<Оптика атмосферы и океана>, **8**, N 3 (1995)

УДК 530. 1 + 539. 2

В.М. Логинов

СОЛИТОНЫ И ДИАГНОСТИКА СЛУЧАЙНЫХ ШУМОВ

Развивается нвый подход к тестированию случайных шумов. В основу подхода положены нелинейные распределенные фильтры (НРФ), представляющие собой некоторый реальный в пространстве и во времени физический процесс, либо специально подобранную математическую конструкцию, реализуемую с помощью программных средств. Обсуждается использование нелинейных уединенных волн – солитонов – в качестве НРФ. Математически НРФ могут быть сконструированы на основе точно решаемых моделей нелинейной физики. Сказанное иллюстрируется на примерах стохастических уравнений Кортевега де Вриза (КДВ), синус-Гордона (СГ) и нелинейного уравнения Шредингера (НУШ).

Введение

На практике часто возникает необходимость расшифровки сигналов сложной формы, в том числе формы нерегулярной стохастической. Природа поставляет огромное разнообразие таких примеров. В частности, при мониторинге поверхности земли, состояний ее воздушной и водной сред физические характеристики, например температура, влажность, давление, концентрации той или иной примеси, интенсивность зондирующего излучения и т.п., представляются в фиксированной точке пространства временными рядами весьма сложной и нерегулярной формы, обусловленной флуктуационной природой изучаемых объектов или стохастическими взаимодействиями этих объектов с окружением. В результате возникает множество задач, связанных с расшифровкой сигналов со случайно меняющимися параметрами (см., например, [1 – 4] и приведенные там ссылки). Поскольку априори вероятностные свойства сигналов неизвестны, то для их фиксации и последующего выделения полезной информации используются статистические гипотезы, которые с некоторой вероятностью (зависящей от выбора гипотезы) позволяют судить о характеристиках сигналов и о той полезной информации, которая в них содержится. Современный подход к решению задачи включает в себя теорию оценивания [5,6] и цифровые методы обработки сигналов, основанные на их спектральном представлении [6].

Особое место среди задач указанного круга занимают задачи идентификации гауссовых шумов и об аддитивной смеси неслучайного сигнала $f(t)$ и гауссовой помехи $\alpha(t)$. Выделение этих задач обусловлено распространенностью условий, при которых формируются шумы гауссовой статистики (в силу известной из математики центральной предельной теоремы), а также существующей практикой формирования сигналов. В данной статье в рамках общепринятых статистических подходов показано, что существует принципиальная возможность *точной* идентификации некоторых распространенных моделей шумов, в том числе шумов гауссовой статистики, а также *точное* решение задачи о разделении аддитивной смеси произвольного гауссова шума и произвольного детерминированного сигнала.

В качестве фильтрующего и идентифицирующего элемента предлагается (см. [7,8]) использовать нелинейные распределенные системы, в частности уединенные нелинейные волны – солитоны. Иллюстрация сказанного дается на примерах односолитонных решений стохастически возмущенных уравнений КДВ, СГ и НУШ. Следует отметить, что аналогичным образом можно использовать и многосолитонные решения [7]. Предваряя обсуждение, подчеркнем, что практическую разработку нелинейных распределенных фильтров (НРФ) на базе нелинейных динамических систем с распределенными параметрами можно проводить в двух направлениях. В первом случае фильтр представляется некоторой математической конструкцией и реализуется в виде специального программного продукта или ориентированного процессора. В качестве математической конструкции здесь могут выступать точные односолитонные или N-солитонные решения перечисленных выше стохастических уравнений[1)]. Во втором случае фильтр реализуется в виде физического прибора, один из блоков которого моделирует динамику, описываемую уравнением КДФ, синус-Гордона или нелинейным уравнением Шредингера. Тема данной работы – первое направление.

Общее уравнение для средней огибающей

При распространении нелинейной уединенной волны (солитона) в стохастической среде, свойства которой меняются по закону случая по пространственным и временным координатам, происходит трансформация солитона. Изменение его геометрических и физических характеристик происходит в соответствии с теми особенностями и свойствами, которыми обладает стохастическая среда. Отклик солитона на воздействие стохастической среды становится, таким образом, индикатором статистических свойств самой среды.

В ряде работ отечественных и зарубежных авторов [9 – 11] были найдены точные односолитонные и многосолитонные решения ряда нелинейных стохастических уравнений. В [12] было обращено внимание на то, что все эти решения представляют собой некоторую нелинейную функцию от *линейного* функционала, связанного со случайным параметром, характеризующим свойства стохастической среды. Указанное обстоятельство дает возможность в ряде случаев вывести точные замкнутые уравнения для средних вида $\langle\Phi(z + w(t))\rangle$, где $\Phi(z)$ – некоторая неслучайная функция переменной z; $w(t) = \int_0^t \alpha(\tau)\, d\tau$ – линейный функционал от случайного процесса $\alpha(t)$, или сформулировать общий метод вычисления средних $\langle\Phi\rangle$ для произвольных случайных процессов.

Применительно к случаю гауссовских флуктуаций $\alpha(t)$ динамика среднего в пространстве обобщенных переменных описывается уравнением диффузии с зависящим от <времени> коэффициентом диффузии [12,13]:

$$\frac{\partial \langle\Phi\rangle}{\partial t} = D(t)\,\frac{\partial^2 \langle\Phi\rangle}{\partial z^2}, \tag{1}$$

где переменный коэффициент диффузии $D(t)$ напрямую связан с автокорреляционной функцией процесса α

$$D(t) = \int_0^t \langle\alpha(t)\,\alpha(\tau)\rangle\, d\tau \equiv \int_0^t K(t, \tau)\, d\tau. \tag{2}$$

Угловые скобки означают среднее по ансамблю реализаций процесса $\alpha(t)$. При выводе (1), (2) для простоты принято $\langle\alpha(t)\rangle = 0$. При $t = 0$ начальные условия имеют вид $\langle\Phi\rangle\big|_{t=0} = \Phi(z)$.

Результат (1), (2) показывает, что структура $\langle\Phi(z + w(t))\rangle$ является тест-системой, позволяющей идентифицировать шумы гауссовой статистики, поскольку эволюция среднего $\langle\Phi\rangle$ управляется уравнением диффузии (1) исключительно для гауссовых шумов. Таким образом, изучая поведение средней огибающей $\langle\Phi(z + w(t))\rangle$ в пространстве переменных t и z, можно 1) установить, имеет ли шум $\alpha(t)$ гауссову статистику, 2) восстановить автокорреляционную функцию процесса (особенно это просто для стационарных шумов) и 3) выяснить, относится ли процесс $\alpha(t)$ к классу эргодических случайных процессов. Последняя возможность связана с тем, что результат (1), (2) является *точным* в статистическом смысле, когда определена операция усреднения по ансамблю реализаций процесса α. На практике же, при изучении статистических характеристик шумов, используется процедура усреднения по характерным вре-

---

1) На самом деле утверждение носит значительно более общий характер, поскольку в качестве математической конструкции НРФ может выступать любое точное решение уравнения в частных производных, если только оно обладает требуемой структурой функциональной зависимости, а также просто удобная для математических вычислений конструкция нужного вида.

менным интервалам. Для сравнения теоретических и экспериментальных результатов при этом требуются дополнительные предположения относительно связи между статистическими (средние по вероятностной мере) и временными средними. Для эргодических случайных процессов, как известно, эти средние совпадают.

Обсудим кратко использование в качестве тест-систем солитонные решения нелинейных стохастических уравнений. Как показано в [9], точное решение стохастического уравнения КДВ

$$u_t + 6\,u\,u_x + u_{xxx} = \beta(t) \tag{3}$$

имеет вид

$$u(x,t) = v(t) - 2\,k^2\,\mathrm{sech}^2\left[k(x - x_0) - 4\,k^3\,t + 6\,k\int_0^t v(\tau)\,d\tau\right], \tag{4}$$

где $\beta(t)$ – гауссовский шум; $v(t) = \int_0^t \beta(\tau)\,d\tau$; k – параметр спектральной задачи; x_0 – положения солитона в начальный момент времени $t = 0$. В [9] исследовалась эволюция средней огибающей солитона $\langle u(x,t)\rangle$ при воздействии гауссовского белого шума $\beta(t)$ с $\langle\beta(t)\rangle = 0$ и корреляционной функцией $\langle\beta(t+\tau)\,\beta(t)\rangle = 2\,D\,\delta(\tau)$. Было показано, что эта эволюция управляется уравнением диффузии вида (1) с $D(t) \sim t^2$. Решение (4) является частным случаем рассмотренной выше структуры $\Phi(z + w(t))$, с $\Phi(z) = \mathrm{sech}^2 z$, $z = k(x - x_0) - 4\,k^3\,t$ и $\alpha(t) \equiv v(t)$. В работе [10] приведены примеры точно решаемых стохастических уравнений СГ и НУШ:

$$u_{xt} = (1 + \alpha(t))\sin u; \tag{5}$$

$$i\,u_t + i\,\alpha(t)\,u_x + u_{xx} + 2\,u\,|u|^2 = \varepsilon(t)\,u, \tag{6}$$

где $\varepsilon(t)$ – некоторая случайная функция. Решения этих уравнений также представляют собой определенные функции, зависящие от линейного функционала $w(t) = \int_0^t \alpha(\tau)\,d\tau$ для уравнения СГ (5) и функционалов $w(t)$ и $W(t) = \int_0^t \varepsilon(\tau)\,d\tau$ для уравнения НУШ (6). В обзоре [11] содержится информация о некоторых других точно решаемых моделях из нелинейной теории волн. Для всех них характерно, что решение для амплитуды волны имеет структуру $\Phi(z + w(t))$, где $w(t)$ – определенный интеграл от случайного процесса, а z – переменная, статистически не связанная с процессом α. Поэтому все эти решения после статистического усреднения сводятся при гауссовых флуктуациях $\alpha(t)$ к линейному уравнению диффузии с переменным коэффициентом диффузии $D(t)$ и могут поэтому использоваться в качестве тест-систем для проверки исследуемого шума на гауссовость.

В упомянутых выше работах показано, что в результате взаимодействия солитона с флуктуациями стохастической среды происходит его трансформация. В среднем солитон расплывается, но сохраняет, в силу точной интегрируемости, свою площадь. В асимптотике на больших временах решение уравнения диффузии (1) выходит на автомодельный режим, когда среднее $\langle\Phi\rangle$ описывается гауссовой кривой независимо от вида начального условия. Ширина и высота гауссова профиля связаны с автокорреляционной функцией шума $\alpha(t)$. Например, для стационарного шума α его автокорреляционная функция связана с шириной гауссова пакета простой зависимостью [7]:

$$K(t) = 2\,\frac{d}{dt}\left(h(t)\,\frac{d\,h(t)}{dt}\right).$$

Таким образом, форма и характер расплывания средней огибающей солитона служат статистически точными идентификаторами шумов гауссовой статистики. Кроме того, если установлено, что статистика шума гауссова и задача состоит в определении вида автокорреляционной функции, то по тому, как расплывается солитон, можно судить об особенностях спектральной функции шума (Фурье-образа автокорреляционной функции). Ускорение или замедление расплывания солитона напрямую зависит от присутствия в спектре флуктуаций мод на низких «частотах» или резонансных мод [12,14]. Если наличие первых приводит к ускоренному расплыванию солитона, то в сравнении с ними резонансные флуктуационные моды, наоборот, резко замедляют процесс расплывания (скорость расплывания уменьшается обратно пропорционально квадрату добротности спектра флуктуаций).

Обратимся к случаю, когда процесс $\alpha(t)$ не является гауссовым. Пусть $\alpha(t)$ относится к классу случайных процессов с памятью (см., например, [15]). Это означает, что вероятностные распределения описываются обобщенными уравнениями Фоккера – Планка:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \hat{L}\, Q, \tag{7}$$

где $Q(\alpha, t \mid \Sigma, T) \equiv Q(\alpha, t \mid \alpha_1, t_1; \dots; \alpha_n, t_n)$ – плотность условной вероятности, т.е. произведение $Q(\alpha, t \mid \Sigma, T)\, d\Sigma$ ($d\Sigma = d\alpha_1 \dots d\alpha_n$) представляет собой вероятность того, что случайный процесс $\alpha(t)$ в момент времени t принимает значение α при условии, что в другие несовпадающие с t моменты времени $t_1, \dots, t_n$ значения процесса попадают в интервалы $(\alpha_1, \alpha_1 + d\alpha_1), \dots, (\alpha_n, \alpha_n + d\alpha_n)$ соответственно. Оператор $\hat{L}$ (его часто называют кинетическим или производящим оператором) в дифференциальной форме имеет вид

$$\hat{L} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \Lambda_n(\alpha, t \mid \Sigma, T). \tag{8}$$

Кинетические коэффициенты $\Lambda_n(\alpha, t \mid \Sigma, T)$ являются условными средними и определяются как

$$\Lambda_n(\alpha, t \mid \Sigma, T) = \lim_{\tau \to 0} \int [(\alpha - \eta)^n\, Q(\alpha, t \mid \eta, t - \tau; \Sigma, T)/\tau\,]\, d\eta.$$

В пределе марковских процессов кинетические коэффициенты Λ_n зависят только от состояний процесса α в момент t, т.е. $\Lambda_n(\alpha, t \mid \Sigma, T) \equiv \Lambda_n(\alpha, t)$. В общем виде процедура вычисления среднего от функции $\langle\Phi(z + w(t))\rangle$ сводится к задаче определения характеристической $\chi(k, t)$ функции процесса $w(t)$:

$$\langle\Phi(x + w(t))\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \Phi(k)\, e^{ikx}\, \chi(k, t); \tag{9}$$

$$\chi(k, t) = \langle\exp(i k w(t))\rangle$$

где $\Phi(k)$ – Фурье-образ функции $\Phi(z)$. Применяя метод доказательства, использованный в [15, стр. 27], нетрудно показать, что характеристическая функция χ может быть определена из решения уравнения в частных производных или интегродифференциального уравнения (тип уравнения зависит от структуры кинетического оператора $\hat{L}$ случайного процесса α) для некоторой вспомогательой функции $R = R(t, k, \alpha)$:

$$\frac{\partial R}{\partial t} = i k \alpha R + \hat{L} R, \tag{10}$$

связанной с характеристической функцией χ простой интегральной зависимостью

$$\chi(k, t) = \int_{(\alpha)} R(k, t, \alpha)\, d\alpha. \tag{11}$$

Начальные условия для функции R в уравнении (10) таковы: $R(k, 0, \alpha) = \delta(\alpha)$.

Таким образом, на базе общих результатов (9) – (11) для широкого класса моделей случайных шумов, в том числе и немарковских, могут быть созданы математические конструкции для тестирования этих шумов. В частности, можно предложить системы (в том числе построенные на основе солитонных решений) для тестирования часто встречаемых в приложениях шумов Пирсона, пуассоновских и ряда других (подробное изложение результатов будет дано в другой работе).

Аддитивные смеси детерминированных сигналов и стохастических шумов

На практике нередки случаи, когда изучаемый случайный сигнал, поступающий на вход приемного устройства, является (или предполагается) суммой некоторой детерминированной функции времени $f(t)$ и случайного шума $\alpha(t)$. Как показано в [7], при гауссовой статистике процесса $\alpha(t)$ эта смесь точно разделяется. Разделение происходит благодаря использованию в качестве системы разделителя нелинейных распределенных фильтров. Подробно обсуждались фильтры, основанные на точных односолитонных и многосолитонных решениях стохастически возмущенного уравнения КДВ (3).

Возможность точной фильтрации опирается на тот факт, что шум и неслучайный сигнал в пространстве обобщенных переменных задают процесс переноса некоторой субстанции. Принципиальным является то, что детерминированная компонента смеси отвечает за механизм конвективного переноса этой субстанции, а стохастическая – за ее перенос, благодаря диффузии. При этом скорость конвективного переноса восстанавливает форму и характеристики детерминированного сигнала, по динамике диффузии восстанавливаются характеристики шума. Необходимо также подчеркнуть, что независимо от статистики шума детерминированная составляющая аддитивной смеси вносит вклад исключительно в процесс конвективного переноса.

«Математическим каркасом» распределенного фильтра для разделения аддитивных смесей $\xi(t) = f(t) + \alpha(t)$ является среднее от функционала $\Phi(z + \int_0^t f(\tau)\, d\tau + \int_0^t \alpha(\tau)\, d\tau)$ по траекториям случайного процесса $\alpha(t)$. Это среднее при гауссовских флуктуациях α определяется как решение уравнения переноса следующего вида [7]:

$$\frac{\partial <\Phi>}{\partial t} + f(t)\frac{\partial <\Phi>}{\partial z} = D(t)\frac{\partial^2 <\Phi>}{\partial z^2} \qquad (12)$$

с начальным условием $<\Phi>\big|_{t=0} = \Phi(z)$. Наиболее просты по структуре НРФ, получаемые из односолитонных решений уравнения СГ (5) и НУШ (6) (явный вид этих решений приведен в [10]). Если выбрать в качестве функции $\Phi(z)$ односолитонные решения уравнений (5) и (6), то анализ уравнения (12) показывает, что присутствие в смеси детерминированного процесса $f(t)$ определяет траекторию положения максимума солитона. Динамика расплывания солитона попрежнему характеризуется случайной компонентой $\alpha(t)$.

Таким образом, движение максимума солитона по некоторой траектории указывает на присутствие в смеси некоторого регулярного процесса (если переменная t трактуется как время, как в уравнении КДВ (3)) или регулярной структуры в стохастической среде (если t – пространственная координата, как в уравнениях (5), (6)). Геометрические характеристики солитона – положение его максимума и ширина и (или) высота – являются, следовательно, весьма наглядными индикаторами компонент аддитивной смеси сигнала и шума.

Заключение

Предложен общий подход математического конструирования нелинейных распределенных фильтров для тестирования разнообразных моделей случайных шумов. В рамках результатов (9) – (11) можно создавать НРФ, специализированные на определенные модели шума, подобно уравнению диффузии (1) для гауссова шума.

Рассмотрение показывает, что НРФ на базе солитонных решений являются весьма удобным и наглядным средством изучения вероятностных свойств и характеристик флуктуирующих сред.

Представляется перспективным применение «солитонных НРФ» для разделения аддитивных смесей шума и детерминированного процесса, поскольку в общем случае последний вносит вклад только в процесс конвективного переноса среднего <Φ>.

Представляется, что развиваемый подход может стать основой для создания ориентированных программных и технических средств для практической «спектроскопии шумов».

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 93 – 012 – 12269).

1. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 1. Случайные процессы. М.: Наука, 1976. 494 с.
2. Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С. Введение в статистическую радиофизику. М.: Наука, 1981. 520 с.
3. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Радио и связь, 1989. 654 с.
4. Купер Дж., Макгиллен К. Вероятностные методы анализа сигналов и систем. М.: Мир, 1989. 376 с.
5. Сейдж Э., Мелс Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. М.: Связь, 1976. 495 с.
6. Марпл С.Л. мл. Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990. 584 с.
7. Логинов В.М. // ЖЭТФ. 1994. Т. 105. Вып. 4. С. 796 – 807.
8. Логинов В.М. // Письма в ЖТФ. 1993. Т. 19 (14), С. 1 – 4.
9. Wadati V. // J. Phys. Soc. Japan. 1983. V. 52. P. 2642 – 2646.
10. Маймистов А.И., Маныкин Э.А. // Изв. вузов. Физика. 1987. N 4. С. 91 – 97.
11. Bass F.G., Kivshar Yu.S., Konotop V.V., Sinitsyn Yu.A. // Phys. Reports. 1988. V. 157. P. 63 – 181.
12. Логинов В.М. // Письма в ЖТФ. 1990. Т. 16. Вып. 6. С. 53 – 56.
13. Логинов В.М. // ЖТФ. 1991. Т. 61. Вып. 4. С. 186 – 188.
14. Логинов В.М. // 1-й Межреспубликанский симпозиум <Оптика атмосферы и океана> (Тезисы докл.) Ч. 1. Томск, 1994. С. 195 – 196.
15. Шапиро В.Е., Логинов В.М. Динамические системы при случайных воздействиях. Новосибирск: Наука, 1983. 160 С.

Тувинский комплексный институт СО РАН

Поступила в редакцию
16 августа 1994 г.

V.M. Loginov. **Solitons and Diagnostics of Stochastic Noise.**

A new approach to stochastic noise diagnostics is suggested. The approach is based on nonlinear distributed filters (NDF). These filters correspond to some nonlinear distributed dynamical systems. The practical realization of the NDF can be both in the form of mathematical constructions (represented as software codes) and real physical devices. The feature of NDF is that they are oriented on certain noise models. For arbitrary Gaussian noise NDF corresponds to some transport process. This transport process is described by a linear diffusion equation with alternated diffusion coefficient. The NDF are considered as an exact solution of nonlinear distributed stochastic equation (such as Kortewegde Vries, sine-Gordon, and nonlinear Schrodinger equation).