«Оптика атмосферы», **3**, № 3 (1990)

УДК 535.3

Д.А. Безуглов, А.А. Вернигора

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФАЗОВОГО ФРОНТА В БАЗИСЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИЗМЕРЕНИЙ ДАТЧИКА ГАРТМАНОВСКОГО ТИПА

Предложена численная реализация алгоритма восстановления фазового фронта в виде разложения по системе ортогональных полиномов по результатам измерения частных производных фазового фронта в точках апертуры датчика Гартмана. Приведен пример реализации алгоритма при использовании в качестве ортогонального базиса полиномов Цернике, представленных в декартовой системе координат.

Основным элементом адаптивных оптических систем (АОС) фазового сопряжения является датчик волнового фронта. С его помощью проводят измерения фазы в различных точках апертуры оптической системы с последующим «сшиванием» измерений и формированием распределения фазы волнового фронта по всему зрачку. В силу специфики квадратичного детектирования в оптике чаще всего используются датчики интерференционного и гартмановского типов [1, 2], которые позволяют измерять разности фаз между соседними участками апертуры или локальные наклоны волнового фронта, пропорциональные величинам вида $\kappa^{-1}\dfrac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x_{ij}}$, $\kappa^{-1}\dfrac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y_{ij}}$, где κ — волновое число, $\varphi(x, y)$ — функция, описывающая распределение фазы на апертуре.

Известен алгоритм [3, 4] восстановления фазового фронта по результатам измерений частных производных в точках апертуры, предполагающий при обработке результатов измерений от $m\times n$ субапертур решение системы из $(m+1)\,(n+1)$ линейных алгебраических уравнений. При решении такой системы не удается применить рекуррентную процедуру. При больших m и n это приводит к повышенным вычислительным затратам и ограничивает применение указанного алгоритма в реальном масштабе времени, а уменьшение m и n ведет к увеличению ошибки аппроксимации фазового фронта. В последнее время в технике адаптивной оптики возрос интерес [5] к применению в качестве корректоров фазового фронта гибких зеркал с функциями отклика, близкими к ортогональным полиномам Цернике. При этом является актуальной задача вычисления управляющих сигналов для зеркал на современных ЭВМ с минимальными вычислительными затратами.

В данной работе рассмотрен метод восстановления фазового фронта в виде разложения по системе ортогональных функций по результатам измерений датчика гартмановского типа.

Рассмотрим задачу в следующей постановке. Пусть на прямоугольной апертуре S размером $(a, b)\times(c, d)$, состоящей из $m\times n$ субапертур, датчик Гартмана измеряет значения частных производных вида $\dfrac{\partial\varphi(x_i,y_i)}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial\varphi(x_j,y_j)}{\partial y}$ в середине каждой субапертуры S_{ij}. Зададим на интервалах (a, b) и (c, d) две системы ортогональных функций $\{\mu_\kappa(x)\}$ и $\{\lambda_\kappa(y)\}$, $\kappa=\overline{0,N}$ из пространства $C'(S)$, таких, что скалярные произведения вида

$$(\mu_\kappa,\ \mu_r)=\int\limits_a^b \mu_\kappa(x)\,\mu_r(x)\,\rho(x)\,dx=0 \quad \text{при } r\neq\kappa,$$
$$(\lambda_\kappa,\ \lambda_r)=\int\limits_c^d \lambda_\kappa(y)\,\lambda_r(y)\,\rho(y)\,dy=0 \quad \text{при } r\neq\kappa \tag{1}$$

и удовлетворяющих следующим дифференциальным уравнениям [6]:

$$\frac{\partial}{\partial x}[\sigma(x)\,\rho(x)]=\tau(x)\,\rho(x);\ \frac{\partial}{\partial y}[\sigma_1(y)\,\rho_1(y)]=\tau_1(y)\,\rho_1(y) \tag{2}$$

при условиях

$$x^m\sigma(x)\,\rho(x)\,|_{x=a,b}=0;\ y^m\sigma_1(y)\,\rho_1(y)\,|_{y=c,d}=0,\ \ (m=0,\ 1,\ldots), \tag{3}$$

где

$$\sigma(x) = (x - a)(b - x);\ \sigma_1(y) = (y - c)(d - y);$$
$$\rho(x) = (b - x)^{\alpha}(x - a)^{\beta};\ \rho_1(y) = (c - y)^{\gamma}(y - d)^{\eta};$$
$$\tau(x) = -(\alpha + \beta + 2)x + a + b + \alpha a + \beta b;$$
$$\tau_1(y) = -(\gamma + \eta + 2)y + c + d + \gamma c + \eta d.$$

Искаженный фазовый фронт может быть представлен в виде [3, 4]

$$\varphi(x, y) = \sum_{\kappa=0}^{N} a_\kappa \psi_\kappa(x, y), \tag{4}$$

где

$$\psi_\kappa(x, y) = \mu_\kappa(x)\lambda_\kappa(y). \tag{5}$$

Ставится задача синтезировать алгоритм вычисления коэффициентов a_κ разложения вида (4) по результатам измерения значений частных производных фазового фронта в точках субапертуры.

Продифференцируем по x и y выражение (4):

$$\frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial x} = \sum_{\kappa=0}^{N} a_\kappa \frac{\partial\psi_\kappa(x, y)}{\partial x};\quad \frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial y} = \sum_{\kappa=0}^{N} a_\kappa \frac{\partial\psi_\kappa(x, y)}{\partial y}. \tag{6}$$

Тогда значения частных производных фазового фронта в точках апертуры могут быть представлены как

$$\frac{\partial\varphi(x_i, y_j)}{\partial x} = \sum_{\kappa=0}^{N} a_\kappa \frac{\partial\psi_\kappa(x_i, y_j)}{\partial x};$$
$$\frac{\partial\varphi(x_i, y_j)}{\partial y} = \sum_{\kappa=0}^{N} a_\kappa \frac{\partial\psi_\kappa(x, y_j)}{\partial y};\ i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n}. \tag{7}$$

Коэффициенты a_κ получим из условия минимума функционала вида

$$Q(a_0, a_1, \ldots a_N) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi(x_i, y_j)}{\partial x} - \sum_{\kappa=0}^{N} a_\kappa \frac{\psi_\kappa(x_i, y_j)}{\partial x}\right)^2 +$$
$$+ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi(x_i, y_j)}{\partial y} - \sum_{\kappa=0}^{N} \frac{a_\kappa\psi_\kappa(x_i, y_j)}{\partial y}\right)^2,\ i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n}. \tag{8}$$

Дифференцируя выражение (8) по a_l и приравнивая значения частных производных вида $\frac{\partial Q(a_0, a_1, \ldots, a_N)}{\partial a_l}$ к нулю, получим систему из N+1 линейных уравнений:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial\varphi(x_i, y_j)}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi_l(x_i, y_j)}{\partial y} + \frac{\partial\varphi(x_i, y_j)}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi_l(x_i, y_j)}{\partial x}\right] =$$
$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{\kappa=0}^{N} a_\kappa\left(\frac{\partial\psi_\kappa(x_i, y_j)}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi_l(x_i, y_j)}{\partial x} + \frac{\partial\psi_\kappa(x_i, y_j)}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi_l(x_i, y_j)}{\partial y}\right)\right],$$
$$N + 1 < m;\ N + 1 < n;\ l = \overline{0, N};\ i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n}. \tag{9}$$

Введем следующие обозначения:

$$\frac{\partial\varphi_\kappa(x_i, y_j)}{\partial x} = P_{\kappa ij};\ \frac{\partial\psi_\kappa(x_i, y_j)}{\partial x} = R_{\kappa ij};$$
$$\frac{\partial\varphi_\kappa(x_i, y_j)}{\partial y} = L_{\kappa ij};\ \frac{\partial\psi_\kappa(x_i, y_j)}{\partial y} = M_{\kappa ij}.$$

Учитывая свойство ортогональности производных полиномов, удовлетворяющих условиям (1), (2), (3), решение системы (9) запишется в виде

$$a_\kappa = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{L_{\kappa ij}M_{\kappa ij} + P_{\kappa ij}R_{\kappa ij}}{R_{\kappa ij}^2 + M_{\kappa ij}^2}\,. \tag{10}$$

В соответствии с формулой Родрига [6] частные производные ортогональных полиномов могут быть представлены следующими соотношениями:

$$\frac{\partial\psi_\kappa(x,\,y)}{\partial x} = \frac{\partial\mu_\kappa(x)\lambda_\kappa(y)}{\partial x} = A_\kappa A_\kappa' \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\rho(x)}\cdot\frac{d^\kappa}{dx^\kappa}(\sigma^\kappa(x)\rho(x))\right]\times$$
$$\times\left[\frac{1}{\rho_1(y)}\cdot\frac{d^\kappa}{dy^\kappa}\cdot(\sigma_1^\kappa(y)\rho_1(y))\right]; \tag{11}$$

$$\frac{\partial\psi_\kappa(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial\lambda_\kappa(y)\mu_\kappa(x)}{\partial y} = A_\kappa A_\kappa^1 \frac{d}{dy}\left[\frac{1}{\rho_1(y)}\cdot\frac{d^\kappa}{dy^\kappa}\cdot(\sigma^\kappa(y)\rho_1(y))\right]\times$$
$$\times\left[\frac{1}{\rho(x)}\cdot\frac{d^\kappa}{dx^\kappa}\cdot(\sigma^\kappa(x)\rho(x))\right]; \tag{12}$$

где A_κ, A_κ^1 — постоянные, зависящие от нормировки и определяемые по методике, изложенной в [6]. Значения частных производных $\dfrac{\partial\psi_\kappa(x_i,y_j)}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial\psi_\kappa(x_i,y_j)}{\partial x}$ для всех значений i, j, κ могут быть рассчитаны заранее.

Для восстановления фазового фронта в соответствии с (10) потребуется $P = 3Nmn$ операций. Функции отклика реальных зеркал могут не удовлетворять условиям (2), (3). Однако и в этом случае удается построить алгоритм восстановления фазового фронта.

Пусть в выражении (4) ψ_κ не удовлетворяет (2), (3) и является функцией отклика гибкого зеркала. Тогда, введя обозначения

$$\frac{\partial\varphi(x_i,\,y_j)}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi_l(x_i,\,y_j)}{\partial y} + \frac{\partial\varphi(x_i,\,y_j)}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi_l(x_i,\,y_j)}{\partial x} = b_{lij};$$
$$\frac{\partial\psi_\kappa(x_i,\,y_j)}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi_l(x_i,\,y_j)}{\partial x} + \frac{\partial\psi_\kappa(x_i,\,y_j)}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi_l(x_i,\,y_j)}{\partial y} = c_{\kappa lij},$$

систему (9) можно записать как

$$\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_\kappa c_{\kappa lij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{lij},\ \ l = \overline{1,\,N}, \tag{13}$$

или в матричной форме:

$$Da = F, \tag{14}$$

где D — матрица правой части системы линейных уравнений (13) с элементами $d_{\kappa l} = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} c_{\kappa lij}$; a — вектор-строка искомых коэффициентов; F — вектор-столбец правой части системы с элементами

$$f_l = \sum_{i=1}^{m}\times\sum_{j=1}^{n} b_{lij}.$$

Решение системы (14) запишется в виде

$$a = D^{-1}F. \tag{15}$$

Матрица D^{-1} для АОС вычисляется заранее, так как ее элементы не зависят от измеряемых датчиком гартмановского типа локальных наклонов фазового фронта на субапертурах. Таким образом, обработка результатов измерений фазового фронта в реальном масштабе времени сведется к вычислению элементов F в соответствии с (14) и умножению матрицы D^{-1} на F. Объем вычислительных затрат при этом будет равен $P_1 = N(2N + 3mn - 1)$.

	$\Psi_к$	$\frac{\partial \Psi_к}{\partial x}$	$\frac{\partial \Psi_к}{\partial y}$
2	$2x$	2	0
3	$2y$	0	2
4	$\sqrt{3}(2x^2+2y+ +1)$	$\sqrt{3}\,4x$	$\sqrt{3}\,4y$
5	$2\sqrt{6}\,xy$	$2\sqrt{6}\,y$	$2\sqrt{6}\,x$

Пример. Пусть функции отклика корректора соответствуют полиномам Цернике [4]. Первый полином можно не учитывать, так как он описывает несущественную для АОС среднюю фазу на апертуре [4]. В таблице сведены значения производных от полиномов Цернике при $N = 4$, записанных в декартовой системе координат.

Тогда матрица D запишется в виде

$$\begin{vmatrix} \Sigma 4 & \Sigma 0 & \Sigma 8\sqrt{3}x & \Sigma 4\sqrt{6}y \\ \Sigma 0 & \Sigma 4 & \Sigma 8\sqrt{5}y & \Sigma 4\sqrt{6}x \\ \Sigma 8\sqrt{3}x & \Sigma 8\sqrt{3}y & \Sigma 54(x^2+y^2) & \Sigma 12\sqrt{2}xy \\ \Sigma 4\sqrt{6}y & \Sigma 4\sqrt{6}x & \Sigma 12\sqrt{2}yx & \Sigma 24(y^2+x^2) \end{vmatrix}, \tag{16}$$

где символом Σ обозначена двойная сумма $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j)$, x_i и y_j при $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ — заданные координаты субапертур датчика Гартмана на S. Матрица D обращается один раз, перед началом вычислений. Дальнейшая обработка сводится к вычислению вектора правой части в соответствии с (14) и решению системы (15).

Управляющие программы, реализующие алгоритмы (10) и (15), были составлены на языке PL—1 для ЭВМ серии ЕС.

Выводы. При выборе функций отклика гибких зеркал предпочтение необходимо отдавать функциям, для которых выполняется условие ортогональности их производных (2), (3) или близких к ним. Для таких зеркал объем вычислительных затрат становится минимальным. Если это невозможно, то обработку измерений следует проводить в соответствии с (15). При этом также будет достигаться выигрыш в вычислительных затратах по сравнению с известными алгоритмами [3, 4], так как для восстановления фазового фронта методами, предложенными в [3, 4] при $n = m$, например, потребуется не менее $2/3\,(n+1)^6$ операций. Предложенные алгоритмы могут быть легко реализованы на ЭВМ. При этом дальнейшее увеличение быстродействия АОС может быть достигнуто при переходе к параллельной схеме вычислений. При использовании гибких зеркал с функциями отклика, близкими к базису Цернике, матрица D^{-1} симметричная. В силу этого нет необходимости рассчитывать и хранить в памяти ЭВМ все $(N+1)^2$ ее элементов, а можно ограничиться лишь $N(N+1)/2$ элементами.

1. Rimmer M.P. //Appl. Optics. 1974. V. 13. № 3. P. 623.
2. Yellin M. //JOSA. 1975. V. 65. № 2. P. 271.
3. Устинов Н.Д. .Матвеев И.Н., Протопопов В.В. Методы обработки оптических полей в лазерной локации. М.: Наука, 1983. 272 с.
4. Адаптивная оптика /Под ред. Э.А. Витриченко. М.: Мир, 1980. 456 с.
5. Воронцов М.А., Кудряшов А.В., Самаркин В.В., Шмальгаузен В.И. //Оптика атмосферы. 1988. Т. 1. № 6. С. 118—120.
6. Никифоров А.Ф., Уваров В.В. Основы теории специальных функций. М.: Наука, 1974. 303 с.

Поступила в редакцию
17 апреля 1989 г.

D.A. Bezuglov, A.A. Vernigora. **Restoration of the Phase Front in the Basis of Orthogonal Functions Using the Results of Measurements with the Hartmann Type Sensor.**

A numerical version of the algorithm for restoration of the phase front in the form of a series expansion over the orthogonal polynomials using the results of phase front partial derivatives measurements at the points of the Hartmann sensor aperture is proposed. An example of the algorithm based on the use of Zernike polynomials, represented in the Cartesian coordinates, as the orthogonal basis is given.