<Оптика атмосферы и океана>, **7**, N 3(1994)

УДК 551. 521.3:535.36

О.И. Алдошина, А.В. Фабриков

ОЦЕНИВАНИЕ КООРДИНАТ ИСТОЧНИКА ПО РЕАЛИЗАЦИЯМ СИГНАЛА, ЗАРЕГИСТРИРОВАННЫМ В 5 ОПОРНЫХ ТОЧКАХ

Рассмотрена задача статистического оценивания, возникающая при вычислении координат источника излучения по данным измерений, проводимых с помощью сетевой спутниковой системы. В расчетные соотношения входят задержки времени прихода сигнала в различные опорные точки системы. Эти величины определяются путем попарного сравнивания зарегистрированных в опорных точках версий (реализаций) сигнала по первому моменту импульсной характеристики адаптивного фильтра, преобразующего с минимальным квадратом ошибки одну версию в другую.

1. Рассматривается задача нахождения трехмерного вектора положения $\mathbf{r}$ источника оптического излучения по данным измерения сигнала в пяти различных точках пространства (будем называть их опорными) с известными векторами положения $\mathbf{r}_i$, $i = 1, ..., 5$. Измерения могут производиться, например, с помощью космических аппаратов (созвездие спутников) в составе спутниковой системы глобального ориентирования [1].

Исходными данными для вычисления координат источника служат относительные времена задержки прихода сигнала в опорные точки τ_{j1}, $j = 2, 3, 4, 5$ и матрица ковариации погрешностей их определения ξ_{j1}

$$R = [r_{kj}]\ ,\quad r_{kj} = E\{(\xi_{k1} - T)\,(\xi_{j1} - T)^*\}\ ;\ j, k = 2, 3, 4, 5\ .$$

Здесь ξ_{j1} – гауссовские случайные величины со средним значением (<смещением синхронизации>) $T = E\{\xi_{j1}\}$; $\tau_{j1} = t_j - t_1$; t_j и t_1 – моменты прихода сигнала в точки j и 1 соответственно; ξ_{j1} ($j = 2, 3, 4, 5$) – это погрешности оценивания сдвигов между слабовозмущенными и, возможно, измененными по масштабу <копиями> сигнала, зарегистрированными в различных точках пространства. Систематическая ошибка, связанная с постоянной составляющей T в составе случайных величин ξ_{j1}, может быть обусловлена, например, выбором одной из этих копий, скажем – первой, за исходную, с которой сравниваются все остальные. Случайные составляющие погрешностей считаем гауссовскими, так как они в большой мере обусловлены не влиянием среды распространения сигнала, а шумами измерителя и фильтра (оценивателя), аппроксимируемыми обычно гауссовскими процессами.

Расчеты производятся с использованием уравнений

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j| - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| = c(\tau_{j1} + \xi_{j1})\ ,\ i = 2, ..., 5\ , \tag{1}$$

вытекающих из геометрического рассмотрения задачи. В приведенных уравнениях

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j| = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2 + (z - z_j)^2}$$

– длина вектора $\mathbf{r} - \mathbf{r}_j$, или расстояние от источника излучения до j-й опорной точки; c – скорость света, путем соответствующего масштабирования приравниваемая в дальнейшем рассмотрении к 1; $E\{\xi\}$ – математическое ожидание (среднее значение) случайной величины ξ.

Вводя обозначения

$$\upsilon = \begin{bmatrix} \tau_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \tau_{51} \end{bmatrix},\quad N = \begin{bmatrix} \xi_{21} - T \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi_{51} - T \end{bmatrix},\quad L(\theta) = \begin{bmatrix} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2| - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| - T \\ \cdot \\ \cdot \\ |\mathbf{r} - \mathbf{r}_5| - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| - T \end{bmatrix}, \tag{2}$$

перепишем (1) в виде

$$\upsilon = L(\theta) + N\,. \tag{3}$$

В уравнении (3) υ – наблюдаемый гауссовский случайный 4-мерный вектор со средним значением $L(\theta)$ и матрицей ковариации R; θ – подлежащий определению вектор параметров

$$\theta = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ T \end{bmatrix}. \tag{4}$$

2. Решение уравнений (2), (3) представляет хорошо известную задачу статистического оценивания [2]. По наблюдаемому в общем случае n-мерному случайному гауссовскому вектору υ с зависящей от θ плотностью распределения вероятностей

$$p(\upsilon \mid \theta) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\ |R|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[R^{-1}(\upsilon - L(\theta)), (\upsilon - L(\theta))\right]\right\}, \tag{5}$$

где $|R|$ – определитель матрицы R; $(\xi, \eta) \equiv \{\xi\eta^*\}$ – скалярное произведение векторов ξ, η в гильбертовом пространстве случайных величин ($*$ – знак эрмитова сопряжения). Требуется определить в общем случае m-мерный вектор параметров θ наилучшим в смысле среднего квадрата ошибки образом. Применительно к спутниковой радионавигации задача рассмотрена в [3].

Для достаточно гладкого отображения $L(\theta)$, обладающего производными всех порядков, минимальная матрица Рао – Крамера (нижняя граница вторых моментов погрешности оценивания

$$P(\theta) = E_\theta\left\{(\hat{\theta} - \theta)\,(\hat{\theta} - \theta)^*\right\}$$

при фиксированном на классе всех возможных линейных оценок $\hat{\theta}$) с учетом формулы (5) и вытекающего из нее равенства

$$\left(\nabla_\theta \log p(\upsilon \mid \theta)\right)^* = G^*(\theta)\,R^{-1}(\upsilon - L(\theta))$$

определяется выражением [3, 4]

$$E\left\{\left(\nabla_\theta \log p(\upsilon \mid \theta)\right)^* \left(\nabla_\theta \log p(\upsilon \mid \theta)\right)\right\} = G^*(\theta)\,R^{-1}\,G(\theta)\,,$$

где

$$R = E\left[(\upsilon - L(\theta))\,(\upsilon - L(\theta))^*\right]$$

и $G(\theta)$ – градиент ($n\times m$ матрица) векторной функции $L(\theta)$:

$$G(\theta) = \nabla_\theta L(\theta)\,. \tag{6}$$

Поскольку $L(\theta)$ – нелинейное отображение, задачу целесообразно <локализовать>, задаваясь некоторым <номинальным> значением θ_0 и оценивая малое возмущение относительно этой величины. Полагая

$$L(\theta) = L(\theta_0) + G(\theta_0)\,(\theta - \theta_0)$$

и вводя новые переменные

$$\tilde{\upsilon} = \upsilon - L(\theta) \text{ и } \tilde{\theta} = \theta - \theta_0\,,$$

линеаризируем задачу, приведя уравнение (3) к виду

$$\upsilon = G(\theta_0)\,\tilde{\theta} + N\,. \tag{7}$$

При гауссовском характере вектора N оценкой наибольшего правдоподобия (ОНП), максимизирующей $p(\upsilon|\theta)$ относительно θ для каждой υ и удовлетворяющей уравнению

$$\nabla_\theta \log p(\upsilon \,|\, \theta) = 0 ,$$

является

$$\tilde{\theta} = \theta_0 + \left(G^*(\theta_0)\, R^{-1}\, G(\theta_0)\right)^{-1} G^*(\theta_0)\, R^{-1} (\upsilon - L(\theta_0)) . \tag{8}$$

Для гауссовских сигналов ОНП совпадает с оценкой по методу наименьших квадратов [5]. Это эффективная несмещенная оценка вектора параметров θ. Матрица ковариации погрешностей для нее совпадает с минимальной матрицей Рао – Крамера и равна

$$P(\theta) = \left(G^*(\theta_0)\, R^{-1}\, G(\theta_0)\right)^{-1} . \tag{9}$$

Если корреляциями между ξ_{j1}, $j = 2, 3, 4, 5$ можно пренебречь, а дисперсии $D\xi_{j1} = \sigma^2$ равны между собой, то

$$R^{-1} = I/\sigma^2 ,$$

где I – единичная матрица размера $n\times n$. Формулы (8), (9) для этого случая упрощаются, принимая вид

$$\hat{\theta} = \theta_0 + \left(G^*(\theta_0)\, G(\theta_0)\right)^{-1} G^*(\theta_0) (\upsilon - L(\theta_0)) , \tag{10}$$

$$P(\theta) = \left(G^*(\theta_0)\, G(\theta_0)\right)^{-1} \sigma^2 . \tag{11}$$

Остается определить матрицу $G(\theta_0)$. Вводя обозначения

$$\theta_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_0 \\ T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_j = \begin{bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{bmatrix},$$

из (6) и (2) получаем

$$G(\theta_0) = (-1) \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & 1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & 1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & 1 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & 1 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \alpha_j &= (x_j - x_0)/a_j - (x_1 - x_0)/a_1 , \\ \beta_j &= (y_j - y_0)/a_j - (y_1 - y_0)/a_1 , \\ \gamma_j &= (z_j - z_0)/a_j - (z_1 - z_0)/a_1 , \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

$$a_j \equiv |\,\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_0\,| , \quad j = 1, ..., 5.$$

Заменяя θ_0 на $\hat{\theta}$, можно повторить процедуру вычислений по приведенным уравнениям для получения лучшей оценки θ. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока $\tilde{\theta}$ не становится настолько малой, что дальнейшие итерации уже не приводят к заметному изменению результатов [5]. Первоначальное значение θ_0 находим путем решения системы 4-х уравнений

$$|\,\mathbf{r} - \mathbf{r}_j\,| - |\,\mathbf{r} - \mathbf{r}_1\,| = \tau_{j1} + T , \quad j = 2, 3, 4, 5 \tag{14}$$

с 4-мя неизвестными x, y, z, T. Уравнения (14) получаются из (1) (при $c = 1$) в пренебрежении малыми $\xi_{j1} - T$.

3. Входящие в расчетные соотношения для $\hat{\theta}$ и $P(\theta)$ величины τ_{j1} и σ^2 определяются по данным измерения сигнала в опорных точках. В радиолокации при известной форме регистрируемого сигнала время его прихода τ определяют по положению $t_{\max}$ наибольшего пика огибающей на выходе квадратичного детектора, стоящего за согласованным фильтром [6]. При этом $\tau = t_{\max} - T'$, где T' – обусловленная фильтром задержка. В рассматриваемом здесь случае оптического сигнала неизвестной формы более удобен другой метод, основанный на сравнении между собой зарегистрированных версий (реализаций) сигнала. Версии сигнала попарно в различных сочетаниях подают (с предварительным сдвигом на некоторую <номинальную> величину задержки T_{ji}) на вход и выход цифрового адаптивного фильтра с перестраивающейся импульсной характеристикой $h_i(n)$, $i = 0, 1, ..., N - 1$ конечной длительности N [7, 8], фиксируя для каждой пары версий вид характеристики на различных отрезках времени регистрации сигнала.

Работа фильтра описывается уравнением свертки

$$\hat{d}(n) = \sum_{i=0}^{N-1} h_i(n)\, x(n-i) = w_N^*(n)\, x_N(n)\ ,$$

где $x(n)$ – подаваемый на вход фильтра, а $\hat{d}(n)$ – вырабатываемый фильтром на выходе сигналы;

$$w_N^*(n) = [\ h_0(n), ..., h_{N-1}(n)]\ ,$$

$$x_N^*(n) = [\ x(n), ..., x(n-N+1)]\ .$$

Оптимальная в смысле наименьшего квадрата ошибки

$$\varepsilon(n) \equiv E[\,|\,d(n) - \hat{d}(n)\,|^2]$$

характеристика фильтра $h_i(n)$ определяется системой <нормальных> уравнений, в матричном представлении записываемых в виде [8]

$$R_{NN}\, w_n = P_N\ ,$$

где $R_{NN} = E\{x_N(n)\, x_N^*(n)\}$ – матрица корреляции входного сигнала; $P_N = E\{d(n)\, x_N(n)\}$ – вектор кросскорреляции. Определив для фильтра, преобразующего i-ю версию сигнала в j-ю, вид функции $h_i(n)$ в зависимости от i при том или ином фиксированном n, задержку τ_{ji} рассчитывают по формуле

$$\tau_{ji} = T_{ji} + \eta_{ji}\ , \tag{15}$$

где η_{ji} – центр тяжести (первый момент) функции $h_m(n)$ и T_{ji} – номинальное (<угаданное>) значение задержки. Дисперсия σ^2 определяется при этом выражением

$$\sigma^2(n) = 2\,\tilde{\sigma}^2 \,/\, |\,x'(n)\,|^2\ , \tag{16}$$

где $\tilde{\sigma}^2(n)$ – дисперсия ошибок измерения; $x'(n)$ – значение производной сигнала $x(t)$ в момент времени $t = nt_0$; t_0 – шаг выборки.

Формулы оценивания τ_{ji} и σ^2 легко интерпретировать, анализируя процесс фильтрации в непрерывном времени. Учитывая малость различия между зарегистрированными версиями сигнала и вытекающую отсюда близость импульсной характеристики фильтра $h(t)$ к дельта-функции Дирака, при описании процесса можно воспользоваться приближенной формулой обращения осуществляемой фильтром операции свертки [9]

$$x(t) \approx \frac{1}{m_0}\left[\hat{d}(t+\eta) - \frac{\zeta^2}{2}\hat{d}''(t+\eta) + ...\right], \tag{17}$$

где $\eta = m_1 / m_2$, $\zeta^2 = m_2 / m_0 - \eta^2$; $m_0 \approx 1$; m_1 и m_2 – моменты функции $m_n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^n h(t)\, dt$ нулевого, первого и второго порядков. Параметр σ^2 при этом находится как дисперсия случайной величины δ в уравнении

$$f_0(t) + \varepsilon_1(t) \approx f_0(t + \delta) + \varepsilon_2(t) \approx f_0(t) + \delta f_0'(t) + \varepsilon_2(t)\,,$$

получаемом из (17) в пренебрежении малыми членами с множителем ξ^2 первой и более высоких степеней при подстановке

$$x(t) = f_0(t) + \varepsilon_1(t)\,,\ \hat{d}(t) \approx d(t) = f_0(t + \delta) + \varepsilon_2(t)\,.$$

Здесь $\varepsilon_1(t)$ и $\varepsilon_2(t)$ – отклонения зарегистрированных версий от истинной формы излучаемого источником сигнала $f_0(t)$, рассматриваемые как независимые случайные величины с нулевым средним и дисперсией $D\,\varepsilon_1 = D\,\varepsilon_2 = \tilde{\sigma}^2$.

4. Систематическая ошибка T мала по сравнению с временами задержки τ_{i1} ($T \ll \tau_{i1}$ для всех i). Поэтому при первоначальной оценке θ по уравнениям (14) номинальное значение T_0 можно принять равным нулю. Из (14) при этом получаем систему трех линейных алгебраических уравнений

$$a_i x + b_i y + c_i z = d_i\,,\quad i = 3, 4, 5 \tag{18}$$

для расчета трех остальных компонентов вектора θ_0. Коэффициенты этих уравнений

$$a_i = x_i - x_1 - \frac{\tau_{i1}}{t_{21}}\,(x_2 - x_1)\,,$$

$$b_i = y_i - y_1 - \frac{\tau_{i1}}{\tau_{21}}\,(y_2 - y_1)\,,$$

$$c_i = z_i - z_1 - \frac{\tau_{i1}}{\tau_{21}}\,(z_2 - z_1)\,,$$

$$d_i = \frac{1}{2}\left[\rho_i^2 - \rho_1^2 - \tau_{i1}^2 - \frac{\tau_{i1}}{\tau_{21}}\,(\rho_2^2 - \rho_1^2 - \tau_{21}^2)\right]$$

при известных $x_\kappa, y_\kappa, z_\kappa$ и $\rho_\kappa^2 = x_\kappa^2 + y_\kappa^2 + z_\kappa^2$ определяются из эксперимента по найденным значениям $\tau_{\kappa 1}$, $\kappa = 2, 3, 4, 5$.

Рассмотрена практически важная задача оптимальной оценки координат изотропного источника импульсного оптического излучения по данным спутниковых наблюдений. Расчетные соотношения приведены для случая, когда регистрация сигнала производится в пяти пространственно разнесенных точках. Определяются три координаты источника x, y, z и систематическая ошибка T оценивания разностей моментов времени прихода сигнала в опорные точки; решение дается прямым методом – путем обращения невырожденной 4×4 матрицы данных с одновременным нахождением матрицы ковариации погрешностей оценивания P, совпадающей с минимальной матрицей Рао – Крамера. При наличии избыточных данных, когда число опорных точек превышает 5, прямой метод оценивания параметров (x, y, z, T) и матрицы ковариации P может быть заменен рекурсивным методом с использованием, например, фильтра Калмана.

Оценивание задержек прихода сигнала в различные опорные точки предлагается производить с помощью адаптивного цифрового фильтра, работающего в режиме идентификации неизвестной системы при подаче на его вход одной из версий сигнала и сравнении выхода с другой версией. Оценкой задержки может служить положение максимума или же положение средней точки импульсного отклика, идентифицирующего систему фильтра. Предлагаемый метод аналогичен известному методу оценивания временных задержек по положению максимума функции взаимной корреляции сравниваемых сигналов [10], но имеет перед известным методом преимущество более резкой выраженности пика на соответствующей кривой.

1. Мищенко И.Н., Волынкин А.И., Волосов П.С. и др. // Зарубежная радиоэлектроника. 1980. N 8. С. 52 – 83.
2. Ван дер Варден Б.Л. Математическая статистика. М.: ИЛ, 1960.
3. Балакришнан А.В. Теория фильтрации Калмана. М.: Мир, 1988.
4. Рао С.Р. Линейные статистические методы и их применения. М.: Наука, 1968.
5. Brandt S. Statistical and Computational Methods in Data Analysis. N.Y.: Elsevier, 1970. P. 151-201.
6. Хелстром К. Статистическая теория обнаружения сигналов. М.: ИЛ, 1963.
7. Фридландер Б. // ТИИЭР. 1982. Т. 70. N 8. С. 54 – 97.
8. Alexander S.T. Adaptive Signal Processing. N. Y.: Springer, 1986.
9. Papoulis A. Signal Analysis. N. Y.: McGraw – Hill Book Co., 1977.
10. Carter G.C. // IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing. 1981. V. ASSP – 29. N 3. P. 463 –470.

Научно-исследовательский институт
оптико-физических измерений,
Москва

Поступила в редакцию
22 февраля 1993 г.

O.I. Aldoshina, A.V. Fabrikov. **Estimation of a Source Coordinates Based on Signals Recorded at n≥5 Reference Points.**

This paper deals with the problem on statistical estimation that arises at calculation of coordinates of a source based on measurement data obtained with a network satellite system. The calculational formulas involve time lags between signals received at different reference points of the system. These time lags are evaluated from revative comparison of signals recorded at reference points based on the first moment of the pulse transient characteristic of an adaptive filter which transforms one signal sample into the another provided that error of transformation is at its minimum.