

А.С. Тоболкин**ДВУМЕРНОЕ ПОЛЕ ТЕМПЕРАТУРЫ В ОПТИЧЕСКОМ РАЗРЯДЕ**

Аналитическими методами осуществлено решение уравнения теплопроводности оптического разряда. Получены соотношения для восстановления двумерного поля температуры в плазме и тепловом слое оптического разряда. Проведены расчеты двумерного поля потенциала тепловых потерь и температуры для воздушной плазмы. С помощью сравнения теоретических и экспериментальных данных показана применимость полученных решений для изучения неоднородных плазменных образований.

Образование плазмы под действием интенсивной световой волны вызывает в последнее время повышенный интерес [1–7]. Во-первых, исследование этого явления дает информацию о поведении плазмы при полной однократной ионизации [2] и позволяет изучать механизмы пробоя в электромагнитном поле оптических частот. Во-вторых, поскольку образующаяся плазма оптического разряда (ОР) оказывает существенное влияние на структуру лазерного пучка, тем самым присутствие ОР может существенно влиять на транспортировку световой волны через атмосферу, так как плазма ОР заметно поглощает энергию световой волны и способна за счет неоднородного распределения показателя преломления сильно исказить волновой фронт с возможным образованием кольцевой структуры в пучке. В большинстве случаев плазма ОР распространяется вдоль светового пучка, причем ее передний фронт, расположенный ближе к пучку, удаляется от фокальной плоскости на значительное расстояние (более 1 см), где интенсивность световой волны может падать более чем в 30 раз [2]. Разлет плазмы воздуха имеет квазистационарный характер, когда скорость и температура ОР не меняется во времени [6]. Выход температуры на квазистационарный режим происходит за несколько сотых долей микросекунды.

В стационарном режиме ОР поддерживается излучением непрерывного лазера (на CO_2). Если организовать ОР в потоке газа внутри разрядной камеры, получится генератор плазмы – плазмотрон. В ряде случаев ОР можно поддерживать в заданном месте пространства, изменяя при этом фокальный объем и газодинамическую обстановку. В оптическом частотном диапазоне достижима электродинамическая стабилизация разряда. Особенности системы лазер – разряд является то, что они «развязаны», т.е. параметры разряда не влияют на режим работы источника энергии (лазера). Существенно отличает ОР от других типов разрядов то обстоятельство, что радиус канала, в котором происходит энерговыделение, даже с учетом расходимости пучка в плазме, задан радиусом пучка и слабо меняется при изменении его мощности и температуры плазмы [2–4], в то время как, например, в дуговом разряде он неизвестен и определяется одновременно с профилем температуры и проводимости плазмы.

Аналитическим и численным методам исследования ОР посвящено достаточно большое число работ (см. [1–7] и там же ссылки). В основном эти исследования проведены с использованием одномерных моделей. В [3] при максимальных упрощениях для одномерного стационарного режима с потоком в условиях сфокусированного луча удалось найти координаты границ плазменной области в зависимости от мощности световой волны и скорости потока. Численное интегрирование одномерного уравнения энергии без лишних упрощений в отношении свойств плазмы, лучистых потерь проведено в [4] с целью «извлечь все возможное, что в состоянии дать одномерная модель». При этом рассчитаны одномерные профили температур для воздушной и аргоновой плазмы ОР вдоль оптической оси луча. Радиальные профили температур с помощью каналовой модели определены в [2] для случая, когда продольный размер плазмы во много раз превосходит его диаметр. Из экспериментальных данных [1, 2, 6, 7] следует, что ОР имеет форму эллипсоида вращения с длиной разряда, равной 1–8 диаметрам, а ширина переднего фронта разряда заметно меньше ширины заднего фронта.

Для более детального изучения структуры ОР, его расфокусирующих свойств, влияния на поддерживающий его световой пучок необходимо изучение двумерных полей температуры как плазмы ОР, так и окружающего его теплового слоя. В таком рассмотрении можно учитывать эффективность поглощения излучения в объеме ОР и учесть рефракцию лучей, вызванную неоднородным распределением показателя преломления и т. д. Практический интерес предоставляет возможность аналитического конструирования и исследования таких функций, которые давали бы реальную картину тепловых полей в объеме ОР.

Целью настоящей работы является решение уравнения энергии аналитическими методами, позволяющими определять двумерные поля температуры ОР для условий, реально наблюдаемых в эксперименте.

Тепловую задачу для описания ОР можно представить в следующем виде. При распространении световой волны в плазме интенсивность пучка имеет характер экспоненциального изменения [1–5], характеризующийся законом Бутера $I = I_0 e^{-kz}$, где I – средняя интенсивность в пучке; k – коэф-

коэффициент поглощения. Лучистые потери из плазмы u пропорциональны температуре плазмы, которая в свою очередь, пропорциональна поглощенной удельной энергии kI . В этом случае можно считать, что $g = kI - u$ вдоль оптической оси может меняться по закону $g(z) = g_0 e^{-kz}$. Используя понятие тепловых потерь $S = \int_{T_0}^T \lambda dT$, где T_0 – температура холодного газа; λ – коэффициент теплопроводности, можно записать уравнение энергии в виде

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial S}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = -g_0 e^{-kz}, \quad g_0 = g(0). \quad (1)$$

Для уравнения (1) рассматриваем внешнюю и внутреннюю задачи в следующем виде:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial S}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = 0, \quad r_1 \leq r \leq R, \quad 0 \leq z < \infty, \\ S(R, z) = S(r, \infty) = 0, \quad S(r_1, z) = S_0 e^{-kz}. \quad (2)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial S}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = -g_0 e^{-kz}, \quad 0 \leq r \leq r_1, \quad 0 \leq z < \infty, \\ S(r_1, z) = S_0 e^{-kz}, \quad S_0 = S(r_1, 0). \quad (3)$$

Здесь учтено, что ОР расположен в положительной полуплоскости $z > 0$, а граничное условие $S(r, z) = S_0 e^{-kz}$ взято из реальных условий. Если выполняется закон Бугера, то может возникнуть реальная возможность изменения потенциала тепловых потерь по однотипному экспоненциальному закону на расстоянии r_1 от оптической оси. Расстояние r_1 с учетом пространственного распределения параметров может быть выявлено при решении рассматриваемой модели.

Решение внешней задачи (2) в окрестности регулярирной особой точки осуществляется с помощью разделения переменных $S(r, z) = S(r) \cdot S(z)$. Одно из частных решений ищем в виде ряда Фробениуса [9]:

$$S_1(r) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^{2+n}, \quad \sigma \geq 0, \quad (4)$$

где σ – характеристический показатель и определяется из самого уравнения Лапласа.

С учетом (4) частное решение

$$S_1(r) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\lambda r)^{2n}}{4^n (n!)^2} = I_0(\lambda r), \quad (5)$$

где $I_0(\lambda r)$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка, λ – параметр разделения переменных.

Второе частное решение запишется [9]:

$$S_2(r) = S_1(r) \int \frac{1}{S_1^2(r)} \frac{dr}{r}. \quad (6)$$

Ограничиваясь первыми двумя членами ряда (5) и учитывая, что $S(z) = S_0 e^{-kz}$, находим двумерное распределение $S(r, z)$ во внешней области ОР:

$$S(r, z) = \frac{S_0 e^{-kz} \left[1 - \frac{\kappa^2 r^2}{4} - \Phi \left(1 + \left(1 - \frac{\kappa^2 r^2}{4} \right) \ln \frac{\kappa^2 r^2}{4 - \kappa^2 r^2} \right) \right]}{1 - \frac{\kappa^2 r_1^2}{4} - \Phi \left[1 + \left(1 - \frac{\kappa^2 r_1^2}{4} \right) \ln \frac{\kappa^2 r_1^2}{4 - \kappa^2 r_1^2} \right]}, \quad (7) \\ \Phi = \frac{4 - \kappa^2 r^2}{4 + (4 - \kappa^2 R^2) \ln [\kappa^2 R^2 / (4 - \kappa^2 R)]},$$

где R – радиус теплового слоя ОР.

В такой постановке задачи решение (7) возможно при $\lambda = k$. Это важная особенность решения, так как в отличие от большинства тепловых задач [11–13] предлагаемый подход определяет физическую сущность параметра разделения переменных. Найденное решение (7) можно считать приемлемым, если член $(\kappa R)^2/4$ в ряде (5) несущественно отличается от единицы. Для воздушного ОР

($k \approx 0,6 \div 1$) см^{-1} и $R \approx (0,1 \div 0,3)$ см) это выполняется с большим запасом. Тогда членом $k^4 R^4 / 64$ можно пренебречь. Нужно отметить, что сходимость ряда (5) очень быстрая, поэтому точность расчета можно оценивать не остатком ряда, а последующим его членом. И для большинства режимов горения ОР можно вполне ограничиваться членом с номером $n = 2$. Поэтому формула (7) достаточно точно описывает двумерное поле потенциала тепловых потерь во внешней области ОР, а с привлечением функции $S = \int \lambda dT$ и двумерное поле температуры.

Для внутренней задачи (3) рассмотрим однородные граничные условия

$$\bar{S}(r_1, z) = 0, \bar{S}(r, 0) = 0, S(r, \infty) = 0. \quad (8)$$

где $\bar{S}(r, z) = S_1(r, z) - S_2(r, z)$ (S_1 — полное решение внутренней задачи; S_2 — решение уравнения Лапласа для внутренней области ОР, удовлетворяющее исходным граничным условиям). Такое представление удобно тем, что упрощает задачу (3) до задачи с нулевыми граничными условиями, автоматически переводя на границе $r = r_1$ решение внутренней задачи в решение внешней.

Для уравнения Лапласа имеем следующее решение:

$$S_2(r, z) = S_0 \frac{4 - \kappa^2 r^2}{4 - \kappa^2 r_1^2} e^{-\kappa z}. \quad (9)$$

Функцию, являющуюся решением задачи (3) для однородных граничных условий (8), выявляем вариационным методом Конторовича [10]:

$$\bar{S}(r, z) = \sum_{i=1}^{\infty} (r_1^2 - r^2)^i \varphi_i(z), \quad (10)$$

где $(r_1^2 - r^2)^i$ — координатные функции, способствующие наиболее быстрой сходимости ряда к точному решению. Ограничимся первым членом данного ряда

$$\bar{S}(r, z) = (r_1^2 - r^2) \varphi_1(z). \quad (11)$$

Функционал, для которого уравнение задачи (3) будет являться уравнением Лагранжа—Эйлера, запишется следующим образом:

$$H = 2\pi \int_0^{\infty} \int_0^{r_1} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 - 2Sg_0 e^{-\kappa z} \right] r dr dz. \quad (12)$$

Исходя из выбранного представления функции $\bar{S}(r, z)$ и функционала H , получим:

$$\bar{S}(r, z) = \frac{2g_0 (r_1^2 - r^2)}{2(6 - \kappa^2 r_1^2)} (e^{-\kappa z} - e^{-\frac{\sqrt{6-\kappa^2} z}{r_1}}). \quad (13)$$

Для проверки достоверности найденной функции $S(r, z)$ представим ее в следующем виде:

$$\bar{S}(r, z) = C (r_1^2 - r^2) (e^{-\kappa z} - e^{-\gamma z}), \quad (14)$$

где C, γ произвольные постоянные.

Подставив (14) в уравнение энергии (1), получим:

$$-4C (e^{-\kappa z} - e^{-\gamma z}) + C (r_1^2 - r^2) (\kappa^2 e^{-\kappa z} - \gamma^2 e^{-\gamma z}) = -g_0 e^{-\kappa z}. \quad (15)$$

В силу независимости функций $e^{-\kappa z}$ и $e^{-\gamma z}$ при $\kappa \neq \gamma$ полученное равенство будет справедливо тогда, когда

$$-4C + C (r_1^2 - r^2) \kappa^2 = -g_0, \quad (16)$$

$$4C - C (r_1^2 - r^2) \gamma^2 = 0. \quad (17)$$

Анализ (14) – (17) при интегрировании по сечению (16), (17), во-первых, указывает на то, что частное решение (13) удовлетворяет уравнению энергии (1), а, во-вторых, выявляет важную особенность, позволяющую сопоставить между собой параметры k и g_0 . При этом следует, что максимальному значению $g_m = \frac{3}{2}g_0$ соответствует максимальное значение коэффициента поглощения $k_m = \sqrt{\frac{3}{2}}k_0$. Параметры k_m и g_m относятся к точке $(z_3, 0)$ объема ОР с максимальным поглощением излучения. z_3 – представляет собой ширину переднего фронта ОР и определяется из условия экстремума $dS/dz = 0$. В этом важное отличие от одномерной каналовой модели [2], в которой в расчетных соотношениях используется значение коэффициента поглощения $k = k_1$ для однократноионизованной плазмы. Такой подход имеет частный случай, т. к. плазма ОР не всегда является полностью ионизованной. Существуют ситуации, когда в плазме ОР наблюдаются низкие значения температуры [1, 7], указывающие на относительно низкую степень ионизации. В нашем случае выбор исходных параметров определяется характером пространственного их распределения в объеме ОР и тем самым отвечает реальным условиям. Тем более следует отметить, что расчетные значения $S(r, z)$ существенным образом меняются в зависимости от задаваемого значения k .

В конечном итоге для плазмы ОР распределение потенциала $S(r, z)$ может быть записано в виде двух выражений:

$$S(r, z) = S_0 \frac{4 - \kappa_m^2 r^2}{4 - \kappa_m^2 r_1^2} e^{-\kappa_m z} + \frac{g_m (r_1^2 - r^2)}{(6 - \kappa_m^2 r_1^2)} (e^{-\kappa_m z} - e^{-\frac{\sqrt{6} \cdot z}{r_1}}); \quad (18)$$

$$S(r, z) = S_0 \frac{4 - \kappa_0^2 r^2}{4 - \kappa_0^2 r_1^2} e^{-\kappa_0 z} + \frac{3g_0 (r_1^2 - r^2)}{2(6 - \kappa_0^2 r_1^2)} (e^{-\kappa_0 z} - e^{-\frac{\sqrt{6} \cdot z}{r_1}}). \quad (19)$$

Зависимости (7), (18) и (19) полностью описывают пространственное распределение $S(r, z)$ для стационарного ОР.

Связь S_0 и g_m выявим простым соотношением. Произведение удельной энергии g_m на площадь сечения ОР πr_1^2 характеризует погонную мощность, т.е. мощность, выделяемую в плазме ОР на единицу длины за счет теплопроводностных потерь. Поэтому можно представить

$$g_m \cdot \pi r_1^2 = \pi S_0 \alpha, \quad (20)$$

где α – неизвестная величина, подлежащая определению. С учетом (20) рассмотрим выражение (18) для распределения $S(0, z)$, считая $k^2 r_1^2 \ll 1$.

$$S(0, z) S_0 = e^{-\kappa_m z} + \frac{1}{6z} (e^{-\kappa_m z} - e^{-\frac{\sqrt{6} \cdot z}{r_1}}). \quad (21)$$

Функция (21) имеет немонотонный характер и экстремум этой функции имеет вид

$$z_3 / r_1 = \ln [\kappa_m r_1 (6\alpha + 1) / \sqrt{6}] / (\kappa_m r_1 - \sqrt{6}), \quad (22)$$

где z_3 – расстояние от точки начала поглощения излучения до точки с максимальным поглощением излучения, т.е. z_3 является шириной переднего фронта ОР вдоль оптической оси.

Для дальней зоны разряда $z > r_1$ из (21) получаем связь оптической толщины $\tau = kz$ с коэффициентом α :

$$\tau = \ln[(6\alpha + 1)/6\alpha]. \quad (23)$$

Представленные зависимости (18)–(23) обеспечивают выявление оптимальных условий горения ОР, которые характеризуются значениями $\alpha \approx 1/4$ для $kr_1 < 1$. В этом случае форма переднего фронта ОР близка к полусфере ($z_3/r_1 = 0,9 \div 1,1$) для значения $S(0, z)/S_0 = 1$. Отношение $S(0, z)/S_0 = 1$ для реальных условий соответствует температуре «зажигания» ОР [1, 7]. В частности, для воздуха температура «зажигания» $T_3 \approx 12000^\circ\text{K}$.

С помощью соотношений (20) – (23) проведены расчеты профиля потенциала тепловых потерь $S(0, z)/S_0$ вдоль оптической оси, которые представлены совместно с экспериментальными данными на рис. 1. Для экспериментальных значений [7] распределения температуры $T(0, z)/T_0$ (рис. 1, кривая 1) с учетом термодинамического равновесия в плазме ОР с помощью привлечения функции $S(T)$ [1, 4] представлено распределение $S(0, z)/S_0$ (рис. 1, кривая 2). Как видно из рисунка, наблюдается хорошее совпадение экспериментальных (кривая 2) и теоретических данных (кривая 3). Слабое различие экспериментальных и теоретических данных на периферийных участках в основном связано с

ошибкой определения из экспериментальных данных точки $(z_3, 0)$ объема ОР, в которой происходит максимальное поглощение излучения.

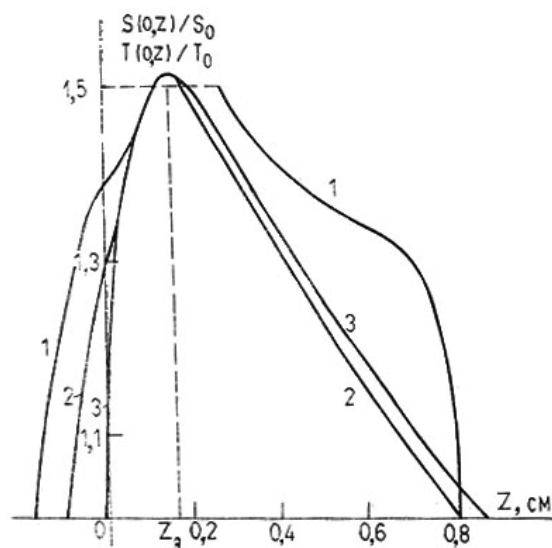


Рис. 1. Распределение температуры и потенциала тепловых потерь вдоль ОР. 1 — экспериментальные данные [7]; 2 — расчет $S(0, z)/S_0$ для экспериментальных результатов; 3 — расчет $S(0, z)/S_0$ по формулам (20) — (23)

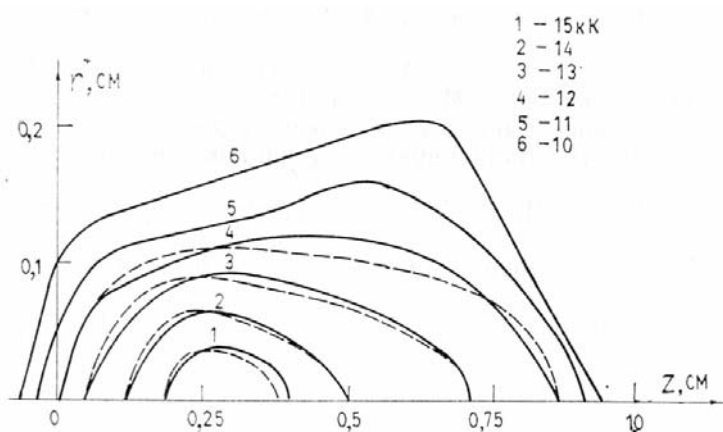


Рис. 2. Двумерное поле температуры в ОР: экспериментальные данные (—) [7]; — расчет (---) ($kr_1 = 0,07$)

Профиль температуры ОР вдоль оптической оси имеет тот же немонотонный вид, характеризующийся малой шириной переднего фронта в отличие от заднего, что и для профиля температур ОР, полученного численным методом с привлечением одномерной модели [4].

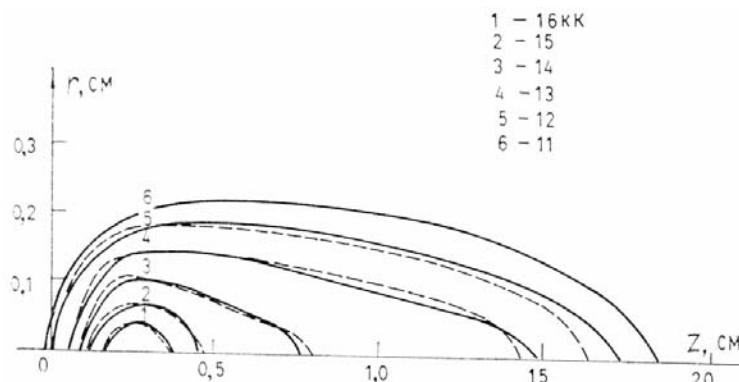


Рис. 3. Двумерное поле температуры в ОР: экспериментальные данные (—) [7]; расчет (---) ($kr_1 = 0,11$)

На рис. 2 и 3 представлены двумерные поля температур для воздушного ОР, рассчитанные по формулам (17)–(22) для $kr_1 = 0,07; 0,11$ и экспериментальные данные, полученные методами интерферометрии для воздушного ОР [7]. Различия расчетных и экспериментальных данных не превышают 7%, что указывает на достаточно высокую точность полученного решения. Обычно экспериментальные и расчетные данные различаются на 20–50%, а в ряде случаев математические модели носят качественный характер [1, 3, 7] и их сравнение с экспериментом не осуществляется.

1. Райзер Ю. П. Основы современной физики газоразрядных процессов — М.: Наука, 1980.
2. Даньшиков Е. В., Дымшаков А. В., Лебедев Ф. В., Рязанов Л. В. — Квантовая электроника, 1985, т. 12, № 9, с. 1946.
3. Райзер Ю. П. — Квантовая электроника, 1984, т. 11, № 1, с. 64.
4. Райзер Ю. П., Суржиков С. Т. — Квантовая электроника, 1984, т. 11, с. 230.
5. Герасименко М. В., Козлов Г. П., Кузнецов В. А. — Квантовая электроника, 1983, т. 10, № 4, с. 709.
6. Ахтырченко Ю. В., Васильев А. Л., Высоцкий Ю. П., Сошников В. Н. — Квантовая электроника, 1983, т. 10, № 5, с. 989.
7. Fowler M. C., Smith D. C. — J. Appl. Phys., 1975, v. 46, № 1, p. 138.
8. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1972.
9. Тихонов Н. Н., Васильева А. В., Свешников А. Г. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1980.
10. Шехтер Р. Вариационный метод в инженерных расчетах. — М.: Наука, 1971.
11. Бердичевский В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983.
12. Карслоу Х. С., Егер Д. К. Теплопроводность твердых тел. — М.: Наука, 1964.
13. Лыков А. В. Теория теплопроводности. — М.: Высшая школа, 1967.

Институт оптики атмосферы
СО АН СССР, Томск

Поступила в редакцию
18 ноября 1987 г.

A. S. Tobolkin. Two-Dimensional Optical Discharge Temperature Field.

The heat-transfer equation for the optical discharge was solved using analytic methods. Relations for the reconstruction of the 2-D plasma temperature field and that for the discharge thermal layer were obtained. The 2-D heat-loss potential and temperature field for the air plasma were calculated.

The theoretical predictions and the experimental observations were compared to show the feasibility of the resulting solutions for the study of inhomogeneous plasmoids.