<Оптика атмосферы и океана>, **8**, N 3 (1995)

УДК 62–533

Г.Л. Дегтярев, А.В. Маханько, А.С. Чернявский

АЛГОРИТМ АВТОЮСТИРОВКИ СЕГМЕНТНОГО ЗЕРКАЛА ПО ПРОИЗВОЛЬНОМУ ИСТОЧНИКУ ИЗЛУЧЕНИЯ

Предлагается итерационный метод компенсации искажений волнового фронта (ВФ) по измерениям на каждом шаге итераций интенсивности в двух параллельных плоскостях, близких к фокальной плоскости.

Для сегментного адаптивного зеркала на основе физической модели формирования изображения построен алгоритм указанной компенсации ВФ, дана его математическая интерпретация, показано, что при малых искажениях ВФ алгоритм удовлетворяет условиям сходимости. Приведены примеры численного моделирования задачи компенсации искажений ВФ данным методом.

Рассматривается оптическая система (ОС) с адаптивным зеркалом из n сегментов. Введем вектор $\zeta_i = (\beta_i, \gamma_i)$, где β_i, γ_i – угловые отклонения i-го сегмента относительно двух взаимно перпендикулярных осей в собственной системе координат.

Разобьем область выходного зрачка на N подобластей, соответствующих отдельным сегментам зеркала. Если в каждой подобласти, соответствующей отдельному сегменту зеркала, ввести локальные координаты ξ_i, η_i, то в пределах i-го сегмента функция аберраций линейна и имеет имеет вид

$$W(\xi_i, \eta_i) = \nu_i + \beta_i\, \xi_i + \gamma_i\, \eta_i, \tag{1}$$

где ν_i – параллельное смещение плоскости i-го сегмента. Введем вектор пространственных частот $\mathbf{f}_k = (U_k, V_k)$ столь малым, что вектор $\lambda\, R\, \mathbf{f}_k$ не будет превышать конструктивного зазора между сегментами (λ – длина волны; R – радиус сферы Гаусса). В [1] показано, что на этих частотах для линейной функции аберраций (1) функция частотного отклика всего выходного зрачка $H(\mathbf{f}_k)$ будет равна сумме частотных откликов отдельных сегментов и не зависит от параллельных смещений ν_i сегментов:

$$H(\mathbf{f}_k) = (1 / n) \sum_{i=1}^{n} \exp\, [\mathrm{i}\; k\, \lambda\, R\, \mathbf{f}_k * \zeta_i], \tag{2}$$

где символ «$*$» обозначает скалярное произведение векторов; i – мнимая единица. Последнее обстоятельство позволяет построить алгоритм компенсации угловых отклонений β_i, γ_i (задача юстировки) и, следовательно, отделить задачу юстировки от задачи фазировки (компенсации параллельных смещений).

Используя частотный отклик (2) оптической системы с неизвестной функцией аберраций (1) и предполагая, что ОС пространственно инвариантна, процесс формирования изображения в частотной плоскости представим в виде [2]

$$J(\mathbf{f}_k) = H(\mathbf{f}_k)\, J_0(\mathbf{f}_k), \tag{3}$$

где $J(\mathbf{f}_k)$ и $J_0(\mathbf{f}_k)$ являются обратными двумерными преобразованиями Фурье от распределения интенсивностей в плоскостях изображения и предмета соответственно. За счет введения дополнительных известных аберраций $\delta W(\xi, \eta)$ определим частотный отклик H^+, отличный от H.

Введем вектор $\Delta\,\zeta_i = (\Delta\,\beta_i, \Delta\,\gamma_i)$, где $\Delta\,\beta_i$, $\Delta\,\gamma_i$ – дополнительные известные отклонения i-го сегмента. Тогда с учетом (2)

$$H^{+}(\mathbf{f}_k) = (1 / n) \sum_{i=1}^{n} \exp\,[\mathrm{i}\;k\,\lambda\,R\,\mathbf{f}_k * (\zeta_i + \Delta\,\zeta_i)]. \tag{2′}$$

Соответствующее ему J^{+} построим из распределения интенсивности I^{+} в параллельной плоскости, смещенной от исходной на небольшое расстояние вдоль оптической оси, что эквивалентно введению известной волновой аберрации $\delta W(\xi, \eta)$ (расфокусировки). Учитывая (3), получаем

$$J^{+}(\mathbf{f}_k) = H^{+}(\mathbf{f}_k)\, J_0(\mathbf{f}_k). \tag{3′}$$

Соотношения (3) и (3′) позволяют записать тождество

$$H^{+}(\mathbf{f}_k) / H(\mathbf{f}_k) = J^{+}(\mathbf{f}_k) / J(\mathbf{f}_k) = Y(\mathbf{f}_k). \tag{4}$$

На малых частотах соотношение (4) будет иметь смысл и определять зависимость функции частотного отклика только от результатов измерения $Y(\mathbf{f}_k)$.

В данной статье предлагается решить задачу определения 2 n-мерного вектора неизвестных аберраций $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n)$ итеративным методом из нелинейного тождества (4) по измерениям на каждом шаге итераций правой части при n частотах $\mathbf{f}_k$ (k=1, ..., n). Для понимания предлагаемого алгоритма решения обратимся к простому примеру. Рассмотрим систему, на вход которой подается известная величина x, а на выходе измеряется величина $\exp(z - x)$. Назовем x управлением. Как по измеряемой величине $\exp(z - x)$ определить неизвестную величину z? Будем искать решение методом последовательных приближений (простых итераций). Если измеряемую величину представить в виде разложения

$$\exp\,(z - x) = 1 + (z - x) + \Delta$$

и ввести обозначения $x_n = x$, $x_{n+1} = z + \Delta$, то получаем итерационную схему

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \tag{5}$$

где функция $\varphi(x) = x + \exp(z - x) - 1$ удовлетворяет условию сходимости [3]

$$\left|\varphi'(x)\right| < 1 \tag{6}$$

при малых z и x. Выбирая некоторое нулевое приближение x_0, по схеме (5) получим $x_n \to z$.

Особо отметим тот факт, что при вычислении функции (6) слагаемое $\exp(z - x)$ не вычисляется математически, а является результатом измерения (выходом системы), зависящего от управления x. Поэтому можно сказать, что в данном методе на каждом шаге итераций формируется такое управление x_{n+1}, которое переводит систему в новое состояние, при котором $x \to z$.

При использовании подобных методов возникает вопрос, вызывают ли случайные ошибки измерения изменение решения z? Метод простых итераций имеет важное достоинство: в нем не накапливаются ошибки вычисления. Ошибка вычислений эквивалентна некоторому ухудшению очередного приближения.

Идею решения этого модельного приема применим к задаче юстировки. Обозначим через $\boldsymbol{\zeta}^{Y} = (\zeta_1^{Y}, \zeta_2^{Y}, ..., \zeta_n^{Y})$ 2 n-мерный вектор угловых отклонений ВФ, вызванный управляемыми отклонениями сегментов. Суммарный ВФ при компенсирующем управлении сегментами определится вектором разности $\boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{\zeta}^{Y}$. С учетом управляющих отклонений и (2), (2′)

$$H(\mathbf{f}_k, \boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{\zeta}^{Y}) = (1 / n) \sum_{i=1}^{n} \exp\,[\mathrm{i}\;k\,\lambda\,R\,\mathbf{f}_k * (\zeta_i - \zeta_i^{Y})]; \tag{7}$$

$$H^{+}(\mathbf{f}_k, \zeta - \zeta^{Y} + \Delta\,\zeta) = (1\,/\,n) \sum_{i=1}^{n} \exp\,[\mathrm{i}\,k\,\lambda\,R\,\mathbf{f}_k * (\zeta_i - \zeta_i^{Y} + \Delta\,\zeta_i)]. \qquad (7')$$

Допустим для начала, что источник изображения точечный, тогда, учитывая, что $J_0(\mathbf{f}_k) \equiv 1$,

$$H^{+}(\mathbf{f}_k, \zeta - \zeta^{Y} + \Delta\,\zeta) = J^{+}(\mathbf{f}_k, \zeta - \zeta^{Y} + \Delta\,\zeta). \qquad (8)$$

Представляя экспоненту по формуле Маклорена

$$\exp\,[\mathrm{i}\,k\,\lambda\,R\,\mathbf{f}_k * (\zeta_i - \zeta_i^{Y})] = 1 + \mathrm{i}\,k\,\lambda\,R\,\mathbf{f}_k * (\zeta_i - \zeta_i^{Y}) + \Delta,$$

функцию H^{+} можно записать в виде

$$H^{+}(\mathbf{f}_k, \zeta - \zeta^{Y} + \Delta\,\zeta) = (1\,/\,n) \sum_{i=1}^{n} \exp\,[\mathrm{i}\,k\,\lambda\,R\,\mathbf{f}_k * \Delta\,\zeta_i]\,(1 + \mathrm{i}\,k\,\lambda\,R\,\mathbf{f}_k * (\zeta_i - \zeta_i^{Y}) + \Delta) = H^{+}(\mathbf{f}_k, \Delta\,\zeta) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} a_{ki}(\mathbf{f}_k) * (\zeta_i - \zeta_i^{Y}) + \Delta_1,$$

где

$$a_{ki}(\mathbf{f}_k) = \mathrm{i}\,k\,(1\,/\,n)\,\mathbf{f}_k \exp\,[\mathrm{i}\,k\,\lambda\,R\,\mathbf{f}_k * \Delta\,\zeta_i], \qquad (9)$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ki}(\mathbf{f}_k)(\zeta_i - \mathbf{z}_i^{Y}) = H^{+}(\mathbf{f}_k, \zeta - \zeta^{Y} + \Delta\,\zeta) - H^{+}(\mathbf{f}_k, \Delta\,\zeta) - \Delta_1. \qquad (10)$$

Введем вектор длиной $2\,n$:

$$b(\mathbf{f}_k, \zeta - \zeta^{Y}) = H^{+}(\mathbf{f}_k, \zeta - \zeta^{Y} + \Delta\,\zeta) - H^{+}(\mathbf{f}_k, \Delta\,\zeta) = J^{+}(\mathbf{f}_k, \zeta - \zeta^{Y} + \Delta\,\zeta) - H^{+}(\mathbf{f}_k, \Delta\,\zeta), \qquad (11)$$

который определяется измерением J^{+} и известной функцией $H^{+}(\mathbf{f}_k, \Delta\,\zeta)$, и действительную матрицу A размером $2\,n \times 2\,n$ с элементами $a_{k\,i}$. Тогда, обозначая через A^{-1} обратную матрицу к A, (10) можно представить в матричной форме

$$A^{-1} * b(\zeta - \zeta^{Y}) + \zeta^{Y} = \zeta - A^{-1}\,\Delta_1\,. \qquad (12)$$

Полагая $\zeta_n = \zeta^{Y}$ и $\zeta_{n+1} = \zeta + A^{-1}\,\Delta_1$, получаем итерационную схему $\zeta_{n+1} = \varphi(\zeta_n)$, где вектор

$$\varphi(\zeta_n) = A^{-1}\,[b(\zeta - \zeta_n) + A\,\zeta_n].$$

Вектор $\varphi(\zeta_n)$ имеет матрицу производных

$$\varphi'(\zeta_n) = A^{-1}\,[b'(\zeta - \zeta_n) + A], \qquad (13)$$

и вопрос свелся к исследованию матрицы $[b'(\zeta - \zeta_n) + A]$. Достаточным условием сходимости является ограничение нормы матрицы производной единицей [3]

$$||\varphi'|| < 1. \qquad (14)$$

Учитывая определения b и A, найдем

$$[b'(\zeta - \zeta_n) + A] = f_k \exp\,[\mathrm{i}\,k\,\lambda\,R\,\mathbf{f}_k * \Delta\,\zeta]\,(1 - \exp\,[\mathrm{i}\,k\,\lambda\,R\,\mathbf{f}_k * (\zeta - \zeta_n)]). \qquad (15)$$

Сравнивая (15) с (10), видим, что элементы матрицы производных вектора $[b(\zeta - \zeta_n) + A\,\zeta_n]$ получаются из элементов матрицы A умножением на множитель

$$1 - \exp\,[\mathrm{i}\,k\,\lambda\,R\,\mathbf{f}_k * (\zeta - \zeta_n)]. \tag{16}$$

Вводя ограничения на величину частот $\mathbf{f}_k$ и аберраций ζ, можно сделать множители (16) достаточно малыми, чтобы матрица производных (15) удовлетворяла неравенству (14) при заданной матрице A^{-1}, тем самым будет обеспечена сходимость итерационного алгоритма $\zeta_{n+1} = \varphi(\zeta_n)$ для автоюстировки оптической системы по изображению точечного источника.

Теперь рассмотрим случай, когда источник излучения произвольный. Модель формирования изображения в частотной плоскости с учетом управления из (4)

$$H^{+}(\mathbf{f}_k, \zeta - \zeta^{Y} + \Delta\,\zeta) = H(\mathbf{f}_k, \zeta - \zeta^{Y})\,\frac{J^{+}(\mathbf{f}_k, \zeta - \zeta^{Y} + \Delta\,\zeta)}{J(\mathbf{f}_k, \zeta - \zeta^{Y})}\,. \tag{17}$$

Разложим $H^{+}(\mathbf{f}_k, \zeta - \zeta^{Y})$ в ряд Маклорена. Опуская промежуточные расчеты, получим, что

$$H(\mathbf{f}_k, \zeta - \zeta^{Y}) = H(\mathbf{f}_k, 0) + \mathrm{i}\,k\,\lambda\,R\,\mathbf{f}_k\,\zeta_{\text{ср}} + \Delta_2,$$

где $H(\mathbf{f}_k, 0)$ – функция отклика при нулевых отклонениях ВФ (ОС без аберраций); $\zeta_{\text{ср}} = (1/n)\sum_{i=1}^{n}(\zeta_i - \mathbf{z}_i^{Y})$ – средний наклон ВФ, который определяется моментами 1-го порядка от распределения интенсивности. Полагая правую часть в (17) равной

$$H(J^{+}/J) \approx (H(\mathbf{f}_k, 0) + \mathrm{i}\,k\,\lambda\,R\,\mathbf{f}_k\,\zeta_{\text{ср}})\,(J^{+} / J),$$

вводим ошибку $\Delta = \Delta_2(J^{+}/J)$ измерений функции H^{+}. При малых аберрациях можем допустить такую ошибку в измерении при определении по H^{+} вектора ζ итерационным методом.

Численное моделирование при $x_0 = 0$ и различных аберрациях ВФ показало, что управление x_n отслеживает вектор неизвестных отклонений ζ, причем $n \to \infty$ $x_n \to \zeta$, а приращение $\Delta\,x_n \to 0$, т.е. на малых пространственных частотах содержится достаточно информации для решения задачи компенсации угловых аберраций. Алгоритм имеет хорошую сходимость, при этом важно отметить, что вектор измерения **Y** и, следовательно, алгоритм инвариантны к виду распределения интенсивности по источнику излучения. Таким образом, получаем систему автоюстировки сегментного зеркала по произвольному источнику излучения.

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1970. 527 с.
2. Дегтярев Г.Л., Маханько А.В., Чернявский А.С. // Тезисы докл. молодежной науч.-техн. конф. М.: МАТИ, 1993. Ч. 1. С. 75.
3. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.151 с.

Казанский государственный технический университет им. А.Н. Туполева

Поступила в редакцию 16 августа 1994 г.

G.L. Degtyarev, A.V. Makhan'ko, A.S. Chernyavskii. **Algorithm of a Segmented Mirror Autotuning to an Arbitrary Radiation Source.**

An iteration method of wave front (WF) distortions compensating by intensities measurements at each iteration step in two parallel plates close to the focal one is proposed.

The algorithm was built for a segmented adaptive mirror based on physical model of an image formation and its mathematical interpretation. It is shown to comply with convergence conditions; the examples of numerical modeling of the problem of WF divergence compensation by that method are presented.