

АДАПТИВНАЯ И ИНТЕГРАЛЬНАЯ ОПТИКА

УДК 621.375:551.521

А.С. Соболев, Т.Ю. Черезова, А.В. Кудряшов

Аналитическая и численная модели гибкого биморфного зеркала

Московский государственный университет

Поступила в редакцию 5.10.2004 г.

Приводится уточненное выражение аналитической зависимости функций отклика гибкого биморфного корректора от пространственных координат, проводится сравнение расчетной деформации с экспериментальными данными. Дается сравнительный анализ двух численных моделей гибкого биморфного полупасивного зеркала, созданных на основе двух подходов метода конечных элементов.

Введение

Адаптивное зеркало является ключевым элементом многих современных систем управления и коррекции излучения. Более того, параметры системы и спектр решаемых задач во многом определяются возможностями и особенностями используемого управляемого оптического элемента. Для задач коррекции фазовых искажений излучения, формирования заданных распределений интенсивности оптимальным корректором является гибкое биморфное зеркало [1, 2].

Одним из основных требований к корректору является возможность вносить требуемые искажения в фазу падающего излучения. Поэтому главной характеристикой любого адаптивного зеркала является функция отклика его приводов. Как известно, функцией отклика зеркала называют деформацию его поверхности при приложении единичного напряжения на управляющий электрод. Существует аналитическая модель биморфного зеркала, основанная на получении явного решения уравнения деформации зеркала как тонкой двухслойной пластины [3–5]. Однако такая модель сложна для практического использования и не учитывает геометрических особенностей гибкого зеркала (например, сферичности подложки и различия в диаметрах подложки и пьезокерамики) и различия в коэффициентах Пуассона подложки и керамики. Поэтому встает задача о создании численных моделей зеркала, учитывающих указанные недостатки аналитической модели.

Исследования биморфного зеркала начались с работы Кокоровски [3], получившего и решившего уравнение деформации зеркала для случая прямоугольной пластины. Уравнение деформации круглой пластины с электродами в форме сегментов было выведено и решено аналитически в работах [4, 5]. Численные решения данной задачи, подходящие для практического использования, опубликованы не были.

В данной работе представлены две численные модели зеркала, построенные с помощью двух под-

ходов метода конечных элементов (МКЭ). Этот метод широко используется для расчета упругодеформированного состояния различных конструкций [6, 7], в том числе и содержащих пьезокерамические элементы, однако к расчету гибкого зеркала он был применен впервые в данной работе.

Оптимизация аналитической формулы

Типичная конструкция биморфного зеркала, которая и рассматривается в работе, представлена на рис. 1,а.

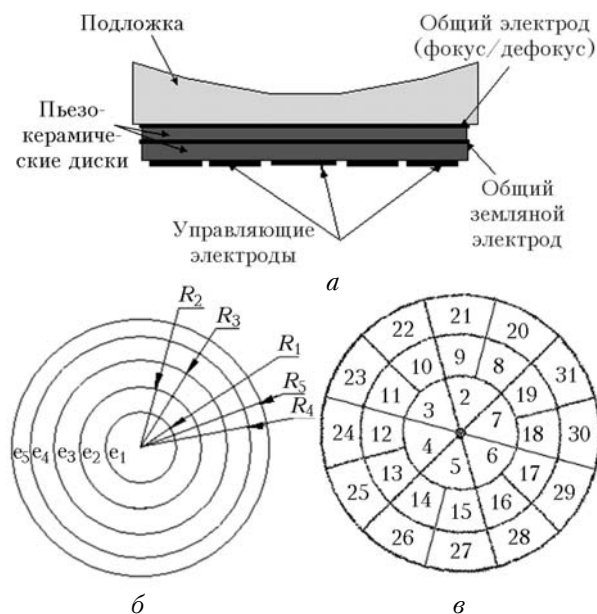


Рис. 1. Конструкция гибкого зеркала (а); конфигурация электродов 5-электродного зеркала: e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 — номера электродов зеркала с соответствующими радиусами $R_1 = 9, R_2 = 17, R_3 = 25, R_4 = 33, R_5 = 41$ мм (б); конфигурация электродов 3-электродного зеркала (в). Каждый электрод обозначен соответствующей цифрой. Первый электрод является общим и предназначен для коррекции дефокуса (а)

Как известно, уравнение деформации зеркала может быть представлено в следующем виде [4, 5]:

$$\begin{aligned} (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2) a^4 \frac{\partial^2 W(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} + D \nabla^2 \nabla^2 W(\mathbf{r}, t) = \\ = \frac{d_{31} a^2 E_1 (2\Delta_1 h_1 - h_1^2)}{2(1-\nu)} \nabla^2 E_{el}(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (1)$$

с граничными условиями:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\nu-1} \nabla^2 W + \frac{\partial W}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = 1, \quad (1a)$$

$$\frac{\partial \nabla^2 W}{\partial r} + (\nu-1) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \right) = 0 \quad \text{при } r = 1, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} D = \frac{E_2}{1-\nu^2} \left(\frac{\Delta_1^3}{3} + \frac{\Delta_2^3}{3} - \Delta_1^2 h_1 + \Delta_1 h_1^2 - \frac{h_1^3}{3} \right) + \\ + \frac{E_1}{1-\nu^2} \left(\Delta_1^2 h_1 - \Delta_1 h_1^2 + \frac{h_1^3}{3} \right) \end{aligned}$$

– цилиндрическая жесткость пластины;

$$\Delta_2 = \frac{E_2 h_2^2 + E_1 (h^2 - h_2^2)}{2(E_2 h_2 + E_1 h_1)}, \quad \Delta_1 = h - \Delta_2$$

– расстояния от срединной плоскости до краев керамики и подложки; $E_{el}(\mathbf{r}, t)$ – электрическое поле, действующее в пьезокерамике; $W(\mathbf{r}, t)$ – смещение поверхности пластины, $\mathbf{r} = \{r, \varphi\}$, t – полярные координаты в плоскости пластины и время, безразмерная координата $r = \rho/a$ нормирована на радиус пластины a ; $E_{1,2}$, $\rho_{1,2}$, $h_{1,2}$ – модуль Юнга, плотность и толщина керамики и подложки соответственно; d_{31} – поперечный пьезомодуль керамики; ν – коэффициент Пуассона, который принимается одинаковым для керамики и подложки. Граничные условия в виде (1a), (16) означают свободное закрепление пластины, которое позволяет достичь максимальной амплитуды деформации.

Нами было получено уточненное аналитическое решение уравнения деформации зеркала по сравнению с приведенным ранее в литературе [4, 5]. Такое выражение учитывает зависимость функции отклика электрода от геометрических размеров электрода (в случае сегментированных электродов – координат сегмента r_1 , r_2 и полярных углов θ_1 , θ_2) и от плотности пластины в статическом случае. Уточненное выражение для функции отклика на частоте p явно описывается следующей формулой:

$$W(r, \theta, p) = M[W_{ncs}(r, \theta, p) + W_{cs}(r, p)], \quad (2)$$

$$W_{ncs}(r, \theta, p) = M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_{nk}(r) \cos n\theta}{p^2 - \omega_{nk}^2} \times$$

$$\begin{aligned} \times \left\{ \left[\Phi'_{nk}(r_2) r_2 - \Phi'_{nk}(r_1) r_1 \right] \frac{1}{n} [\sin(n\theta_2) - \sin(n\theta_1)] + \right. \\ \left. + \int_{r_2}^{r_1} \frac{\Phi_{nk}(\rho)}{\rho} d\rho n [\sin(n\theta_1) - \sin(n\theta_2)] \right\} + \\ + M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_{nk}(r) \sin n\theta}{p^2 - \omega_{nk}^2} \left\{ \left[\Phi'_{nk}(r_2) r_2 - \Phi'_{nk}(r_1) r_1 \right] \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{n} [\cos(n\theta_1) - \cos(n\theta_2)] + \right. \\ \left. + \int_{r_2}^{r_1} \frac{\Phi_{nk}(\rho)}{\rho} d\rho n [\cos(n\theta_2) - \cos(n\theta_1)] \right\}, \end{aligned}$$

$$W_{cs} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Phi_{0k}(r) (\theta_2 - \theta_1)}{p^2 - \omega_{0k}^2} [\Phi'_{0k}(r_2) r_2 - \Phi'_{0k}(r_1) r_1];$$

$$M(r, \varphi) = \frac{d_{31} E_1 (2\Delta_1 h_1 - h_1^2)}{2(1-\nu) a^2 (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2)} E_{el}(r, \varphi).$$

В этом выражении $\Phi_{nk}(r) = J_n(\omega_{nk} r) + A_{nk} I_n(\omega_{nk} r)$, где J_n , I_n – функции Бесселя и Неймана порядка n ; A_{nk} – постоянная, вид которой определяется граничными условиями; ω_{nk} – собственная частота колебаний пластины. Полученное выражение для функции отклика дает и качественное, и количественное соответствие с экспериментом. Это подтверждает рис. 2, на котором представлена экспериментальная и рассчитанная по формуле (2) функция отклика второго электрода зеркала, конфигурация электродов которого показана на рис. 1, б. Экспериментальная и рассчитанная по аналитической формуле амплитуды деформации составляют 3,18 и 2,97 мкм соответственно.

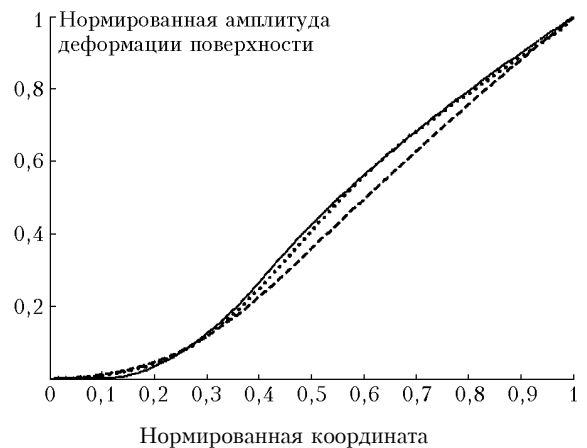


Рис. 2. Функция отклика второго электрода гибкого зеркала с конфигурацией электродов (см. рис. 1, б): сплошная линия – экспериментальная зависимость; штриховая линия – расчет на основании аналитической модели (относительное отклонение от эксперимента 0,37%); пунктирная линия – расчет на основании метода конечных элементов (относительное отклонение от эксперимента 0,022%)

На рис. 2 пунктирной линией показан расчет функции отклика этого электрода по предлагаемой методике, рассмотрению которой посвящены следующие части статьи.

Проекционная формулировка МКЭ (МКЭ-ПФ)

Несмотря на существование явного аналитического выражения для функции отклика заданного электрода, более эффективным является численное решение уравнения (1). Собственные значения k_{ns}^2 , необходимые для вычисления собственных частот колебаний пластины, являются решением трансцендентного уравнения и рассчитываются с большими вычислительными затратами. Однако численное решение уравнения (1) обычными численными методами, например конечных разностей, вызывает определенные трудности, в частности, при нахождении второй производной от разрывной функции для вычисления правой части уравнения. МКЭ-ПФ является методом для решения дифференциальных уравнений в произвольной области с граничными условиями определенного вида [6, 7] и позволяет избежать этих трудностей.

Он является наиболее эффективным при решении уравнения Лапласа с граничными условиями Неймана [8]. В случае центральной симметрии задачи (для электродов в виде концентрических колец и свободного крепления зеркала) и статическом случае уравнение (1) можно свести к двум уравнениям Лапласа, а граничные условия (1а) и (1б) к условиям Неймана с помощью следующей замены:

$$U(r) = \nabla^2 W(r), \quad f(r) = \frac{d_{31} a^2 E_1 (2\Delta_1 h_1 - h_1^2)}{D2(1-\nu)} E_{el}(r). \quad (3)$$

Тогда решаемые уравнения приобретают следующий вид:

$$\nabla^2 U(r) = \nabla^2 f(r) \quad (4)$$

с граничным условием

$$\frac{\partial U}{\partial r} = 0 \text{ при } r = 1; \quad (4a)$$

$$\nabla^2 W(r) = U(r) \quad (5)$$

с граничным условием

$$\frac{\partial W(r)}{\partial r} = -\frac{1}{\nu-1} U(r), \quad (5a)$$

где $W(r)$ – профиль поверхности зеркала; $U(r)$ – функция, описывающая кривизну поверхности; $f(r)$ – безразмерная напряженность действующего в пьезокерамике поля. В этих уравнениях используется безразмерная координата $r = \rho/a$, нормированная на радиус пластины a .

Решение уравнения (4) определяется с точностью до произвольной константы, которую можно найти из условия существования решения (5):

$$U(r) = U(r) + C,$$

$$C = \frac{1}{\pi(2\nu-1)} \left(\iint_{circle} U d\sigma - \nu \int_0^{2\pi} U d\phi \right).$$

Для решения этих уравнений методом МКЭ-ПФ мы использовали программный пакет FastFlo 3.0, который позволяет решить уравнение деформации зеркала. Причем при дискретизации 400 точек на радиус вычисления на PC AMD 1700 228 Mb RAM занимают меньше 1 с.

Представлены результаты численного моделирования с помощью МКЭ-ПФ гибкого 5-электродного зеркала с электродами в виде концентрических колец (схема электродов представлена на рис. 1,б). На рис. 2 представлены функции отклика для второго кольца. В табл. 1 приведены относительные отклонения рассчитанных функций отклика от экспериментальных для каждого электрода, а также амплитуды деформации экспериментальных и расчетных функций отклика. Из рис. 2 и табл. 1 видно хорошее качественное и количественное совпадение экспериментальных и расчетных функций отклика. Отличие расчетной и экспериментальной амплитуд деформации зеркала находится в пределах погрешности измерений, что также подтверждает хорошую точность модели.

Таблица 1

Сравнение экспериментальных и расчетных функций отклика 5-электродного зеркала

Номер электрода	1	2	3	4	5
Амплитуда экспериментальной функции отклика, мкм	1,76 ± 0,11	3,18 ± 0,11	3,3 ± 0,11	3,4 ± 0,11	2,7 ± 0,11
Амплитуда расчетной функции отклика, мкм	1,75 ± 0,11	3,06 ± 0,11	3,15 ± 0,11	3,33 ± 0,11	2,81 ± 0,11
Относительное отклонение, %	5,5 · 10 ⁻²	2,2 · 10 ⁻²	1,3 · 10 ⁻²	3,9 · 10 ⁻²	2,8 · 10 ⁻²

Вариационная формулировка метода конечных элементов (МКЭ-ВФ)

Однако проекционный подход МКЭ не позволяет решить задачу в общем случае при произвольной конфигурации электродов. Его применение ограничивается предположением, что зеркало является тонкой плоской пластиной. Однако в действительности отражающая поверхность зеркала может быть сферической, а также, для удобства закрепления, радиус подложки, как правило, больше радиуса керамики. Кроме того, в аналитической модели зеркала считается, что коэффициенты Пуассона подложки и керамики одинаковы. Однако для широко используемой пьезокерамики РКР-7 и стекла ЛК-105 [9] они составляют 0,34 и 0,17 соответственно. Ни в аналитической модели, ни в МКЭ-ПФ от этих приближений избавиться невозможно.

Разработанная нами численная модель, основанная на МКЭ-ВФ, позволяет учесть все перечисленные выше конструктивные особенности зеркала. Также этот метод является более перспективным, потому что его дальнейшее развитие позволяет избавиться от приближений теории деформации тонких пластин. МКЭ-ВФ – это метод сведения задачи с бесконечным числом неизвестных (смещение зеркала в каждой точке) к уравнениям, связывающим конечное число параметров, приближенно определяющих искомый профиль поверхности зеркала.

В соответствии с методикой конечных элементов [10] исследуемая область разбивается на конечные элементы простой формы, которые, по предположению, взаимодействуют только в ограниченном числе узловых точек. Уравнения, связывающие узловые параметры, получаются из условия равновесия отдельного элемента и принимают вид

$$S^i = R^i Z^i + P^i, \quad (6)$$

где

$$R = \int_V B^T D B dV \cdot Z \quad (7)$$

– матрица реакций элемента;

$$P = - \int_V B^T f dV$$

– вектор реакций элемента; S^i – вектор-столбец сил, возникающих в узлах элемента, если его деформация описывается вектором узловых перемещений Z^i , а на элемент действуют узловые силы, описываемые вектором реакций элемента P^i , возникающие за счет пьезоэлектрических напряжений. Узловые перемещения каждого элемента Z^i связаны с профилем поверхности $z(r, \varphi)$ деформированного элемента следующими соотношениями: $z(r, \varphi) = N(r, \varphi)Z$, где $N(r, \varphi)$ – вектор-строка функций формы, которые приведены в табл. 2 в нормальных координатах L_i , связанных с декартовыми координатами

в плоскости пластины (x, y) следующими соотношениями:

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} k_1 & y_{23} & x_{32} \\ k_1 & y_{23} & x_{32} \\ k_1 & y_{23} & x_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix},$$

$$2A = x_{13}y_{23} - y_{13}x_{23}, \quad k_i = e_{ijk}x_jy_k, \quad x, y_{ij} = x, y_i - x, y_j,$$

где x_i, y_i – координаты вершин элемента, индексы i, j принимают значения от 1 до 3.

Таблица 2

Вектор-строка	Функция формы
N_1	$L_1(1 + L_1L_2 + L_1L_3 - L_2^2 - L_3^2)$
N_2	$-y_{12}(L_1^2L_2 + 0,5L_1L_2L_3) + y_{31}(L_1^2L_3 + 0,5L_1L_2L_3)$
N_3	$-x_{21}(L_1^2L_2 + 0,5L_1L_2L_3) + x_{13}(L_1^2L_3 + 0,5L_1L_2L_3)$
N_4	$L_2(1 + L_2L_3 + L_1L_2 - L_1^2 - L_3^2)$
N_5	$-y_{23}(L_2^2L_3 + 0,5L_1L_2L_3) + y_{12}(L_2^2L_1 + 0,5L_1L_2L_3)$
N_6	$-x_{32}(L_2^2L_3 + 0,5L_1L_2L_3) + x_{21}(L_2^2L_1 + 0,5L_1L_2L_3)$
N_7	$L_3(1 + L_3L_2 + L_3L_1 - L_2^2 - L_1^2)$
N_8	$-y_{31}(L_3^2L_1 + 0,5L_1L_2L_3) + y_{23}(L_3^2L_2 + 0,5L_1L_2L_3)$
N_9	$-x_{31}(L_3^2L_1 + 0,5L_1L_2L_3) + x_{23}(L_3^2L_2 + 0,5L_1L_2L_3)$

Матрица жесткости $B = LN$ в (7) получается дифференцированием функций формы

$$L^T = -z \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right],$$

матрица

$$D = \int_{-\Delta_1}^{\Delta_2} \frac{z^2 E}{1 - \nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{pmatrix} dz,$$

интегрирование ведется по толщине элемента (координата z). Заметим, что параметры материала E, ν могут зависеть от z .

Окончательное уравнение относительно перемещений всех узлов получается из условия равновесия пластины как совокупности элементов. В случае свободной границы из этого условия следует, что в каждом узле действия элементов S^i должны быть взаимоскомпенсированы: $\sum_i S_j^i = 0$,

суммирование ведется по всем элементам, включающим заданный узел j . Описанная процедура была реализована на Matlab 6.0. Для численного моделирования было выбрано гибкое зеркало с конфигурацией электродов, представленных на рис. 1, б. На рис. 3 представлены экспериментальная (а) и расчетная (б) функции отклика электрода, принадлежащего среднему электроду (18-й элемент). Видно, что в целом хорошее соответствие результатов численного счета и экспериментально измеренных функций отклика. Количественное соответствие расчетных и экспериментальных функций отклика подтверждает рис. 4, где представлены

вклады полиномов Цернике в экспериментальную и расчетную функции отклика.

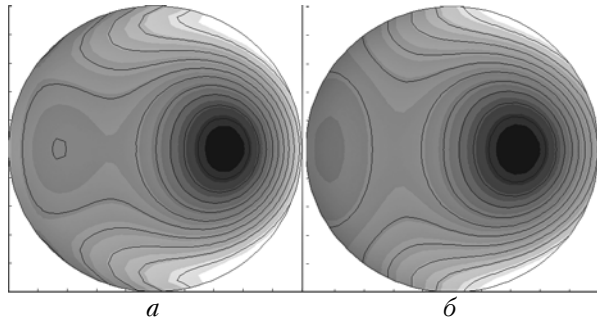


Рис. 3. Экспериментальная функция отклика электрода второго кольца (№ 18) (а); расчетная функция отклика электрода второго кольца (б). Относительное отклонение 7,7%

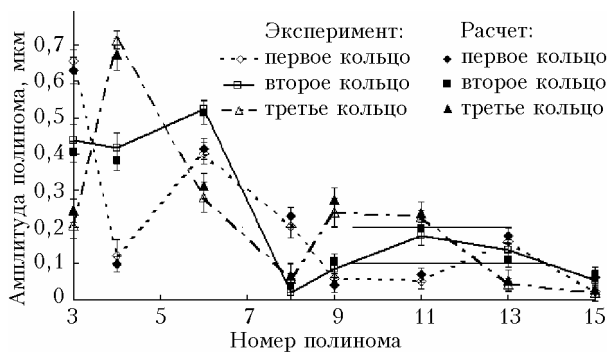


Рис. 4. Сравнение вклада полиномов Цернике в функции отклика каждого кольца электродов

Наклоны вычтены, поэтому нумерация начинается с 3-го полинома. Отличия экспериментальной и расчетной функций отклика (см. рис. 3 и 4) могут объясняться тем, что в реальности закрепление зеркала не является, строго говоря, абсолютно свободным. Более того, мы также не учитывали влияние клея, изменяющего взаимодействие подложки и керамики. Однако, как видно из рис. 4, отличия экспериментальной и расчетной функций отклика находятся в пределах погрешности измерений и расчета, что подтверждает хорошую точность модели.

Заключение

Описаны две численные модели полупассивного зеркала, созданные на основе двух подходов метода конечных элементов, и проведен их сравнительный анализ. Проекционный алгоритм, основан-

ный на решении уравнения, описывающего деформацию тонкой пластины, является простым, компьютерная программа, построенная на его основе, обладает высоким быстродействием, однако он применим только для центральной симметрии. Вариационный подход, основанный на соотношениях для пластины как совокупности конечных элементов, обладает меньшим быстродействием, однако применим для электродов зеркала произвольной формы. Сравнение с экспериментальными результатами показало хорошую точность обеих моделей: отклонение экспериментальных функций отклика от теоретических находится в пределах погрешности измерений. Также в ходе работы получено уточненное выражение для аналитического выражения функции отклика электрода, которое дает не только качественное, но и количественное соответствие экспериментальным данным.

Данная работа выполнена в рамках проекта МНТЦ 2631 «Адаптивная оптическая система для фазовой коррекции лазерных пучков с винтовыми дислокациями волнового фронта».

1. Cherezova T.Yu., Kaptzov L.N., Kudryashov A.V. Cw industrial rod YAG:Nd³⁺ laser with an intracavity bimorph mirror // *Appl. Opt.* 1996. V. 35. N 15. P. 2554–2561.
2. Kudryashov A.V., Samarkin V.V. Control of high power CO₂ laser beam by adaptive optical elements // *Opt. Commun.* 1995. V. 118. N 5. P. 317–322.
3. Kokorovsky S.A. Analysis of adaptive optical elements made from piezoelectric bimorphs // *J. Opt. Soc. Amer.* 1979. V. 69. N 1. P. 181–187.
4. Kudryashov A.V., Shmalhausen V.I. Semipassive bimorph flexible mirror for atmospheric adaptive optics applications // *Opt. Eng.* 1996. V. 35. N 11. P. 3064–3073.
5. Воронцов М.А., Кудряшов А.В., Шмальгаузен В.И. Гибкие зеркала для адаптивных систем атмосферной оптики. Теоретический анализ // *Изв. вузов. Физ.* 1984. Т. 27. № 11. С. 1419–1430.
6. Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1979. 318 с.
7. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979. 392 с.
8. Шмелев В.Е. Partial Differential Equations Toolbox. Инструментарий решения дифференциальных уравнений в частных производных. Электронная версия, <http://www.matlab.ru/pde/book1/index.asp>.
9. Самаркин В.В. Разработка и исследование адаптивных биморфных зеркал для управления излучением промышленных CO₂ и мощных фемтосекундных лазеров: Канд. дис. М., 2002. 159 с.
10. Волков А.С., Бобушев В.Е. Расчет пластин на изгиб методом конечных элементов. Хабаровск, 1996. 67 с.

A.S. Sobolev, T.Yu. Cherezova, A.V. Kudryashov. Analytical and numerical models of a bimorph mirror.

An improved analytical expression of the response function of a deformable semipassive bimorph mirror is presented and compared with the experimentally measured response functions. Two numerical models simulating such a mirror behavior, which are based on two approaches of the finite element method, are presented and compared.