

ОПТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И БАЗЫ ДАННЫХ ОПТИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
ОБ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЕ

УДК.551.521

А.В. Васильев

**Метод последовательных приближений
при учете рассеяния теплового излучения
на аэрозольных образованиях в атмосфере.
Часть 3. Приложения к математическому
моделированию измерений**

Научно-исследовательский институт физики Санкт-Петербургского университета

Поступила в редакцию 2.12.2003 г.

Рассмотрены возможности использования приведенного в предыдущих частях статьи алгоритма при математическом моделировании измерений с учетом необходимости вычисления свертки монохроматической интенсивности с аппаратной функцией прибора. Приведен краткий обзор основных методов эффективного вычисления указанной свертки. Предложены новый прием, позволяющий существенно повысить скорость расчетов, и модификация применительно к нему вычислительного алгоритма, описанного во второй части статьи.

Введение

В первых двух частях статьи [1,2] рассмотрены метод последовательных приближений для задач рассеяния теплового излучения в атмосфере и соответствующий ему вычислительный алгоритм для монохроматического излучения. Но при математическом моделировании измерений, выполняемых реальными приборами, возникает необходимость вычисления свертки полученной монохроматической интенсивности излучения с аппаратной функцией (функциями) прибора [3]. В приближении влияния на результаты измерений только спектральной аппаратной функции можно записать

$$I(\Delta\nu, z, \vartheta, \varphi) = \int_{\nu_1}^{\nu_2} I(\nu', z, \vartheta, \varphi) y(\nu') d\nu' / \int_{\nu_1}^{\nu_2} y(\nu') d\nu', \quad (1)$$

где z, ϑ, φ — высота, надирный угол и азимут визирования [1]; $y(\nu)$ — аппаратная функция измерительного прибора; $I(\Delta\nu, z, \vartheta, \varphi)$ — интенсивность на выходе прибора (моделируемая величина), $I(\nu, z, \vartheta, \varphi)$ — монохроматическая интенсивность с частотой ν на входе прибора. Для поляризованного излучения [2] интенсивности в (1) заменяются на векторы Стокса, а аппаратная функция $y(\nu)$ — на соответствующую матрицу размера 4×4 . При этом формула (1) записывается для каждой из компонент вектора Стокса, необходимая компонента в знаменателе получается в результате умножения матрицы $y(\nu)$ на единичный вектор. Таким образом, учет поляризации не вносит новых проблем в моделирование измерений и лишь ради краткости далее договоримся пользоваться скалярной формой записи (1).

Как отмечено в [1], при заданных характеристиках прибора: аппаратной функции $y(\nu)$ и определяемых ею границах ν_1 и ν_2 спектрального интервала $\Delta\nu$ формально задача сводится только к расчету монохроматической интенсивности $I(\nu, z, \vartheta, \varphi)$, алгоритм которого для рассматриваемого метода последовательных приближений приведен в [2]. Однако, как хорошо известно, при применении квадратурных формул к числителю (1) возникают трудности, связанные с обусловленными селективным молекулярным поглощением сильными осцилляциями монохроматической интенсивности $I(\nu, z, \vartheta, \varphi)$, что выводит задачу интегрирования в (1) за рамки чисто технической и требует разработки эффективных алгоритмов указанного интегрирования. Особенно это важно при учете рассеяния, где и расчет монохроматической интенсивности также достаточно сложен и громоздок [1, 2]. Ниже приводится краткий обзор известных подобных алгоритмов и предлагается новый прием вычисления интеграла (1). Отметим, что ограничения на ширину интервала $\Delta\nu$, неявно присутствующие в некоторых алгоритмах, не снижают их общности, поскольку интеграл по любому, сколь угодно большому, интервалу $\Delta\nu$ может быть разбит на сумму интегралов по требуемым малым интервалам.

Большинство из приводимых ниже алгоритмов использовалось автором при практических вычислениях.

Немонохроматическое приближение

Если интервал интегрирования $\Delta\nu$ достаточно мал, то можно пренебречь изменением на нем всех величин, кроме объемного коэффициента молекулярного поглощения. Для вычислений без учета

рассеяния это приводит к широко используемому приближению монохроматической функции пропускания [3], когда интеграл (1) вычисляется только для отдельной функции пропускания по молекулярному поглощению (см. [1, формулу (3)]), а для всех прочих величин используются средние значения на $\Delta\nu$ и интенсивность на выходе прибора рассчитывается с указанными величинами как для монохроматического случая.

При учете рассеяния для записи интенсивности в виде ряда по кратностям рассеяния и отражения — [1, формулы (20), (23)], отдельное интегрирование операторов по частоте выполнить нельзя. Однако это не означает принципиальную невозможность использования монохроматического приближения — все зависит от конкретных задач, спектральных интервалов и требований к точности расчетов. В алгоритме, приведенном в [2], интегрированию по (1) подлежат оператор прямого излучения $T_0(j, j', k')$ и альbedo однократного рассеяния $\omega_0[\tau(j)]$.

Можно указать два случая, когда монохроматическое приближение является достаточно точным: при значительном преобладании поглощения над рассеянием ($\omega_0 \rightarrow 0$) в пределе, дающем математически корректный случай отсутствия рассеяния, и наоборот — при значительном преобладании рассеяния над поглощением ($\omega_0 \rightarrow 1$) в пределе, дающем отсутствие влияния селективности поглощения.

Выбор неравномерной сетки интегрирования

Для оптимизации вычисления числителя в (1) шаг интегрирования, очевидно, следует выбирать с учетом конкретных особенностей спектральной зависимости интенсивности $I(\nu, z, \vartheta, \Phi)$. При этом для достижения достаточной точности интегрирования удобна квадратурная формула трапеций с удвоением шага. Пусть $Y = \int_a^b f(x)dx$ и задана начальная сетка $x_i, i = 1, \dots, N$ ($x_1 = a, x_N = b$). Тогда

$$Y_m = Y_{m-1} / 2 + \sum_{i=1}^{N-1} \Delta_{i,m} \sum_{k=1}^{2^m-1} f(x_i + (2k-1)\Delta_{i,m}),$$

$$Y_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} (f(x_{i+1}) + f(x_i))\Delta_{i,0},$$

$$\Delta_{i,m} = (x_{i+1} - x_i) / 2^m. \quad (2)$$

Итерации по (2) прекращаются, когда $|Y_m - Y_{m-1}| < \epsilon$, где ϵ — параметр, определяющий точность вычислений. Алгоритм (2) очень удобен тем, что сколько бы ни потребовалось итераций, функция $f(x)$ вычисляется в каждой точке сетки интегрирования только один раз и соответствующие значения даже не требуется хранить в памяти компьютера.

При применении (2) для вычисления интеграла (1) основной задачей становится выбор начальной

частотной сетки $\nu'_i, i = 1, \dots, N$. Очень простым, но достаточно эффективным приемом оказался выбор в качестве ν'_i либо центральных частот содержащихся в интервале $\Delta\nu$ линий поглощения, либо частот посередине между ними (либо и тех, и других). Действительно, в этом случае при итерациях по (2) гарантируется учет всех спектральных особенностей, связанных с каждой линией поглощения, при этом выбор центральных частот эффективен при слабом поглощении, а срединных — при сильном. Похожая, но более сложная схема выбора ν'_i предложена в [4], где для каждой линии задается собственная частотная сетка, с существенно разным шагом для центра, периферии и крыльев линии.

Метод Монте-Карло

Интегралы вида (1) идеально подходят для вычислений по методу Монте-Карло. Действительно, по определению интеграла вероятности (Стильбеса) справедливо тождество

$$I(\Delta\nu, z, \vartheta, \Phi) \equiv M_{\psi(\nu)}[I(\nu, z, \vartheta, \Phi)],$$

$$\psi(\nu) = y(\nu) / \int_{\nu_1}^{\nu_2} y(\nu')d\nu', \quad (3)$$

утверждающее, что искомая интенсивность есть математическое ожидание монохроматической интенсивности, частота которой трактуется как случайная величина, распределенная на интервале $[\nu_1, \nu_2]$ с плотностью вероятности $\psi(\nu)$, вычисляемой для аппаратной функции прибора $y(\nu)$ по (3). Таким образом, смоделировав частоту как случайную величину и задавшись определенной точностью расчетов, можно достаточно эффективно вычислять интеграл (1), что и было реализовано в работах [4, 5]. Подробно алгоритм компьютерного моделирования случайной частоты и оценки точности интегрирования описан в [5].

Недостатком метода Монте-Карло является наличие случайной погрешности вычислений со значениями, как правило, порядка процента, однако если он используется для расчета только рассеянного теплового излучения, которое обычно составляет незначительную долю от прямого, то может оказаться эффективным и при высокоточных расчетах. Заметим, что метод Монте-Карло не связан ограничениями на ширину интервала интегрирования, что позволяет рассматривать принципиальную возможность его применения к очень широким спектральным интервалам, например в задачах энергетики атмосферы.

Метод интегрирования по коэффициенту поглощения (k-метод)

Это хорошо известный и широко используемый в настоящее время метод, фактически связанный с переходом от интегрирования в (1) по

частоте к интегрированию по плотности вероятности появления в интервале $[v_1, v_2]$ значений объемного коэффициента молекулярного поглощения или его профиля для неоднородной атмосферы. При этом остальные параметры на интервале интегрирования либо считаются постоянными, либо, как, например, для аппаратной функции, вычисляется их совместная с объемным коэффициентом молекулярного поглощения плотность вероятности. Описанный прием позволяет многократно уменьшить число узлов квадратурной формулы при вычислении (1), поскольку плотность вероятности является неосциллирующей функцией.

Основы k -метода изложены, в частности, в монографии [3], его приложения для различных вычислительных задач — например, в работах [6–8]. По сравнению с другими рассмотренными приемами интегрирования (1) k -метод является существенно более сложным, кроме того, он требует весьма значительных предварительных расчетов. Эти обстоятельства с точки зрения практической реализации вычислительных алгоритмов в виде компьютерных кодов могут рассматриваться как недостатки k -метода, поскольку реально оптимизации подлежит не только собственно время вычислений, но и время, необходимое для разработки соответствующего программного обеспечения.

Также отметим, что, хотя k -метод может быть особенно удобным для задач с фиксированными параметрами (конкретный прибор и спектральный интервал), его эффективность за счет громоздких предварительных расчетов существенно снижается для научно-исследовательских задач, где необходимо изучение зависимости вычисляемой интенсивности от вариаций различных параметров атмосферы, в том числе определяющих объемный коэффициент молекулярного поглощения. Все вышеизложенное заставляет рассматривать k -метод в задачах расчета рассеяния теплового излучения лишь как одну из альтернатив, не имеющую априорных преимуществ перед другими методами.

Вариационное приближение при частотном интегрировании

Ниже предлагается метод вычисления интеграла (1), в чем-то идеологически близкий к k -методу, но не требующий никаких предварительных вычислений. Он, так же как и k -метод, основан на группировке при вычислении интеграла (1) точек сетки не по принципу близости частот v , а по принципу близости значения подынтегральной функции.

Пусть интервал $[v_1, v_2]$ достаточно мал, так что внутри него можно пренебречь спектральными зависимостями всех параметров, кроме объемного коэффициента поглощения $\kappa(v)$ (не обязательно молекулярного, возможно и суммарного с аэрозольным). В каждом конкретном расчете (1) все параметры атмосферы (профили температуры, давления, концентрации поглощающих излучения газов, характеристики аэрозолей) заданы и фиксированы. Следовательно, профиль $\kappa(v, z)$ при вычислении моно-

хроматической интенсивности $I(v, z, \vartheta, \varphi)$ зависит только от частоты v . Пусть при интегрировании (1) по квадратурной формуле трапеций (2) или методом Монте-Карло (3) вычислена интенсивность $I(v'_j, z, \vartheta, \varphi)$, соответствующая вертикальному профилю $\kappa(v'_j, z)$. Сохраним интенсивность и профиль в памяти компьютера, исключив при этом информацию о частоте, т.е. перейдем к величинам $I_i(z, \vartheta, \varphi)$ и $\kappa_i(v)$. Пусть теперь при вычислении для очередной частоты v'_j профиль $\kappa(v'_j, z)$ оказался достаточно близок к профилю $\kappa_i(z)$, например, для всех z :

$$|\kappa(v'_j, z) - \kappa_i(z)| < \varepsilon, \quad (4)$$

где ε — некоторый параметр, определяющий точность метода. Тогда, вместо вычисления $I(v'_j, z, \vartheta, \varphi)$ по алгоритму с рассеянием, используется вариационное приближение:

$$I(v'_j, z, \vartheta, \varphi) = I_i(z, \vartheta, \varphi) + \int_{z_0}^{z_\infty} \frac{\delta I_i(z', \vartheta, \varphi)}{\delta \kappa_i(z')} [\kappa(v'_j, z') - \kappa_i(z')] dz'. \quad (5)$$

Разумеется, при реальных расчетах интеграл в (5) заменяется квадратурной суммой, а вариационная производная $\delta I_i(z', \vartheta, \varphi) / [\delta \kappa_i(z')]$ — вектором частных производных от интенсивности по объемному коэффициенту поглощения в каждом узле интегрирования.

Общая логика алгоритма элементарна — по мере прохода узлов частотного интегрирования в (1) профиль $\kappa(v'_j, z)$ сравнивается со всеми хранящимися в памяти компьютера профилями $\kappa_i(z)$, $i = 1, \dots, L$, и если найден номер i , для которого выполняется условие близости (4), то искомая интенсивность рассеянного излучения $I(v'_j, z, \vartheta, \varphi)$ вычисляется по (5) многократно быстрее, чем по алгоритму [2]. Иначе, если условие (4) не выполнено ни для одного $\kappa_i(z)$, $i = 1, \dots, L$, то $I(v'_j, z, \vartheta, \varphi)$ вычисляется по [2] и производится запоминание

$$I_{L+1}(z, \vartheta, \varphi) \equiv I(v'_j, z, \vartheta, \varphi),$$

$$\frac{\delta I_{L+1}(z, \vartheta, \varphi)}{\delta \kappa_{L+1}(z)} \equiv \frac{\delta I(v'_j, z, \vartheta, \varphi)}{\delta \kappa(v'_j, z)} \text{ и } \kappa_{L+1}(z) = \kappa(v'_j, z).$$

Хранение указанной совокупности данных в памяти компьютера не создает проблем с учетом их современных ресурсов.

Условие близости (4) не является оптимальным. Действительно, разумно требовать большей близости профилей на высотах, где зависимость интенсивности от вариаций $\kappa(z)$ сильная, и меньшей — где слабая. Аналогично следует учитывать и особенности аппаратной функции прибора. Это приводит к следующей «весовой» модификации условия близости:

$$\left| (\kappa(v'_j, z) - \kappa_i(z)) \frac{\delta I_i(z, \vartheta, \Phi)}{\delta \kappa_i(z)} y(v'_j) \right| < \varepsilon.$$

Новым моментом в предлагаемом методе является необходимость вычисления одновременно с интенсивностью рассеянного излучения и частных производных от нее по объемному коэффициенту поглощения. Но их вычисление может быть элементарно выполнено для схемы алгоритма, приведенного в [2]. Ниже в кратком стиле приводятся соответствующие формулы, в которых сохраняются как все обозначения частей [1, 2], так и нумерация операций алгоритма из [2]. Операции, в которые вычисления производных не вносят изменений, пропускаются.

1. *Производные от интенсивности прямого излучения.* Пусть интервал интегрирования от z_0 до z_∞ разбит на узлы z_m , $m = 1, \dots, M$, и пусть δ_m — соответствующие им веса квадратурной формулы (могут быть как положительными, так и отрицательными). Тогда для функции пропускания (1) из [1] имеем

$$\frac{\partial P_\kappa(v, z_1, z_2, \vartheta)}{\partial \kappa(v, z_m)} = -\frac{\delta_m}{\cos \vartheta} P_\kappa(v, z_1, z_2, \vartheta), \quad (6)$$

а для интенсивности прямого излучения (2), (3) из [1] с учетом (6)

$$\begin{aligned} \frac{\partial I(v, z_2, \vartheta, \Phi)}{\partial \kappa(v, z_m)} &= I(v, z_1, \vartheta, \Phi) P_\sigma(v, z_1, z_2, \vartheta) \frac{\partial P_\kappa(v, z_1, z_2, \vartheta)}{\partial \kappa(v, z_m)} - \\ &- B_e[v, T(z_m)] P_\sigma(v, z_m, z_2, \vartheta) \frac{\partial P_\kappa(v, z_m, z_2, \vartheta)}{\partial \kappa(v, z_m)} + \\ &+ \sum_{k=m}^M B_e[v, T(z_k)] P_\sigma(v, z_k, z_2, \vartheta) \frac{\partial P_\kappa(v, z_k, z_2, \vartheta)}{\partial z_k \partial \kappa(v, z_m)} \delta_k. \end{aligned}$$

2. *Производные от весов квадратурной формулы интегрирования по оптической глубине.* Их потребуется вычислить, поскольку переменной интегрирования в алгоритме [2] является оптическая глубина, а не высота. Конкретный вид $\partial d(j, j_1, j_2) / \partial \kappa(v, z_m)$ зависит от выражения $d(j, j_1, j_2)$ через узлы интегрирования в используемой квадратурной формуле. Так, для рекомендованной в [2] формуле трапеций имеем:

$$\frac{\partial d(j, j_1, j_2)}{\partial \kappa(v, z_m)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tau(j+1)}{\partial \kappa(v, z_m)} - \frac{\partial \tau(j-1)}{\partial \kappa(v, z_m)} \right),$$

если $\min(j_1, j_2) < j < \max(j_1, j_2)$,

$$\frac{\partial d(j, j_1, j_2)}{\partial \kappa(v, z_m)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tau(j+1)}{\partial \kappa(v, z_m)} - \frac{\partial \tau(j)}{\partial \kappa(v, z_m)} \right),$$

если $j = \min(j_1, j_2)$,

$$\frac{\partial d(j, j_1, j_2)}{\partial \kappa(v, z_m)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tau(j)}{\partial \kappa(v, z_m)} - \frac{\partial \tau(j-1)}{\partial \kappa(v, z_m)} \right),$$

если $j = \max(j_1, j_2)$. Далее согласно определению оптической глубины [1]:

$$\frac{\partial \tau(j')}{\partial \kappa(v, z_m)} = \delta_m,$$

если $z_m \geq z_{j'}$, и

$$\frac{\partial \tau(j')}{\partial \kappa(v, z_m)} = 0,$$

если $z_m < z_{j'}$.

4. *Производные от функции исходных источников:*

$$\frac{\partial B_0(l, j, k)}{\partial \kappa(v, z_m)} = \frac{\omega_0[\tau(j)]}{\alpha[\tau(j)]} B_e\{v, T[\tau(j)]\} \frac{\partial \tau(j)}{\partial \kappa(v, z_m)}.$$

5. *Производные от оператора прямого излучения:*

$$\frac{\partial T_0(j, j', k')}{\partial \kappa(v, z_m)} = -\frac{T_0(j, j', k')}{\eta(k')} \left(\frac{\partial \tau(j')}{\partial \kappa(v, z_m)} - \frac{\partial \tau(j)}{\partial \kappa(v, z_m)} \right).$$

6. *Производные от оператора однократного рассеяния:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1(l, l', j, k, j', k')}{\partial \kappa(v, z_m)} &= -T_1(l, l', j, k, j', k') \times \\ &\times \left(\frac{1}{\alpha[\tau(j)]} \frac{\partial \tau(j)}{\partial \kappa(v, z_m)} + \frac{1}{\eta(k')} \left(\frac{\partial \tau(j')}{\partial \kappa(v, z_m)} - \frac{\partial \tau(j)}{\partial \kappa(v, z_m)} \right) \right). \end{aligned}$$

8–11. Вычисление производных в этих операциях алгоритма сводится к элементарному дифференцированию сумм и произведений, поэтому соответствующие формулы здесь не приводятся.

Алгоритмы быстрого вычисления объемного коэффициента молекулярного поглощения

Рассмотрим кратко приемы, связанные с ускорением вычисления интеграла (1) путем применения специальных алгоритмов при расчете объемного коэффициента молекулярного поглощения. Как известно, основное время его вычисления связано с необходимостью суммирования спектральных линий

$$\kappa(v, z) = \sum_{k=1}^{N[v_3, v_4]} C_{m(k)}(z) S_k[T(z)] f_k[v, v_k, p(z), T(z)], \quad (7)$$

где k — номер спектральной линии; $C_{m(k)}$ — концентрация поглощающего излучения газа номер m ; p — давление; S_k — интенсивность; f_k — функция контура спектральной линии с центральной частотой v_k . Суммирование в (7) ведется по всем N линиям в спектральном интервале $[v_3, v_4]$, который в общем случае выбирается значительно более широким, чем интервал интегрирования в (1) $[v_1, v_2]$.

Хорошо известным и достаточно эффективным приемом ускорения расчетов по (7) является аппроксимация крыльевого вклада линий, при которой сумма членов ряда (7), достаточно удаленных от границ интервала интегрирования $[v_1, v_2]$, заменяется полиномом по давлению. Коэффициенты этого полинома зависят от типа газа и температуры, вычисляются предварительно для определенного

набора температур, а затем при расчетах по (7) интерполируются для конкретной $T(z)$. В стиле, удобном для практической реализации, алгоритм аппроксимации крыльевого вклада линий изложен в [9] и воспроизведен в [5].

Другим эффективным приемом, который может использоваться как вместе с аппроксимацией крыльевого вклада, так и без нее, является селекция линий. Действительно, интенсивности линий в (7) обычно отличаются на несколько порядков, поэтому слабые линии могут быть исключены из суммы без ущерба для точности вычислений. Простой алгоритм селекции был предложен еще в работе [10]. Положив в (7) $\nu = \nu_1$, затем $\nu = \nu_2$ и запуская линии вне интервала $[\nu_1, \nu_2]$, в порядке возрастания их вклада в сумму (7), можно последовательно исключать первые номера (т.е. самые слабые линии), пока связанная с этим исключением погрешность вычислений (7) не превысит заданной величины. При этом можно либо предварительно перебирать различные модельные варианты профилей температуры, давления и концентраций поглощающих газов, либо учесть, что наибольший вклад в сумму (7) достигается при максимальном давлении, минимальной температуре и максимальной концентрации газа [3], и проводить селекцию для этих условий, либо индивидуальную селекцию для каждого модельных условий расчетов. Заметим, что применение селекции линий позволило почти в 10 раз ускорить расчеты по алгоритму, реализованному автором для работы [11].

Описанный прием позволяет проводить селекцию линий только вне интервала $[\nu_1, \nu_2]$. К селекции линий внутри интервала интегрирования следует относиться осторожно, поскольку вклад в (7) даже слабой линии на частоте, близкой к ее центральной ν_k , может оказаться весьма существенным. Здесь рекомендуется простой прием, пригодный для конкретных прикладных вычислительных задач с жестко заданными параметрами расчетов. Линии внутри $[\nu_1, \nu_2]$ последовательно исключаются из (7), начиная с самых слабых, но при давлениях, температурах и концентрациях, соответствующих их максимальному вкладу в сумму (7). При этом оценивается влияние этой процедуры на точность уже не объемного коэффициента молекулярного поглощения (7), а моделируемой интенсивности измерений (1).

Заключение

Рассмотренные приемы оптимизации вычислений при математическом моделировании измерений вместе с аналогичными приемами, упомянутыми в [2] при изложении вычислительного алгоритма

A. V. Vasilev. Step-by-step approximation technique for taking into account thermal radiation scattering on aerosol formations in the atmosphere. Part 3. Applications to mathematical simulation of measurements.

Some resources of the algorithm, which has been described in the previous parts of this article, are presented and applied to mathematical modeling of measurements keeping in mind the need to calculate the convolution of the monochromatic intensity with spectral instrument function. Short review of basic methods for this calculation is given. A new rapid calculation technique and the corresponding modification of the algorithm described in Part 2 of this article are suggested.

метода последовательных приближений для расчета поля рассеянного теплового излучения в атмосфере, позволяют создавать и реализовывать на компьютерах достаточно эффективные в смысле скорости вычислений алгоритмы моделирования измерений теплового излучения, учитывающие процессы его рассеяния на аэрозольных образованиях и пригодные как для научно-исследовательских, так и для прикладных расчетов.

Автор благодарит Ю.М. Тимофеева за ценные замечания, высказанные при обсуждении данной работы.

1. Васильев А.В. Метод последовательных приближений при учете рассеяния теплового излучения на аэрозольных образованиях в атмосфере. Часть 1. Общая вычислительная схема // Оптика атмосф. и океана. 2003. Т. 16. № 8. С. 725–729.
2. Васильев А.В. Метод последовательных приближений при учете рассеяния теплового излучения на аэрозольных образованиях в атмосфере. Часть 2. Учет поляризации. Вычислительный алгоритм. Аэрозольные модели // Оптика атмосф. и океана. 2003. Т. 16. № 8. С. 730–735.
3. Тимофеев Ю.М., Васильев А.В. Теоретические основы атмосферной оптики. СПб.: Наука, 2003. 474 с.
4. Фомин Б.А., Троценко А.Н., Романов С.В. Эффективные методы расчета оптических свойств газообразных сред // Оптика атмосф. и океана. 1994. Т. 7. № 11–12. С. 1457–1462.
5. Васильев А.В., Мельникова И.Н. Коротковолновое солнечное излучение в атмосфере Земли. Расчеты. Измерения. Интерпретация. СПб.: НИИХ СПбГУ, 2002. 388 с.
6. Творогов С.Д., Несмелова Л.И., Родимова О.Б. О представлении функций пропускания рядами экспонент // Оптика атмосф. и океана. 1996. Т. 9. № 3. С. 373–377.
7. Несмелова Л.И., Родимова О.Б., Творогов С.Д. К вопросу об уточнении интегрирования по частоте при вычислении радиационных характеристик // Оптика атмосф. и океана. 1999. Т. 12. № 9. С. 832–834.
8. Sun Z., Rikus L. Improved application of exponential sum fitting transmissions to inhomogeneous atmosphere // J. Geophys. Res. D. 1999. V. 104. № 6. P. 6291–6303.
9. Виролайнен Я.А., Поляков А.В. Алгоритмы прямого расчета функций пропускания в задачах наземного дистанционного зондирования атмосферы // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 4. 1999. Вып. 1. № 4. С. 25–31.
10. Покровский А.Г. Методика расчета спектрального поглощения инфракрасной радиации в атмосфере // Проблемы физики атмосферы. Вып. 5. Л.: Изд-во ЛГУ, 1967. С. 85–110.
11. Тимофеев Ю.М., Поляков А.В., Васильев А.В., Шульгина Е.М., Мак-Клатчи Р. О микроволновом температурно-влажностном зондировании атмосферы из космоса // Изв. РАН. Физ. атмосф. и океана. 1997. Т. 33. № 1. С. 53–61.