<Оптика атмосферы и океана>, **8**, N 3 (1995)

УДК 534.222

И.П. Лукин

ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ МЕТОДОВ ПОСТДЕТЕКТОРНОЙ ОБРАБОТКИ ИЗОБРАЖЕНИЙ НЕКОГЕРЕНТНО ОСВЕЩЕННЫХ ОБЪЕКТОВ, НАБЛЮДАЕМЫХ ЧЕРЕЗ ТУРБУЛЕНТНУЮ АТМОСФЕРУ

Проведено теоретическое исследование оптических передаточных функций турбулентной атмосферы и телескопической приемной оптической системы для различных методов постдетекторной обработки изображений некогерентно освещенных объектов, наблюдаемых через турбулентную атмосферу. При аппроксимации функции пропускания приемной линзы гауссоидой получены простые аналитические выражения для оптических передаточных функций турбулентной атмосферы и телескопа.

Рассматривались следующие методы обработки изображений некогерентно освещенных объектов: метод регистрации осредненного изображения («очень длинные» времена усреднения) и методы обработки коротко-экспозиционных изображений («очень короткие» времена усреднения), а именно методы Лабейри, Нокса – Томпсона и тройной корреляции интенсивности изображения. Обсуждаются потенциальные возможности методов и границы областей их применимости при различных условиях распространения оптического излучения в турбулентной атмосфере. Даны оценки влияния конечного значения внутреннего масштаба атмосферной турбулентности на рассматриваемые в статье оптические передаточные функции.

Проблема восстановления искаженных турбулентной атмосферой изображений широко исследуется начиная с 60-х годов. В последнее десятилетие в области обработки изображений произошла техническая революция, обусловленная бурным развитием вычислительной техники. Усовершенствование оптической и электронной элементной базы, снижение ее стоимости, широкое внедрение микро- и мини- ЭВМ и соответствующего периферийного оборудования позволили поставить вопрос о проведении анализа и обработки изображений на ЭВМ и в оптико-цифровых системах в реальном масштабе времени.

Обработкой искаженных изображений приходится заниматься практически во всех диапазонах электромагнитных волн: радио- (радиолокация и радиометрия), оптическом (классическая оптика и наблюдательная астрономия, инфракрасное тепловидение), рентгеновском (рентгеновская астрономия, рентгенография). В целом восстановление искаженных изображений – научное направление по разработке методов и средств компенсации искажений, вносимых в изображения в процессе их формирования различными системами. В частности, имеется возможность вводить компенсационное воздействие как до регистрации изображения (адаптивная оптика), так и после того как изображение будет зарегистрировано (постдетекторная обработка изображения). Искажения оптических изображений возникают не только вследствие несовершенства регистрирующей аппаратуры (например, аберрации приемной оптики), но и из-за оптической неоднородности среды распространения (например, турбулентность атмосферы). При этом аберрации оптических систем приводят к дефокусировке и геометрическим искажениям, атмосферная турбулентность в оптической наблюдательной астрономии более чем на порядок ухудшает разрешение получаемых изображений.

Известно [1 – 2], что случайные изменения диэлектрической проницаемости воздуха вызывают появление флуктуаций параметров оптических волн при распространении в турбулентной атмосфере. С наличием этих флуктуаций связано возникновение флуктуаций освещенности в пространстве изображения приемной оптической системы. Совместное действие атмосферы и приемной оптической системы в большинстве случаев можно рассматривать как случайную линейную фильтрацию. В этом случае для характеристики комплекса «атмосфера – приемная оптическая система» достаточно использовать оптическую передаточную функцию (ОПФ) [3]. Оптическая передаточная функция определяется как Фурье-преобразование распределения интенсивности в пространстве изображения приемной оптической системы, создаваемого точечным источником, находящимся в пространстве предмета. В настоящей статье приведены результаты теоретического исследования оптических передаточных функций турбулентной атмосферы и телескопической приемной оптической системы для различных методов постдетекторной обработки изображений некогерентно освещенных объектов, наблюдаемых через турбулентную атмосферу, а именно: метода регистрации осредненного изображения и методов обработки короткоэкспозиционных изображений (метода Лабейри, Нокса – Томпсона и тройной корреляции интенсивности изображения).

Поле оптической волны за приемной фокусирующей линзой в плоскости резкого изображения можно записать при помощи метода Гюйгенса – Кирхгофа [4]:

$$U_g(\rho, t) = \frac{k \exp\left(i\,k\,F + \dfrac{i\,k}{2\,F}\rho^2\right)}{2\pi\, i\, F} \int\!\!\int_{-\infty}^{\infty} d\rho'\, U(\rho', t)\, K(\rho') \exp\left\{-\frac{i\,k}{F}\,\rho\,\rho'\right\}, \tag{1}$$

где $U(\rho', t)$ – поле оптической волны, падающей на входную апертуру приемной системы; $K(\rho)$ – функция пропускания оптической приемной системы; F – фокусное расстояние приемной линзы; $k = 2\pi/\lambda$, λ – длина волны оптического излучения в вакууме; ρ' и ρ – поперечные координаты соответственно на входной апертуре и в плоскости резкого изображения приемной линзы; t – время. Используя (1), интенсивность оптической волны в фокальной плоскости телескопа запишем следующим образом:

$$I_g(\rho, t) = U_g(\rho, t)\, U_g^*(\rho, t) =$$

$$= \frac{k^2}{4\pi^2 F^2} \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{\infty} d\rho'\, d\rho''\, U(\rho', t)\, U^*(\rho'', t)\, K(\rho')\, K^*(\rho'') \exp\left\{-\frac{i\,k}{F}\,\rho\,(\rho' - \rho'')\right\}. \tag{2}$$

Так как «мгновенное» значение оптической передаточной функции оптической системы – Фурье-преобразование случайной реализации интенсивности в плоскости резкого изображения этой системы, то из (2) получим

$$M(\mathbf{p}, t) = \int\!\!\int_{-\infty}^{\infty} d\rho\, I_g(\rho, t) \exp\left\{-\frac{i\,k}{F}\,\mathbf{p}\,\rho\right\}, \tag{3}$$

где $M(\mathbf{p}, t)$ – оптическая передаточная функция оптической системы; $\mathbf{p}$ – пространственный масштаб. Подставив в (3) выражение из (2), после выполнения интегрирования по ρ и ρ'' получим следующее выражение, определяющее оптическую передаточную функцию оптической системы [5]:

$$M(\mathbf{p}, t) = \int\!\!\int_{-\infty}^{\infty} d\rho'\, U(\rho', t)\, U^*(\rho' + \mathbf{p}, t)\, K(\rho')\, K^*(\rho' + \mathbf{p}). \tag{4}$$

Поскольку поле оптической волны $U(\rho, t)$ является случайным (из-за флуктуаций диэлектрической проницаемости воздуха турбулентной атмосферы), то и «мгновенное» значение оптической передаточной функции $M(\mathbf{p}, t)$ (4) будет случайной величиной, быстро изменяющейся во времени. Если регистрировать изображение объекта в течение времени «замороженности» атмосферной турбулентности, т. е. за время $\sim 10^{-3}$ с, то практически можно считать, что каждое зарегистрированное изображение представляет собой случайную реализацию распределения интенсивности.

В случае регистрации осредненного изображения («очень длинные» экспозиции), что соответствует временам осреднения, много большим времени «замороженности» атмосферной турбулентности (время экспозиции ~10...100 с), оптическая передаточная функция турбулентной атмосферы и приемной оптической системы может быть записана следующим образом:

$$\langle M(\mathbf{p})\rangle = \lim_{\tau\to\infty} \int_0^{\tau} d\,t\, M(\mathbf{p}, t) = \int\!\!\int_{-\infty}^{\infty} d\rho'\, \langle U(\rho', t)\, U^*(\rho' + \mathbf{p}, t)\rangle\, K(\rho')\, K^*(\rho' + \mathbf{p}), \tag{5}$$

где τ – время осреднения (экспозиции); $\Gamma_2(\rho', \rho' + \mathbf{p}; t, t) = \langle U(\rho', t)\, U^*(\rho' + \mathbf{p}, t)\rangle$ – функция взаимной когерентности второго порядка падающей оптической волны.

Пусть падающую оптическую волну можно считать плоской (например, излучение от звезды), тогда

$$U(\rho, t) = U_0 \exp\{\psi(\rho, t)\},$$

где U_0 – амплитуда падающей оптической волны; $\psi(\rho, t) = \chi(\rho, t) + i\,S(\rho, t)$ – флуктуации комплексной фазы оптической волны; $\chi(\rho, t)$ и $S(\rho, t)$ – соответственно флуктуации логарифма амплитуды и фазы оптической волны. Так как хорошо известно [4], что $\chi(\rho, t)$ и $S(\rho, t)$ в области слабых флуктуаций интенсивности оптического излучения, распространяющегося в турбулентной атмосфере, имеют нормальные законы распределения вероятностей, то

$$\Gamma_2(\rho_1, \rho_2; t_1, t_2) = U_0^2 \exp\{-\frac{1}{2} D(\rho_1 - \rho_2, t_1 - t_2)\}, \tag{6}$$

где $D(\rho, t)$ – пространственно-временная структурная функция флуктуаций комплексной фазы плоской оптической волны [4]. Подставив (6) в (5), получим оптическую передаточную функцию турбулентной атмосферы и приемной оптической системы при «очень длинных» экспозициях

$$<M(\mathbf{p})> = M_{\text{атм}}(\mathbf{p})\, M_{\text{линзы}}(\mathbf{p}),$$

где $M_{\text{атм}}(\mathbf{p}) = \Gamma_2(\mathbf{p})$ – оптическая передаточная функция турбулентной атмосферы; $M_{\text{линзы}}(\mathbf{p}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\!\!\int d\rho\, K(\rho)\, K^*(\rho + \mathbf{p})$ – оптическая передаточная функция приемной оптической системы, т.е., как хорошо известно [1], в этом случае вклады атмосферной турбулентности и оптической приемной системы факторизуются. Пространственная структурная функция флуктуаций комплексной фазы плоской оптической волны, распространяющейся в турбулентной атмосфере, имеет следующий функциональный вид [4]:

$$D(\rho) \simeq \begin{cases} 0{,}45\, k^2\, C_\varepsilon^2\, L\, \mathrm{k}_m^{1/3}\, \rho^2 & \text{при } \rho \ll l_0, \\ 0{,}73\, k^2\, C_\varepsilon^2\, L\, \rho^{5/3} & \text{при } l_0 \ll \rho \ll L_0, \end{cases}$$

где C_ε^2 – приземное значение структурного параметра флуктуаций диэлектрической проницаемости турбулентной атмосферы; $L = C_\varepsilon^{-2} \int\limits_0^\infty dx\, C_\varepsilon^2(x, \theta)$ – эффективная толща оптически активного слоя атмосферной турбулентности; $C_\varepsilon^2(x, \theta)$ – высотный профиль структурного параметра флуктуаций диэлектрической проницаемости турбулентной атмосферы, зависящий от зенитного угла θ ($\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$); $\kappa_m = 5{,}92/l_0$, l_0 – внутренний масштаб атмосферной турбулентности; L_0 – внешний масштаб атмосферной турбулентности.

Таким образом, нормированная передаточная функция турбулентной атмосферы и телескопа при наблюдении осредненного изображения может быть представлена в следующем виде:

$$\tau_1(\mathbf{p}) = <M(\mathbf{p})> / <M(0)> = \frac{M_{\text{линзы}}(\mathbf{p})}{M_{\text{линзы}}(0)} \exp\{-\frac{1}{2} D(p)\} = \frac{M_{\text{линзы}}(\mathbf{p})}{M_{\text{линзы}}(0)} \exp\left\{-\left(\frac{p}{\rho_c}\right)^\gamma\right\}, \tag{7}$$

где

$$\gamma = \begin{cases} 2 & \text{при } p \ll l_0, \\ 5/3 & \text{при } p \gg l_0; \end{cases} \qquad \rho_c = \begin{cases} \rho_m & \text{при } p \ll l_0, \\ \rho_0 & \text{при } p \gg l_0; \end{cases}$$

ρ_c – радиус когерентности плоской оптической волны в турбулентной атмосфере, а $\rho_m = (0{,}225\, k^2\, C_e^2\, L\, \kappa_m^{1/3})^{-1/2}$ и $\rho_0 = (0{,}365\, k^2\, C_\varepsilon^2\, L)^{-3/5}$ – соответственно значения радиуса когерентности плоской волны при $D(l_0) \gg 1$ и $D(l_0) \ll 1$, что соответствует случаю $l_0 \gg \rho_c$ и $l_0 \ll \rho_c$.

Поскольку характерный масштаб изменения оптической передаточной функции $M_{\text{линзы}}(\rho)$ определяется радиусом приемной оптической системы (R), то можно выделить два случая:

1) когда радиус приемной оптической системы меньше радиуса когерентности оптической волны ($R \ll \rho_c$):

$$\tau_1(\mathbf{p}) \simeq \frac{M_{\text{линзы}}(\mathbf{p})}{M_{\text{линзы}}(0)} \left\{ 1 - \left(\frac{p}{\rho_c} \right)^{\gamma} \right\}, \tag{8}$$

2) когда радиус приемной оптической системы больше радиуса когерентности оптической волны ($R \gg \rho_c$):

$$\tau_1(\mathbf{p}) \simeq \exp \left\{ - \left(\frac{p}{\rho_c} \right)^{\gamma} \right\}. \tag{9}$$

Наблюдение неосредненного изображения («очень короткие» экспозиции) осуществляется при регистрации его за время, меньшее времени «замороженности» среды ($\sim 10^{-3}$ с). Для устранения искажающего влияния случайных неоднородностей турбулентной атмосферы используются различные методы обработки короткоэкспозиционных изображений: метод Лабейри [6], метод Нокса – Томпсона [7] или метод тройной корреляции интенсивности изображения [8 – 10]. Если при «очень длинных» экспозициях измеряется распределение средней интенсивности поля в фокальной плоскости телескопической оптической системы, то при использовании методов обработки короткоэкспозиционных изображений регистрируются статистические характеристики флуктуаций интенсивности оптического изображения. В методе Лабейри – это дисперсия Фурье-спектра интенсивности, Нокса – Томпсона – автокорреляция Фурье-спектра интенсивности, а в методе тройной корреляции интенсивности – третий момент интенсивности изображения при специальном выборе точек наблюдения. Последовательно рассмотрим все эти методы, начав с метода Лабейри. Оптическая передаточная функция метода Лабейри определяется через второй момент «мгновенной» оптической передаточной функции турбулентной атмосферы и телескопической системы (4)

$$\tau_2(\mathbf{p}) = \langle M(\mathbf{p}, t)\, M^*(\mathbf{p}, t) \rangle \, / \, \langle M(0) \rangle^2, \tag{10}$$

где

$$\langle M(\mathbf{p}, t)\, M^*(\mathbf{p}, t) \rangle =$$

$$= \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{\infty} d\rho'\, d\rho'' \langle U(\rho', t)\, U^*(\rho' + \mathbf{p}, t)\, U^*(\rho'', t)\, U(\rho'' + \mathbf{p}, t) \rangle\, K(\rho')\, K^*(\rho' + \mathbf{p})\, K^*(\rho'')\, K(\rho'' + \mathbf{p})$$

– второй момент «мгновенной» оптической передаточной функции турбулентной атмосферы и телескопа. Делая те же самые предположения, как и ранее при получении функции взаимной когерентности второго порядка, и считая, что $\langle \chi^2(\rho, t) \rangle \ll 1$ (условие хорошо выполняется в плоской волне для трасс, пронизывающих всю толщу атмосферы Земли с зенитными углами $\theta \le 80^\circ$), получим

$$\langle U(\rho', t)\, U^*(\rho' + \mathbf{p}, t)\, U^*(\rho'', t)\, U(\rho'' + \mathbf{p}, t) \rangle \,|\, U_0^4 \exp \{ - D(\mathbf{p}) + \frac{1}{2} D(\rho' - \rho'' - \mathbf{p}) +$$

$$+ \frac{1}{2} D(\rho' - \rho'' + \mathbf{p}) - D(\rho' - \rho'') \}. \tag{11}$$

Анализ выражений (10), (11) показывает, что для дальнейшего рассмотрения требуется задать конкретный вид функции пропускания оптической приемной системы $K(\rho)$. Пусть флуктуирующая волна падает на круглый объектив площадью $S = \pi R^2$, где R – радиус приемной апертуры. Как показано в [4], в этом случае хорошей аппроксимацией функции пропускания приемной апертуры является квадратичная экспонента. Этот факт, а также то, что для целей улучшения качества изображения часто используют фильтры аподизации [11], позволяет выбрать функцию пропускания приемной апертуры в виде

$$K(\rho) = K_0 \exp\left\{-\frac{\rho^2}{2R^2}\right\}, \tag{12}$$

где K_0 – амплитудное пропускание телескопа на оптической оси системы. В этом случае нормирующий множитель в выражении (10) равен $\langle M(0)\rangle = \pi\, U_0^2 K_0^2 R^2$, а $\tau_2(0) = 1$. После элементарных преобразований из (10) с использованием (11) и (12) можно получить более простое выражение для оптической передаточной функции метода Лабейри

$$\tau_2(\mathbf{p}) = \frac{1}{2\pi R^2} \exp\left\{-\frac{p^2}{2R^2}\right\} \int\!\!\int_{-\infty}^{\infty} d\rho' \exp\left\{-\frac{(\rho')^2}{2R^2} - D(\mathbf{p}) - D(\rho') + \frac{1}{2}D(\rho' - \mathbf{p}) + \frac{1}{2}D(\rho' + \mathbf{p})\right\}. \tag{13}$$

Асимптотический анализ выражения (13), проведенный путем разложения подынтегральной экспоненты в ряд и вычисления интеграла по ρ', дает следующие результаты. Для приемных апертур с радиусом меньше радиуса когерентности падающей оптической волны ($R \ll \rho_c$) могут реализоваться две ситуации: $R \ll l_0$ и $R \gg l_0$. Поскольку максимальные значения внутреннего масштаба атмосферной турбулентности составляют 1...2 см, то случай приемных апертур, удовлетворяющих условию $R \ll l_0$ относится к разряду экзотических. При этих условиях оптическая передаточная функция метода Лабейри равна:

$$\tau_2(\mathbf{p}) \simeq \begin{cases} \tau_0^2(\mathbf{p}) \left\{1 - \frac{1}{6}(\kappa_m R)^2 (p/\rho_m)^2\right\} & \text{при } p \ll l_0, \\ 0 & \text{при } p \gg l_0, \end{cases}$$

где $\tau_0(\mathbf{p}) = \exp[-p^2/(4R^2)]$ – нормированная оптическая передаточная функция телескопа для функции пропускания входного зрачка (12). Сравнение полученного выражения с (8) показывает, что для малых апертур удается практически полностью устранить искажения изображения, вносимые атмосферной турбулентностью. Больший практический интерес представляет случай приемных апертур, больших по сравнению с внутренним масштабом атмосферной турбулентности ($R \gg l_0$), когда при $p \ll l_0$

$$\tau_2(\mathbf{p}) \simeq \tau_0^2(\mathbf{p})\,\{1 - 2(p/\rho_m)^2\},$$

а при $l_0 \ll p \ll R$

$$\tau_2(\mathbf{p}) \simeq \tau_0^2(\mathbf{p})\,\{1 - 2(p/\rho_0)^{5/3}\,[1 - \alpha(p/R)^{1/3}]\},$$

где $\alpha = 0{,}70$.

Поведение оптических передаточных функций при $p \gg R$ здесь и в дальнейшем не рассматривается, так как оно не имеет практического значения. Для приемных апертур, радиус которых больше радиуса когерентности принимаемой оптической волны ($R \gg \rho_c$), можно также рассмотреть два случая: $\rho_c \ll R \ll l_0$ и $R \gg l_0$. В первом из них при $p \ll l_0$

$$\tau_2(\mathbf{p}) \simeq \tau_0^2(\mathbf{p}) \left\{\exp\left[-2\left(\frac{p}{\rho_m}\right)^2\right]\left[1 + 2\left(\frac{p}{\rho_m}\right)^2\right] + \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_m}{R}\right)^2\right\},$$

т.е. так же, как и при $R \ll l_0$, $R \ll \rho_c$, отмечается повышение разрешающей способности телескопа в атмосфере для всей области пространственных масштабов, регистрируемых данными апертурами, по сравнению с наблюдением распределения средней интенсивности изображения (9). Для приемных апертур с $R \gg l_0$, в свою очередь, в зависимости от соотношения величины внутреннего масштаба атмосферной турбулентности и радиуса когерентности плоской оптической волны в турбулентной атмосфере выделяются две ситуации:

1) когда $l_0 \gg \rho_c$, то при $p \ll l_0$

$$\tau_2(\mathbf{p}) \simeq \tau_0^2(\mathbf{p}) \exp\left[-2\left(\frac{p}{\rho_m}\right)^2\right],$$

а при $l_0 \ll p \ll R$

$$\tau_2(\mathbf{p}) \simeq \tau_0^2(\mathbf{p}) \left\{ \exp\left[-2 \left(\frac{p}{\rho_0} \right)^{5/3} \right] \left[1 + 2\alpha \left(\frac{p}{\rho_0} \right)^{5/3} \left(\frac{p}{R} \right)^{1/3} \right] + \frac{1}{4} (\rho_m / R)^2 \right\},$$

2) когда $l_0 \ll \rho_c$, то при $p \ll l_0$

$$\tau_2(\mathbf{p}) \simeq \tau_0^2(\mathbf{p}) \left\{ 1 - 2 \left(\frac{p}{\rho_m} \right)^2 \right\},$$

при $l_0 \ll p \ll \rho_c$

$$\tau_2(\mathbf{p}) \simeq \tau_0^2(\mathbf{p}) \left\{ 1 - 2 \left(\frac{p}{\rho_0} \right)^{5/3} [1 - \alpha(p / R)^{1/3}] \right\},$$

при $\rho_c \ll p \ll R$

$$\tau_2(\mathbf{p}) \simeq \tau_0^2(\mathbf{p}) \left\{ \exp\left[-2 \left(\frac{p}{\rho_0} \right)^{5/3} \right] \left[1 + 2\alpha \left(\frac{p}{\rho_0} \right)^{5/3} \left(\frac{p}{R} \right)^{1/3} \right] + 2^{-11/5} (\rho_0 / R)^2 \right\}.$$

Таким образом, обработка серии короткоэкспозиционных изображений методом Лабейри позволяет устранить часть искажений изображения, вносимых атмосферной турбулентностью, по сравнению с регистрацией осредненного изображения (8), (9). Причем выигрыш тем значительнее, чем выше уровень турбулентных флуктуаций. Особенно существенно улучшение, отмечаемое при приеме на малые апертуры ($R < l_0$) и для больших пространственных масштабов в случае больших приемных апертур ($p > \rho_c$ при $R > l_0$, $R > \rho_c$). Разрешение мелких масштабов ($p < l_0$) для больших апертур ($R > l_0$) при обработке по методу Лабейри не выше, чем при регистрации усредненного изображения.

В методе Лабейри измеряется модуль спектра интенсивности регистрируемого изображения, что не позволяет, пусть даже в принципе, точно восстанавливать исходное изображение. В то время как точное знание одной только фазы спектра интенсивности изображения позволяет полностью восстановить исходное изображение. По известным значениям фазы спектра интенсивности возможно восстановление значения модуля спектра интенсивности изображения. Методы Нокса – Томпсона и тройной корреляции интенсивности позволяют измерить как модуль, так и фазу спектра регистрируемого изображения.

При обработке изображения по методу Нокса – Томпсона оптическая передаточная функция рассматриваемой оптической системы равна

$$\tau_3(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \langle M(\mathbf{p}_1, t)\, M^*(\mathbf{p}_2, t) \rangle / \langle M(0) \rangle^2, \tag{14}$$

где

$$\langle M(\mathbf{p}_1, t)\, M^*(\mathbf{p}_2, t) \rangle = \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{\infty} d\rho'\, d\rho'' \langle U(\rho', t)\, U^*(\rho' + \mathbf{p}_1, t)\, U^*(\rho'', t)\, U(\rho'' + \mathbf{p}_2, t) \rangle \times$$
$$\times K(\rho')\, K^*(\rho' + \mathbf{p}_1)\, K^*(\rho'')\, K(\rho'' + \mathbf{p}_2)$$

– корреляционная функция <мгновенной> оптической передаточной функции турбулентной атмосферы и телескопа (4). Записав четвертый момент поля плоской волны в приближении, которое использовалось при анализе рассмотренных выше методов, подставив в (14) выражение (12) для функции $K(\rho)$ и проведя интегрирование по одной из переменных, получим, что оптическая передаточная функция метода Нокса – Томпсона имеет следующий вид:

$$\tau_3(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \frac{1}{2\pi R^2} \exp\left\{ -\frac{3\, p_1^2 + 3\, p_2^2 - 2\, \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}{8\, R^2} \right\} \int\!\!\int_{-\infty}^{\infty} d\rho \exp\left\{ -\frac{\rho^2}{2\, R^2} - \frac{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)\rho}{2\, R^2} - \right.$$

$$-\frac{1}{2}D(\mathbf{p}_1)-\frac{1}{2}D(\mathbf{p}_2)-\frac{1}{2}D(\rho)-\frac{1}{2}D(\rho+\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)+\frac{1}{2}D(\rho-\mathbf{p}_2)+\frac{1}{2}D(\mathbf{r}+\mathbf{p}_1)\Big\}. \tag{15}$$

Проведя асимптотический анализ выражения (15) стандартным методом вычисления многократных интегралов [4], можно показать, что для малых приемных апертур с $R \ll l_0$, $R \ll \rho_c$ при $\{ p_1, p_2\} \ll l_0$

$$\tau_3(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \simeq \tau_0(\mathbf{p}_1)\, \tau_0(\mathbf{p}_2) \left\{1-\left(\frac{|\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2|}{\rho_m}\right)^2\right\},$$

и для $\rho_c \ll R \ll l_0$ при $\{ p_1, p_2\} \ll l_0$

$$\tau_3(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \simeq \tau_0(\mathbf{p}_1)\, \tau_0(\mathbf{p}_2) \left\{\exp\left[-\left(\frac{p_1}{\rho_m}\right)^2-\left(\frac{p_2}{\rho_m}\right)^2\right]\left[1+2\,\frac{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}{\rho_m^2}\right]+\frac{1}{4}\left(\frac{\rho_m}{R}\right)^2\exp\left[-\left(\frac{|\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2|}{\rho_m}\right)^2\right]\right\}.$$

Для телескопов с радиусом апертуры больше внутреннего масштаба атмосферной турбулентности, но меньше радиуса когерентности плоской волны в турбулентной атмосфере при $|\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2| \ll l_0$

$$\tau_3(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \simeq \tau_0(\mathbf{p}_1)\, \tau_0(\mathbf{p}_2) \left\{1-\left(\frac{p_1}{\rho_m}\right)^2-\left(\frac{p_2}{\rho_m}\right)^2+2^{7/6}\,(\kappa_m R)^{-1/3}\,\frac{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}{\rho_m^2}\right\}, \tag{16}$$

а при $l_0 \ll |\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2| \ll R$

$$\tau_3(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2)\simeq\tau_0(\mathbf{p}_1)\tau_0(\mathbf{p}_2)\left\{1-\left(\frac{p_1}{\rho_0}\right)^{5/3}\left[1-\alpha\left(\frac{p_1}{R}\right)^{1/3}\right]-\left(\frac{p_2}{\rho_0}\right)^{5/3}\left[1-\alpha\left(\frac{p_2}{R}\right)^{1/3}\right]-\alpha\left(\frac{|\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2|}{\rho_0}\right)^{5/3}\left(\frac{|\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2|}{R}\right)^{1/3}\right\}. \tag{17}$$

Если радиус приемной апертуры телескопа больше радиуса когерентности плоской волны, то при $|\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2| \ll l_0$ оптическая передаточная функция метода Нокса – Томпсона описывается выражением (16), а при $l_0 \ll |\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2| \ll \rho_c$ – (17). Для $R \gg |\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2| \gg \rho_c$ имеет место следующая асимптотическая зависимость

$$\tau_3(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \simeq \tau_0(\mathbf{p}_1)\, \tau_0(\mathbf{p}_2) \left\{\exp\left[-\left(\frac{p_1}{\rho_0}\right)^{5/3}-\left(\frac{p_2}{\rho_0}\right)^{5/3}\right]\left[1+2\alpha\,\frac{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}{\rho_0^{5/3}R^{1/3}}\right]+2^{-11/5}\left(\frac{\rho_0}{R}\right)^2\exp\left[-\frac{(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)^2}{\rho_0^2}\right]\right\}. \tag{18}$$

Естественно, что при $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2$ оптические передаточные функции методов Нокса – Томпсона и Лабейри тождественно совпадают, т. е. эти методы эквивалентны с точки зрения измерения модуля спектра интенсивности регистрируемого изображения. Как следует из (16) – (18), если характерный линейный масштаб $\tau_3(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ по разности аргументов $|\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2|$ равен радиусу когерентности плоской волны, то однозначную информацию о фазе спектра интенсивности изображения можно получить лишь в пределах спекла. Проблема «сшивания» фазы спектра изображения между соседними спеклами в рамках данного метода остается нерешенной. Из (17) и (18) видно также, что поскольку в процессе обработки короткоэкспозиционных изображений компенсируются наклоны волнового фронта на площадках, больших или сравнимых с размером приемной апертуры, то это приводит к заметному улучшению качества изображения в масштабах спекла.

Наконец, рассмотрим метод тройной корреляции интенсивности. Его оптическая передаточная функция определяется через третий момент «мгновенной» оптической передаточной функции турбулентной атмосферы и телескопа (4) в точках $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, и $-\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2$:

$$\tau_4(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \langle M(\mathbf{p}_1, t)\, M(\mathbf{p}_2, t)\, M(-\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2, t)\rangle / \langle M(0)\rangle^3, \tag{19}$$

где

$$<M(\mathbf{p}_1, t)\, M(\mathbf{p}_2, t)\, M(-\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2, t)> = \int\int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\int\int d\rho'\, d\rho''\, d\rho'''\, <U(\rho', t)\, U^*(\rho'+\mathbf{p}_1, t) \times U(\rho'', t) \times$$

$$\times\, U^*(\rho''+\mathbf{p}_2, t)\, U(\rho''', t)\, U^*(\rho'''-\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2, t)> K(\rho')\, K^*(\rho'+\mathbf{p}_1)\, K(\rho'')\, K^*(\rho''+\mathbf{p}_2)\, K(\rho''')\, K^*(\rho'''-\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2).$$

Здесь

$$<U(\rho', t)\, U^*(\rho'+\mathbf{p}_1, t)\, U(\rho'', t)\, U^*(\rho''+\mathbf{p}_2, t)\, U(\rho''', t)\, U^*(\rho'''-\mathbf{p}_1-\boldsymbol{p}_2, t)> \simeq$$

$$\simeq U_0^6 \exp\left\{-\frac{1}{2}D(\mathbf{p}_1)-\frac{1}{2}D(\mathbf{p}_2)-\frac{1}{2}D(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2)+\frac{1}{2}D(\rho'-\rho'')+\frac{1}{2}D(\rho'-\rho''')+\right.$$

$$+\frac{1}{2}D(\rho''-\rho''')-\frac{1}{2}D(\rho'-\rho''+\mathbf{p}_1)-\frac{1}{2}D(\rho'-\rho''-\mathbf{p}_2)+\frac{1}{2}D(\rho'-\rho''+\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)-$$

$$-\frac{1}{2}D(\rho'-\rho'''+\mathbf{p}_1)-\frac{1}{2}D(\rho'-\rho'''+\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2)+\frac{1}{2}D(\rho'-\rho'''+2\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2)-$$

$$\left.-\frac{1}{2}D(\rho''-\rho'''+\mathbf{p}_2)-\frac{1}{2}D(\rho''-\rho'''+\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2)+\frac{1}{2}D(\rho''-\rho'''+\mathbf{p}_1+2\,\mathbf{p}_2)\right\}$$

– шестой момент поля плоской волны, полученный в приближении, используемом в данной работе для описания моментов поля оптической волны, распространяющейся в турбулентной атмосфере. Из выражения (19) следует, что для малых по сравнению с внутренним масштабом атмосферной турбулентности приемных апертур для $\{p_1, p_2\} \ll l_0$ при $R \ll \rho_c$

$$\tau_4(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \simeq \tau_0(\mathbf{p}_1)\, \tau_0(\mathbf{p}_2)\, \tau_0(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2)\, \left\{1-\frac{1}{12}(\kappa_m R)^2\left[\left(\frac{p_1}{\rho_m}\right)^2+\left(\frac{p_2}{\rho_m}\right)^2+\left(\frac{|\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2|}{\rho_m}\right)^2\right]\right\},$$

а при $R \gg \rho_c$

$$\tau_4(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \simeq \tau_0(\mathbf{p}_1)\, \tau_0(\mathbf{p}_2)\, \tau_0(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2)\left\{\exp\left[-\left(\frac{p_1}{\rho_m}\right)^2-\left(\frac{p_2}{\rho_m}\right)^2-\left(\frac{|\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2|}{\rho_m}\right)^2\right]\left[1+2\,\frac{p_1^2+\mathbf{p}_1\,\mathbf{p}_2+p_2^2}{\rho_m^2}\right]+\frac{1}{4}\left(\frac{\rho_m}{R}\right)^2\times\right.$$

$$\left.\times\left[\exp\left(-2\,\frac{p_1^2}{\rho_m^2}\right)+\exp\left(-2\,\frac{p_2^2}{\rho_m^2}\right)+\exp\left(-2\,\frac{|\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2|^2}{\rho_m^2}\right)\right]\right\}.$$

Если радиус приемной апертуры меньше радиуса когерентности плоской волны в турбулентной атмосфере, но больше внутреннего масштаба атмосферной турбулентности ($l_0 \ll R \ll \rho_c$), то при $\{p_1, p_2\} \ll l_0$

$$\tau_4(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \simeq \tau_0(\mathbf{p}_1)\, \tau_0(\mathbf{p}_2)\, \tau_0(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2)\left\{1-\left(\frac{p_1}{\rho_m}\right)^2-\left(\frac{p_2}{\rho_m}\right)^2-\left(\frac{|\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2|}{\rho_m}\right)^2\right\}, \tag{20}$$

а при $l_0 \ll \{p_1, p_2\} \ll R$

$$\tau_4(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \simeq \tau_0(\mathbf{p}_1)\, \tau_0(\mathbf{p}_2)\, \tau_0(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2)\left\{1-\left(\frac{p_1}{\rho_0}\right)^{5/3}\left[1-\alpha\left(\frac{p_1}{R}\right)^{1/3}\right]-\left(\frac{p_2}{\rho_0}\right)^{5/3}\left[1-\alpha\left(\frac{p_2}{R}\right)^{1/3}\right]-\left(\frac{|\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2|}{\rho_0}\right)^{5/3}\times\right.$$

$$\left.\times\left[1-\alpha\left(\frac{|\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2|}{R}\right)^{1/3}\right]\right\}. \tag{21}$$

Для телескопов с большим радиусом входной апертуры ($R \gg \rho_c$) при $\{p_1, p_2\} \ll l_0$ применима формула (20), при $l_0 \ll \{p_1, p_2\} \ll \rho_c$ – (21), а при $\rho_c \ll \{p_1, p_2\} \ll R$ оптическая передаточная функция метода тройной корреляции интенсивности имеет следующий вид:

$$\tau_4(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2)\simeq\tau_0(\mathbf{p}_1)\,\tau_0(\mathbf{p}_2)\,\tau_0(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2)\left\{\exp\left[-\left(\frac{p_1}{\rho_0}\right)^{5/3}-\left(\frac{p_2}{\rho_0}\right)^{5/3}-\left(\frac{|\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2|}{\rho_0}\right)^{5/3}\right]\left[1+2\alpha\,\frac{p_1^2+\mathbf{p}_1\,\mathbf{p}_2+p_2^2}{\rho_0^{5/3}\,R^{1/3}}\right]+\right.$$

$$\left.+\,2^{-11/5}\left(\frac{\rho_0}{R}\right)^2\left[\exp\left(-2\,\frac{p_1^2}{\rho_0^2}\right)+\exp\left(-2\,\frac{p_2^2}{\rho_0^2}\right)+\exp\left(-2\,\frac{|\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2|^2}{\rho_0^2}\right)\right]\right\}. \quad (22)$$

Модуль спектра интенсивности изображения получается из биспектра третьего момента интенсивности в трех следующих сечениях: 1) $\mathbf{p}_1=\mathbf{p}$, $\mathbf{p}_2=0$, 2) $\mathbf{p}_1=0$, $\mathbf{p}_2=\mathbf{p}$ и 3) $\mathbf{p}_1=\mathbf{p}$, $\mathbf{p}_2=-\mathbf{p}$. Используя интегральное выражение (19), можно показать, что

$$\tau_4(\mathbf{p},0)=\tau_4(0,\mathbf{p})=\tau_4(\mathbf{p},-\mathbf{p})=\langle M(\mathbf{p})\,M(-\mathbf{p})\,M(0)\rangle/\langle M(0)\rangle^3=\langle M(\mathbf{p})\,M(-\mathbf{p})\rangle/\langle M(0)\rangle^2=$$

$$=\langle M(\mathbf{p})\,M^*(\mathbf{p})\rangle/\langle M(0)\rangle^2=\tau_2(\mathbf{p}).$$

Таким образом, видно, что модуль спектра интенсивности изображения может быть измерен по биспектру третьего момента интенсивности изображения в том же диапазоне значений и с той же точностью, что и с использованием методов Лабейри и Нокса – Томпсона. Информация о фазе спектра интенсивности изображения полностью содержится в любом из октантов 4-мерного пространства $\{\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2\}$, ограниченном одной из «осей» $\mathbf{p}_1=0$ или $\mathbf{p}_2=0$ и любым сечением $\mathbf{p}_1=\mathbf{p}_2$ или $\mathbf{p}_1=-\mathbf{p}_2$. Предположив, что поле оптической волны $U(\rho,t)$ распределено по нормальному закону, из интегрального выражения (19) получим следующее соотношение, связывающее оптические передаточные функции методов тройной корреляции интенсивности изображения и Нокса–Томпсона (при $\rho_c \ll R$):

$$\tau_4(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2)\simeq\tau_1(\mathbf{p}_1)\,\tau_3(\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2)+\tau_1(\mathbf{p}_2)\,\tau_3(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2)+\tau_1(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2)\,\tau_3(\mathbf{p}_1,-\mathbf{p}_2)-$$

$$-2\,\tau_1(\mathbf{p}_1)\,\tau_1(\mathbf{p}_2)\,\tau_1(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2)+O\left[\left(\frac{\rho_c}{R}\right)^4\right].$$

Это соотношение в явной форме обнаруживает тот факт, что потенциально метод тройной корреляции интенсивности не позволяет получить больше информации об изображении, чем метод Нокса – Томпсона. Данный вывод имеет отношение как к измерениям модуля спектра интенсивности изображения, так и его фазы. Несомненным преимуществом метода тройной корреляции интенсивности перед методом Нокса – Томпсона является его инвариантность к сдвигам короткоэкспозиционных изображений [12].

Приведенные в статье оптические передаточные функции системы «турбулентная атмосфера – телескоп» для различных методов обработки зарегистрированных короткоэкспозиционных изображений позволяют сделать вывод, что наибольшими потенциальными возможностями среди них обладают методы Нокса – Томпсона и тройной корреляции интенсивности. Причем необходимо особо отметить, что эти два метода имеют практически одинаковую потенциальную точность восстановления изображения.

1. F r i e d D . L . // J. Opt. Soc. Amer. 1966. V. 56. N 10. P. 1372.
2. F r i e d D . L . // J. Opt. Soc. Amer. 1966. V. 56. N 10. P. 1380.
3. Г у д м е н Д ж . Введение в Фурье-оптику. М.: Мир, 1970. 364 с.
4. Г у р в и ч А . С . , К о н А . И . , М и р о н о в В . Л . , Х м е л е в ц о в С . С . Лазерное излучение в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1976. 280 с.
5. R o d d i e r C . , R o d d i e r F . // J. Opt. Soc. Amer. 1975. V. 65. N. 6. P. 664.
6. L a b e y r i e A . // Astron. Astrophys. 1970. V. 6. N 1. P. 85.
7. K n o x K . T . , T h o m p s o n B . J . // Astrophys. J. (Letters). 1974. V. 193. P. L45.
8. W e i g e l t G . P . // Optics Communications. 1977. V. 21. N 1. P. 55.
9. L o h m a n n A . W . , W e i g e l t G . P . , W i r n i t z e r B . // Appl. Optics. 1983. V. 22. N 24. P. 4028.
10. W e i g e l t G . P . , W i r n i t z e r B . // Optics Lett. 1983. V. 8. N 7. P. 389.
11. М о р е ш а л ь А . , Ф р а н с о н М . Структура оптического изображения. М.: Мир, 1964. 171 с.
12. П л о т н и к о в И . П . , Р о ж к о в И . А . , Р я х и н А . Д . // Оптика атмосферы. 1990. Т. 3. N 5. С. 531.

Институт оптики атмосферы СО РАН,
Томск

Поступила в редакцию
2 августа 1994 г.

I . P . L u k i n . **Potentialities of the Methods of the Posteriory Processing of Incoherently Illuminated Subjects Observed through the Turbulent Atmosphere.**

Optical transfer function (OTF) of the turbulent atmosphere and telescopic receiving optical system are treated in the paper theoretically by different methods of posteriory processing of incoherently illuminated subjects observed through the turbulent atmosphere. When approximating the transmittance function of a receiving lens by Gaussoid the simple analytic expressions were obtained for OTF's of the turbulent atmosphere and telescope. The following processing methods are examined: the averaged image recording («very long» averaging times) and short-exposure images («very short» averaging times), namely, Labeyrie, Knox – Thompson, and triple correlation of image intensity methods. Potentialities and the methods′ boundaries of applicability under various conditions of optical radiation distribution in the turbulent atmosphere are discussed. The influence of the finite value of the turbulent atmosphere inner scale on the OTF's under consideration is also estimated in the article.