«Оптика атмосферы», **4**, № 3 (1991)

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В АТМОСФЕРЕ

УДК 534.222

И.П. Лукин

ФУНКЦИИ ГРИНА ЛИНЗОПОДОБНОЙ СРЕДЫ

Получены функции Грина для параболического уравнения «квазиоптики», описывающего распространение оптического излучения в линзоподобной дефокусирующей среде с переменным фокусным расстоянием. Показано, что соотношение взаимности для функций Грина линзоподобной среды с переменным фокусным расстоянием не имеет места. Для линзоподобной среды с постоянным фокусным расстоянием соотношение взаимности выполняется.

Распространение оптического излучения в линзоподобной дефокусирующей среде с оптической осью, совпадающей с осью OX, описывается параболическим уравнением «квазиоптики» [1–3]

$$\left\{2i\kappa\frac{\partial}{\partial x}+\Delta_\perp+\frac{\kappa^2\rho^2}{F^2(x)}\right\}U(x,\ \rho)=0,\qquad U(0,\ \rho)=U_0(\rho), \tag{1}$$

где $U(x, \rho)$ — параболическая амплитуда оптического поля; x — продольная, а $\rho = \{y, z\}$ — поперечные координаты; $\kappa = 2\pi/\lambda$, λ — длина волны излучения; $F(x)$ — локальное фокусное расстояние линзоподобной среды (рефракционного канала); $\Delta_\perp = \partial^2/\partial y^2+\partial^2/\partial z^2$ — поперечный оператор Лапласа. Соответствующая (1) функция Грина удовлетворяет уравнению [4–6]:

$$\left\{2i\kappa\frac{\partial}{\partial x}+\Delta_\perp+\frac{\kappa^2\rho^2}{F^2(x)}\right\}G(x,\ \rho;\ x',\ \rho')=0 \tag{2}$$

с граничным условием

$$G(x,\ \rho;\ x',\ \rho')/_{x=x'}=\delta(\rho-\rho').$$

Функция Грина $G(x, \rho; x', \rho')$ описывает поле сферической волны, распространяющейся из точки (x', ρ') в положительном направлении оси OX. Можно показать, что решение уравнения (2) при $0 \le x' < x$ имеет вид

$$G(x,\ \rho;\ x',\ \rho')=\frac{\kappa}{2\pi iF_0U_2\left(\frac{x-x'}{F_0}\right)}\exp\left\{\frac{i\kappa U_2'\left(\frac{x-x'}{F_0}\right)}{2F_0U_2\left(\frac{x-x'}{F_0}\right)}\rho^2-\frac{i\kappa}{F_0U_2\left(\frac{x-x'}{F_0}\right)}\rho\rho'+\frac{i\kappa U_1\left(\frac{x-x'}{F_0}\right)}{2F_0U_2\left(\frac{x-x'}{F_0}\right)}\rho'^2\right\}, \tag{3}$$

где функции $U_1\left(\frac{x-x'}{F_0}\right)$ и $U_2\left(\frac{x-x'}{F_0}\right)$ — частные решения уравнения

$$U''\left(\frac{x-x'}{F_0}\right)-\frac{F_0^2}{F^2(x)}U\left(\frac{x-x'}{F_0}\right)=0$$

с граничными условиями

$$U_1(0)=U_2'(0)=1,\ U_1'(0)=U_2(0)=0,$$

а $F_0 = F(x = x')$ — «начальное» значение фокусного расстояния линзоподобной среды.

Функция Грина $G(x,\ \rho;\ x',\ \rho')$ (3) удовлетворяет условиям нормировки

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty} d\rho G(x,\ \rho;\ x',\ \rho')/_{x=x'} = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} d\rho' G(x,\ \rho;\ x',\ \rho')/_{x=x'} = 1$$

и соотношениям ортогональности

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty} d\rho G(x,\ \rho;\ x',\ \rho')\, G^*(x,\ \rho;\ x',\ \rho'') = \delta(\rho'-\rho'');$$

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty} d\rho' G(x,\ \rho_1;\ x',\ \rho')\, G^*(x,\ \rho_2;\ x',\ \rho') = \delta(\rho_1-\rho_2).$$

При решении задач об отражении оптических волн от зеркала необходимо знание функции Грина $\tilde{G}(x',\ \rho';\ x,\ \rho)$, которая описывает сферическую волну, распространяющуюся в отрицательном направлении оси OX из точки $(x,\ \rho)$. При $x > x'$

$$\tilde{G}(x',\ \rho';\ x,\ \rho) = \frac{\kappa}{2\pi i F_0 \tilde{U}_2\left(\frac{x-x'}{F_0}\right)} \exp\left\{\frac{i\kappa \tilde{U}_2'\left(\frac{x-x'}{F_0}\right)}{2F_0\tilde{U}_2\left(\frac{x-x'}{F_0}\right)}\rho'^2 - \frac{i\kappa}{F_0\tilde{U}_2\left(\frac{x-x'}{F_0}\right)}\rho\rho' + \frac{i\kappa\tilde{U}_1\left(\frac{x-x'}{F_0}\right)}{2F_0\tilde{U}_2\left(\frac{x-x'}{F_0}\right)}\rho^2\right\}, \tag{4}$$

где функции $\tilde{U}_1\left(\frac{x-x'}{F_0}\right)$ и $\tilde{U}_2\left(\frac{x-x'}{F_0}\right)$ — частные решения уравнения

$$\tilde{U}''\left(\frac{x-x'}{F_0}\right) - \frac{F_0^2}{\tilde{F}^2(x')}\tilde{U}\left(\frac{x-x'}{F_0}\right) = 0$$

с граничными условиями:

$$\tilde{U}_1(0) = \tilde{U}_2'(0) = 1,\ \tilde{U}_1'(0) = \tilde{U}_2(0) = 0,$$

а $\tilde{F}(x')$ — зеркальное отображение функции $F(x)$ [2].

Из формул (3) и (4) следует, что соотношение взаимности для функций Грина линзоподобной среды

$$G(x,\ \rho;\ x',\ \rho') = \tilde{G}(x',\ \rho';\ x,\ \rho)\ \ (x > x') \tag{5}$$

выполняется только при следующих условиях:

$$\begin{cases} U_2\left(\frac{x-x'}{F_0}\right) = \tilde{U}_2\left(\frac{x-x'}{F_0}\right), \\ U_1\left(\frac{x-x'}{F_0}\right) = \tilde{U}_2'\left(\frac{x-x'}{F_0}\right), \\ U_2'\left(\frac{x-x'}{F_0}\right) = \tilde{U}_1\left(\frac{x-x'}{F_0}\right). \end{cases} \tag{6}$$

В линзоподобной среде (рефракционном канале) с постоянным значением фокусного расстояния $F(x) = \tilde{F}(x') = F_0$ [1–3] эти условия выполняются:

$$\begin{cases} U_2\left(\frac{x-x'}{F_0}\right) = \tilde{U}_2\left(\frac{x-x'}{F_0}\right) = \operatorname{sh}\left(\frac{x-x'}{F_0}\right), \\ U_1\left(\frac{x-x'}{F_0}\right) = \tilde{U}'_2\left(\frac{x-x'}{F_0}\right) = \operatorname{ch}\left(\frac{x-x'}{F_0}\right), \\ U'_2\left(\frac{x-x'}{F_0}\right) = \tilde{U}_1\left(\frac{x-x'}{F_0}\right) = \operatorname{ch}\left(\frac{x-x'}{F_0}\right), \end{cases}$$

и, следовательно, соотношение взаимности функций Грина (5) имеет место. Аналогичная ситуация наблюдается для линзоподобных сред с симметричным распределением локального фокусного расстояния $F(x)$ относительно точки $(x-x')/2$. В этом случае $F(x) = \tilde{F}(x')$ и, значит,

$$U_1\left(\frac{x-x'}{F_0}\right) = \tilde{U}_1\left(\frac{x-x'}{F_0}\right),\ U_2\left(\frac{x-x'}{F_0}\right) = \tilde{U}_2\left(\frac{x-x'}{F_0}\right),$$

а также

$$U'_1\left(\frac{x-x'}{F_0}\right) = \tilde{U}'_1\left(\frac{x-x'}{F_0}\right),\ U'_2\left(\frac{x-x'}{F_0}\right) = \tilde{U}'_2\left(\frac{x-x'}{F_0}\right),$$

т.е. условия (6) и соотношение взаимности (5) выполняются. Для линзоподобных сред с переменным фокусным расстоянием, когда $F(x) = \tilde{F}(x')$, условия (6) не выполняются, т.к.

$$U_1\left(\frac{x-x'}{F_0}\right) \neq \tilde{U}_1\left(\frac{x-x'}{F_0}\right) \text{ и } U_2\left(\frac{x-x'}{F_0}\right) \neq \tilde{U}_2\left(\frac{x-x'}{F_0}\right).$$

Например, для $F^2(x) = F_0^2\left(1+\alpha\frac{x-x'}{F_0}\right)$ при $\alpha\frac{x-x'}{F_0} \ll 1$

$$U_1\left(\frac{x-x'}{F_0}\right) \simeq \operatorname{ch}\left(\frac{x-x'}{F_0}\right) + \frac{\alpha}{4}\left(\frac{x-x'}{F_0}\right)\left[\operatorname{ch}\left(\frac{x-x'}{F_0}\right) - \left(\frac{x-x'}{F_0}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{x-x'}{F_0}\right)\right] - \frac{\alpha}{4}\operatorname{sh}\left(\frac{x-x'}{F_0}\right),$$

$$U_2\left(\frac{x-x'}{F_0}\right) \simeq \operatorname{sh}\left(\frac{x-x'}{F_0}\right) + \frac{\alpha}{4}\left(\frac{x-x'}{F_0}\right)\left[\operatorname{sh}\left(\frac{x-x'}{F_0}\right) - \left(\frac{x-x'}{F_0}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{x-x'}{F_0}\right)\right],$$

а

$$\tilde{U}_1\left(\frac{x-x'}{F_0}\right) \simeq \operatorname{ch}\left(\frac{x-x'}{F_0}\right) - \frac{\alpha}{4}\left(\frac{x-x'}{F_0}\right)\left[\operatorname{ch}\left(\frac{x-x'}{F_0}\right) - \left(\frac{x-x'}{F_0}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{x-x'}{F_0}\right)\right] + \frac{\alpha}{4}\operatorname{sh}\left(\frac{x-x'}{F_0}\right),$$

$$\tilde{U}_2\left(\frac{x-x'}{F_0}\right) \simeq \operatorname{sh}\left(\frac{x-x'}{F_0}\right) - \frac{\alpha}{4}\left(\frac{x-x'}{F_0}\right)\left[\operatorname{sh}\left(\frac{x-x'}{F_0}\right) - \left(\frac{x-x'}{F_0}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{x-x'}{F_0}\right)\right],$$

т.е.

$$U_2\left(\frac{x-x'}{F_0}\right) - \tilde{U}_2\left(\frac{x-x'}{F_0}\right) \simeq \frac{\alpha}{2}\left(\frac{x-x'}{F_0}\right)\left[\operatorname{sh}\left(\frac{x-x'}{F_0}\right) - \left(\frac{x-x'}{F_0}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{x-x'}{F_0}\right)\right] \neq 0,$$

$$U_1\left(\frac{x-x'}{F_0}\right) - \tilde{U}'_2\left(\frac{x-x'}{F_0}\right) \simeq -\frac{\alpha}{2}\left(\frac{x-x'}{F_0}\right)^2\operatorname{sh}\left(\frac{x-x'}{F_0}\right) \neq 0,$$

$$U'_2\left(\frac{x-x'}{F_0}\right) - \tilde{U}_1\left(\frac{x-x'}{F_0}\right) \simeq -\frac{\alpha}{2}\left(\frac{x-x'}{F_0}\right)^2\operatorname{sh}\left(\frac{x-x'}{F_0}\right) \neq 0.$$

Таким образом, в данном случае соотношение взаимности для функции Грина (5) не выполняется. В силу этого использование соотношения взаимности для функций Грина линзоподобной среды с переменным фокусным расстоянием в работах [7, 8] является ошибочным

1. Агровский Б.С., Воробьев В.В., Гурвич А.С. и др. //Изв. вузов СССР. Сер. Физика. 1983. № 2. С. 90–103.
2. Беленький М.С., Лукин И.П., Миронов В.Л. Потенциальные возможности оптического зондирования атмосферных рефракционных каналов. Томск, 1984. 48 с. (Препринт /ИОА СО АН СССР, № 25).
3. Беленький М.С., Лукин И.П., Миронов В.Л. //Оптика и спектроскопия. 1986. Т. 60. В. 2. С. 388–393.
4. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит. 1958. 930 с.
5. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. 2. М.: Изд-во иностр. лит. 1960. 886 с.
6. Фейнберг Е.Л. Распространение радиоволн вдоль земной поверхности. М.: Изд-во АН СССР, 1961. 548 с.
7. Банах В.А., Миронов В.Л., Смалихо И.Н. //Изв. вузов СССР. Сер. Радиофизика. 1986. Т. 29. № 4. С. 384–394.
8. Колосов В.В., Сысоев С.И. //Оптика атмосферы. 1990. Т. 3. № 1. С. 83–89.

Институт оптики атмосферы СО АН СССР,
Томск

Поступила в редакцию
15 августа 1990 г.

I.P. Lukin. **Green's Functions of a Lens-like Medium.**

Green's functions are derived in this paper for the parabolic equation of «quasioptics» describing the propagation of optical radiation through a lens-like defocusing medium with the variable focal length. It is shown that the principle of reversibility is not valid in the case of Green's functions for lens-like medium with the variable focal length. In the case of a lens-like medium with the constant focal length this principle is valid.