\right)_{st}\frac{1}{1+\hat{T}_{st}}}\left(\hat{T}\frac{1}{1-\hat{T}}\right)_{st} - \hat{T}_{st}.$$

Обозначая знаменатели в первых двух соотношениях через c и e, получим $\hat{c}^{-1}\,\hat{e}^{-1} = (ec)^{-1}$, что несколько упрощает последнее выражение:

$$\frac{1}{1+\hat{T}_{st}+\left(\hat{T}^2\frac{1}{1-\hat{T}}\right)_{st}}\left(\hat{T}\frac{1}{1-\hat{T}}\right)_{st} - \hat{T}_{st}.$$

Записывая, наконец, знаменатель первого сомножителя под общим знаком $(...)_{st}$ и восстанавливая Y_{st}, приведем рассматриваемое слагаемое (6) к форме

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{1-\hat{T}}\right)_{st}}\left(\hat{T}\frac{1}{1-\hat{T}}\right)_{st} Y_{st} - \hat{T}_{st}\, Y_{st}.$$

Совершенно аналогичным приемом преобразуется другое слагаемое (6), и окончательно

$$\Psi(x) = \frac{1}{\left(\frac{1}{1-\hat{T}}\right)_{st}}\left(\hat{T}\frac{1}{1-\hat{T}}\right)_{st} Y_{st} +$$

$$+\frac{1}{\left(\frac{1}{1-\hat{T}}\right)_{st}}\left(\hat{T}\frac{1}{1-\hat{T}}(g-g_{st})\right)_{st} - \hat{T}_{st}\, Y_{st}. \tag{13}$$

Выражения (5), (6) и (13) ведут к соотношению

$$Y_{st} = \tilde{Y} + \hat{T}_{st}\, Y_{st} + \hat{L}\, Y_{st}, \tag{14}$$

в котором

$$\hat{L} = \frac{1}{\left(\frac{1}{1-\hat{T}}\right)_{st}}\left(\hat{T}\frac{1}{1-\hat{T}}\right)_{st} - \hat{T}_{st} \equiv \hat{K} - \hat{T}_{st}, \tag{15}$$

$$\tilde{Y} = g_{st} + \frac{1}{\left(\frac{1}{1-\hat{T}}\right)_{st}}\left(\hat{T}\frac{1}{1-\hat{T}}(g-g_{st})\right)_{st}. \tag{16}$$

4. Обсуждение

Точные по своей математической структуре (14)–(16) – это тождества, имеющие вид уравнений; в этом несложно убедиться, привлекая формальное решение $Y = (1/(1-\hat{T}))\, g$ уравнения (3). Как обычно, обстоятельство это вынуждает быть весьма внимательным во время тождественных упрощений (14)–(16), чтобы в финале не оказалось нечто тривиальное (типа, например, $Y_{st} = Y_{st}$). В сущности, подобное характерно для ситуации, когда уравнение строится по формально известному решению. Но назначение такого, казалось бы, «шага назад» тоже очевидно: создаются предпосылки для введения приближений, опирающихся на соответствующие физические и математические аргументы. Здесь они в определенной степени должны ориентироваться на обращение в нуль при отсутствии стохастичности среды оператора (15) и второго слагаемого (16). И вопрос сводится к поиску наиболее рациональной для подобной акции формы (14). Центральная идея вполне стандартна: приближения в появляющихся после усреднения дополнительных членах – ср. (3) и (14) – окажутся итерационно «подправленными» точными тождествами.

Кратко обозначим те вполне ясные предварительные соображения, которые можно трактовать как предпосылки для последующих приближений.

Во-первых, условие $\left\|\hat{T}\right\| < 1$ – за этим неравенством стоит, как хорошо известно, принципиальный факт существования поглощения (хотя бы и очень малого) на любой частоте, и оно гарантирует сходимость ряда Неймана для уравнения переноса.

Во-вторых, можно, как обычно, ориентироваться на расщепление корреляций; особенно по мере роста показателя степени в выражениях типа «центральный момент». Поэтому для параметра разложения ε – характеристики статистических флуктуаций – можно написать оценку $\varepsilon < \left\|\hat{T} - \hat{T}_{st}\right\|$; это же выполняется и для иных аналогичных конструкций, например $\left|g - g_{st}\right| = 0(\varepsilon)$.

В-третьих, предыдущую возможность упрощений, несомненно, должна усилить «статистика фотонов» (в духе терминов метода Монте-Карло), нивелирующая стохастические свойства среды. Здесь просто надо иметь в виду, что степени $\hat{T}$ – описание многократного рассеяния.

Как дополнительный «параметр малости» должен сработать фактор, который обозначим термином «двойная защита». Смысл его очень простой – в выражениях вида $\hat{A}\nu$ (с оператором $\hat{A}$ и функцией ν) при отсутствии у среды статистических свойств обращаются в нуль и $\hat{A}$ и ν. Несложно проверить, что все компоненты (14) имеют такую «двойную защиту».

1. *Zwanzing R.W.J.* // Chem. Phys. 1960. V. 33. P. 1338–1352.
2. *Лэсс М.* // Флуктуации и когерентные явления. М.: Мир, 1974. 300 с.
3. *Fano U.* // Phys. Rev. V. 131. N 1. P. 259–268.
4. *Tvorogov S.D., Rodimova O.B.* // J. Chem. Phys. 1995. V. 102. N 22. P. 8737–8745.

S.D. Tvorogov. **Averaging of the Radiative Transfer Equation over Stochastic Parameters of the Medium.**

Method of kinetic identifies of statistical Physics is applied to the problem of radiative transfer in the stochastically in homogeneous medium.