«Оптика атмосферы и океана», **15**, № 4 (2002)

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИКИ АТМОСФЕРЫ И ОКЕАНА

УДК 621.396.965.8

С.М. Чернявский

Восстановление источника по его зашумленному и неполному изображению

Казанский государственный технический университет им. А.Н. Туполева

Поступила в редакцию 17.09.2001 г.

Предлагается сходящийся итерационный алгоритм нахождения регуляризованного решения задачи, которая сводится к поиску общей точки выпуклых множеств и решается проекционным методом, ранее предложенным автором.

1. Постановка задачи

Распределение интенсивности $y(t_1, t_2)$ в изображении, построенном изопланатической оптической системой, связано с интенсивностью протяженного некогерентного источника $x(t_1, t_2)$ интегралом свертки [1]:

$$\int\int_{-\infty}^{\infty} h(t_1-\tau_1, t_2-\tau_2)\, x(\tau_1,\tau_2)\, d\tau_1 d\tau_2 = y(t_1,t_2), \quad (1)$$

$$-\infty < t_1, t_2 < \infty,$$

где $h(t_1, t_2) \geq 0$ – известная функция рассеивания точки. Соотношение (1) запишем в краткой форме: $h{*}x = y$ или $Ax = y$. Будем считать h и x суммируемыми функциями на плоскости переменных t_1, t_2 $(h, x \in L_1)$, а y – с суммируемым квадратом функция $(y \in L_2)$.

Предполагаем, что правая часть в (1) известна на ограниченном множестве ω, которое определяет область наблюдения (измерения) изображения. Точность наблюдения задается условием $y \in Y$, где Y – замкнутое выпуклое множество. Например, таковым множеством является

$$Y = \left\{ y \in L_2 : y = \tilde{y} - u, \|u\|^2_{\omega} = \iint_{\omega} u^2(t_1,t_2)\, dt_1 dt_2 \leq \delta^2 \right\}, \quad (2)$$

где $\tilde{y} \geq 0$ – наблюдаемое зашумленное изображение; u – аддитивный неизвестный шум.

Функция $x(t_1, t_2) \geq 0$ предполагается финитной с носителем, содержащимся в множестве ω_0.

Соотношение (1) рассмотрим как уравнение относительно x и y. Решением уравнения (1) будем называть любую пару функций $(x, y) \in H = L_2 \times L_2$, удовлетворяющую этому уравнению.

На H зададим скалярное произведение

$$\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2) \rangle = \langle x_1,x_2 \rangle + \langle y_1,y_2 \rangle =$$

$$= \int\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t_1,t_2)\, x_2(t_1,t_2)\, dt_1 dt_2 +$$

$$+ \int\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t_1,t_2)\, x_2(t_1,t_2)\, dt_1 dt_2,$$

тем самым превратим H в гильбертово пространство.

Множество решений уравнения (1) является замкнутым линейным многообразием в H:

$$V = \{(x, y) \in H : Ax = y\}. \quad (3)$$

Принятые ограничения на решение задают выпуклое замкнутое множество

$$V_1 = \{(x, y) \in H : x(t_1, t_2) \geq 0,\ (t_1, t_2) \in \omega_0;$$
$$x(t_1, t_2) \equiv 0,\ (t_1, t_2) \notin \omega_0;\ y \in Y\}. \quad (4)$$

Задача состоит в нахождении решения уравнения (1), удовлетворяющего ограничению V_1. Данную задачу можно трактовать как задачу нахождения общей точки выпуклых замкнутых множеств (ОТВЗМ): $(x, y) \in VV_1$. В общем случае ограничения могут быть иные и в большем количестве. Допустим, нами установлено, что априори решение удовлетворяет m ограничениям, которые задаются выпуклыми замкнутыми множествами $V_1, V_2, \ldots, V_m \subset H$. Тогда любая точка (x, y) множества VV_0, $V_0 = \bigcap_{s=1}^{m} V_s$, если оно не пусто, является решением уравнения (1).

Среди элементов множества VV_0 выделим единственный (x^*, y^*), который имеет минимальную норму

$$\|(x^*, y^*)\|^2 = \langle x^*, x^* \rangle + \langle y^*, y^* \rangle = \min_{(x,y) \in VV_0} \|(x,y)\|^2.$$

Пару функций (x^*, y^*) назовем нормальным решением уравнения (1). Очевидно, что $(x^*, y^*) =$

$= P_{VV_0}(0,0)$, где $P_{VV_0}(x, y)$ – проекционный оператор на множество VV_0, определяемый условием

$$(x^*, y^*) = P_{VV_0}(x,y) : \|(x,y) - (x^*, y^*)\| = \\ = \min_{(x', y') \in VV_0} \|(x,y) - (x', y')\|.$$

Нашей целью будет нахождение приближенного решения $(x^*(\alpha_0), y^*(\alpha_0))$ уравнения (1), зависящего от параметра $\alpha_0 > 0$. Это решение непрерывно зависит от измеренного изображения $\tilde{y}$ и при $\alpha_0 \to 0$ стремится по норме в H к нормальному решению: $\|(x^*(\alpha_0), y^*(\alpha_0)) - (x^*, y^*)\| \to 0$ при $\alpha_0 \to 0$. Такое приближенное решение назовем регуляризованным решением уравнения (1). Оно может не принадлежать множеству VV_0, хотя будет в малой близости от (x^*, y^*) и, следовательно, от множества VV_0.

2. Проблемы, связанные с решением уравнения (1)

Уравнение (1) является интегральным уравнением 1-го рода типа свертки, и трудности его решения известны [2]. Допустим, что это уравнение решаем методом обращения свертки:

$$x = F^{-1}\,[F(y)/F(h)], \tag{5}$$

где F и F^{-1} – операторы прямого и обратного преобразований Фурье. С ростом пространственных частот $\nu_1^2 + \nu_2^2 \to \infty$ функции $F(h)$ и $F(y)$ стремятся к нулю и это стремление должно быть согласованным. Небольшие искажения $F(y)$ на больших пространственных частотах за счет шума в измерениях изображения могут кардинально изменить отношение $F(y)/F(h)$ и, следовательно, x. Чтобы обеспечить непрерывную зависимость решения от исходных данных, вместо решения (5) рассматривают приближенное (регуляризованное) решение [2, 3]:

$$x = F^{-1}\,\{F(y)\,F^*(h)/[\,|F(h)|^2 + \alpha_0\,M(\nu_1, \nu_2)]\}, \tag{6}$$

где «*» – обозначает комплексное сопряжение; M – четная определенно-положительная функция. Чтобы воспользоваться формулами (5) и (6), надо знать изображение y на всей плоскости. Фактически имеем неполное изображение, измеренное в области ω, причем и в ω в некоторых точках может отсутствовать информация об изображении, поэтому пользуются процедурой предварительной обработки изображения в ω, а также гладким продлением изображения вне ω [4].

Мы рассматриваем неполноту данных и характер их зашумленности как ограничения на решение. Задача сводится к нахождению решения, согласованного с данными ограничениями. Такой подход в определенном смысле стал классическим [2, 5, 6].

Так как задачу нахождения решения уравнения (1) с ограничениями можно трактовать как задачу нахождения ОТВЗМ, то для решения последней могут быть эффективно применены итерационные методы [5, 7]. В работе [7] предложен итерационный метод, названный методом увеличения размерности (МУР-метод). С его помощью получим сходящийся итерационный алгоритм для нахождения регуляризованного решения $(x^*(\alpha_0), y^*(\alpha_0))$, о котором мы говорили выше.

3. МУР-метод

Кратко изложим метод по работе [7] и докажем теорему, необходимую для построения регуляризованного решения уравнения (1). Пусть H – некоторое гильбертово пространство и $x, x_1, \ldots, x_m$ – точки в нем, а также в H заданы выпуклое замкнутое многообразие V и выпуклые замкнутые множества $V_1, \ldots, V_m$. Рассмотрим функционал

$$J(x, x_1, \ldots, x_m) = \sum_{s=1}^{m} \alpha_s \|x - x_s\|^2, \ \alpha_s > 0, \\ \alpha_1 + \ldots + \alpha_m = 1,$$

где $x \in V$ и $x_s \in V_s$, $s = \overline{1, m}$. Функционал достигает минимума при $x = x_1 = \ldots = x_m$. Минимизирующая последовательность $(x_n, x_{1n}, \ldots, x_{mn})$ задает точки в множествах $V, V_1, \ldots, V_m$, которые сближаются. При совпадении этих точек функционал достигает минимума, поэтому он получил название функционал сближения. Совпадение точек происходит на пересечении $VV_0 = VV_1, \ldots, V_m$. Этим можно воспользоваться для нахождения ОТВЗМ. Минимизирующую последовательность будем строить методом покоординатного спуска по переменной x и по совокупности переменных $x_1, \ldots, x_m$.

Пусть $(x_n, x_{1n}, \ldots, x_{mn})$ – n-е приближение; $(n + 1)$-е приближение построим по схеме

$$x_{sn+1} = P_{V_s}\,x_n = P_s\,x_n,\ s = \overline{1, m},$$

$$x_{n+1} = PT\,x_n,\ P = P_V,\ T = I + \lambda\,(\overline{\overline{P}} - I),$$

$$\overline{\overline{P}} = \sum_{s=1}^{m} \alpha_s P_s, \quad 0 < \lambda < 2\,,$$

где I – тождественный оператор. Операторы P и T являются нерасширяющими, причем P является линейным. Множество неподвижных точек произведения операторов PT совпадает с множеством VV_0, последовательности $\{x_n\}$ и $\{x_{sn}\}$ слабо сходятся к точке множества VV_0.

Рассмотрим регуляризованный функционал

$$J_1(x, x_1, \ldots, x_m) = \alpha_0 \|x\|^2 + J(x, x_1, \ldots, x_m), \quad \alpha_0 > 0\,.$$

В методе покоординатного спуска для функционала J_1 приближение x_{sn+1} будет вычисляться как и ранее, а

$$x_{n+1} = P\tilde{T}\,x_n,\ \tilde{T} = I + \lambda\,(\tilde{P} - I),\ \tilde{P} = \overline{\overline{P}}/(1 + \alpha_0).$$

Оператор $P\tilde{T}$ является сжимающим с коэффициентом сжатия $[1 - \lambda\alpha_0/(1 + \alpha_0)]$. Поэтому последовательность $\{x_n\}$, стартующая из любой точки множества V, с геометрической скоростью сходится к единственной точке $x^*(\alpha_0) = P\tilde{T}x^*(\alpha_0) \in V$. В силу непрерывности проекционных операторов последовательность $\{x_{sn}\}$ сходится по норме к точке $x_s^*(\alpha_0) = P_s\, x^*(\alpha_0)$.

Теорема. При $\alpha_0 \to 0$ неподвижная точка $x^*(\alpha_0)$ оператора $P\tilde{T}$ стремится по норме к точке $x^* = P_{VV_0}0$, т.е. к точке множества VV_0, имеющей минимальную норму, если это множество не пусто.

Доказательство. Рассмотрим последовательность положительных чисел $\alpha_{01} > \alpha_{02} > \ldots > \alpha_{0k} > \ldots$, $\alpha_{0k} \to 0$ при $k \to \infty$. Обозначим через $x_k^* = x^*(\alpha_{0k})$. Тогда, учитывая линейность оператора P и условие $Px_k^* = x_k^*$, найдем

$$x_k^* = P\tilde{T}\, x_k^* = P\,[x_k^* + \lambda\,(\tilde{P}x_k^* - x_k^*)] =$$

$$= Px_k^* + \lambda\,(P\tilde{P}x_k^* - Px_k^*) = x_k^* + \lambda\,(P\tilde{P}x_k^* - x_k^*),$$

откуда

$$P\tilde{P}x_k^* - x_k^* = 0 \text{ и } P\overline{P}x_k^* = (1 + \alpha_{0k})\, x_k^*. \qquad (7)$$

Точка $(x_k^*,\ P_1\, x_k^*,\ \ldots,\ P_m\, x_k^*)$ доставляет минимум функционалу J_1 на прямом произведении $V \times V_1 \times \ldots \times V_m$, поэтому справедливо неравенство

$$\alpha_{0k}\left\|x_k^*\right\|^2 + \sum_{s=1}^{m}\alpha_s\left\|x_k^* - P_s x_k^*\right\|^2 \le \alpha_{0k}\left\|x^*\right\|^2 +$$

$$+ \sum_{s=1}^{m}\alpha_s\left\|x^* - P_s x^*\right\|^2 = \alpha_{0k}\left\|x^*\right\|^2,$$

из которого заключаем, что неподвижные точки x_k^* ограничены в совокупности

$$\left\|x_k^*\right\| \le \left\|x^*\right\|.$$

Пусть $l > k$ и $h = x_l^* - x_k^*$. Из (7) и условия нерасширяемости оператора $P\overline{P}$ имеем неравенство

$$\left\|(1+\alpha_{0l})x_l^* - (1+\alpha_{0k})x_k^*\right\| =$$

$$= \left\|P\overline{P}x_l^* - P\overline{P}x_k^*\right\| \le \left\|x_l^* - x_k^*\right\| = \|h\|.$$

Квадрат левой части последнего неравенства

$$\left\|(1 + \alpha_{0l})x_l^* - (1 + \alpha_{0k})x_k^*\right\|^2 =$$

$$= \left\|(\alpha_{0l} - \alpha_{0k})x_k^* + (1 + \alpha_{0l})h\right\|^2 =$$

$$= (\alpha_{0l} - \alpha_{0k})^2\left\|x_k^*\right\|^2 + 2(\alpha_{0l} - \alpha_{0k})\times$$

$$\times(1 + \alpha_{0l})\mathrm{Re}\left\langle x_k^*, h\right\rangle + (1 + \alpha_{0l})^2\|h\|^2,$$

поэтому такое неравенство представимо в виде

$$(\alpha_{0l} - \alpha_{0k})^2\left\|x_k^*\right\|^2 + \alpha_{0l}(2 + \alpha_{0l})\|h\|^2 \le$$

$$\le 2(\alpha_{0k} - \alpha_{0l})\mathrm{Re}\left\langle x_k^*, h\right\rangle.$$

Отсюда заключаем, что $\mathrm{Re}\,\langle x_k^*, h\rangle \ge 0$. Но из равенства $\left\|x_l^*\right\|^2 = \left\|x_k^*\right\|^2 + \|h\|^2 + 2\mathrm{Re}\,\langle x_k^*, h\rangle$ следует, что $\left\|x_l^*\right\|^2 \ge \left\|x_k^*\right\|^2 + \|h\|^2$. Тогда можно сделать выводы, что последовательность норм $\left\{\left\|x_k^*\right\|\right\}$ – неубывающая и ограниченная и имеет предел, а норма

$$\left\|x_l^* - x_k^*\right\|^2 = \|h\|^2 \le \left\|x_l^*\right\|^2 - \left\|x_k^*\right\|^2 \to 0 \text{ при } k \to \infty,$$

поэтому последовательность $\left\{x_k^*\right\}$ фундаментальная и в силу полноты пространства H и замкнутости V имеет предел $x^{**} \in V$.

Учитывая, что оператор $P\tilde{T}x$ непрерывно зависит от x и α_0, найдем $x^{**} = \lim\limits_{k\to\infty} x_k^* = \lim\limits_{k\to\infty} P\tilde{T}x_k^* = PTx^{**}$, т.е. $x^{**} \in VV_0$. Из условия $2x^{**}2 \le 2x^{*}2$ и единственности точки x^* заключаем, что $x^{**} = P_{VV_0}0$. Теорема доказана.

4. Решение уравнения (1) МУР-методом

Решение уравнения (1) при ограничении (2),(4) мы свели к задаче нахождения ОТВЗМ V и V_1, определяемых условиями (2) – (4). В качестве приближенного решения возьмем точку минимума регуляризованного функционала

$$J_1\,[(x,\,y),\,(x_1,\,y_1)] = \alpha_0\,(\langle x,\,x\rangle + \langle y,\,y\rangle) +$$

$$+ \langle x - x_1,\, x - x_1\rangle + \langle y - y_1,\, y - y_1\rangle,$$

где $(x,\,y) \in V$ и $(x_1,\,y_1) \in V_1$.

Найдем проекционные операторы на данные множества. Проекция на $V_1\,(x_1,\,y_1) = P_1(x,\,y)$ является точкой минимума в задаче

$$\min_{(x',y')\in V_1} 2(x,\,y) - (x',\,y')2$$

и определяется условиями

$$x_1(t_1,\,t_2) = \max\,[x(t_1,\,t_2),0] \text{ при } (t_1,\,t_2) \in \omega_0, \quad (8)$$

$$x_1(t_1,\ t_2) = 0 \qquad \text{при } (t_1,\ t_2) \notin \omega_0;$$

$$y_1(t_1,t_2) = \tilde{y}(t_1,t_2) + \frac{y-\tilde{y}}{\|y-\tilde{y}\|_\omega}\delta \quad \text{при } (t_1,\ t_2) \in \omega$$

$$\text{и } \|y-\tilde{y}\| > \delta;$$

$$y_1(t_1,\ t_2) = \tilde{y}_1(t_1,\ t_2) \qquad \text{при } (t_1,\ t_2) \in \omega$$

$$\text{и } \|y-\tilde{y}\| \geq \delta; \tag{8a}$$

$$y_1(t_1,\ t_2) = \tilde{y}_1(t_1,\ t_2) \qquad \text{при } (t_1,\ t_2) \notin \omega.$$

Проекция на множество V $(x,\ y) = P(x_1,\ y_1)$ является точкой минимума в задаче

$$\min_{(x',y')\in V}\left(\|x'-x_1\|^2_{L_2} + \|y'-y_1\|^2_{L_2}\right) =$$
$$= \min_{x'\in H}\left(\|x'-x_1\|^2_{L_2} + \|Ax'-y_1\|^2_{L_2}\right).$$

Первая координата точки минимума x удовлетворяет уравнению Эйлера

$$x - x_1 + A^*(Ax - y_1) = 0$$

и равна $(I + A^*A)^{-1}(x_1 + A^*y_1)$, где A^* – сопряженный с A оператор.

Вторая координата точки минимума $y = Ax$.

Так как оператор $Ax = h(t_1,\ t_2)^*\ x(t_1,\ t_2)$, то сопряженный оператор $A^*x = h(-t_1,\ -t_2)^*\ x(t_1,\ t_2)$, поэтому

$$Wx = (I + A^*A)^{-1}\ x = w\ (t_1,\ t_2)^*\ x\ (t_1,\ t_2),$$

где функция $w\ (t_1,\ t_2) = F^{-1}\ [1/(|F(h)|^2 + 1)]$. Таким образом:

$$(x,\ y) = P(x_1,\ y_1) =$$
$$= [W\ (x_1 + A^*y_1),\ AW\ (x_1 + A^*y_1)]. \tag{9}$$

Итерационная схема для нахождения приближенного решения уравнения (1) в соответствии с п. 3 принимает вид

$(x_0,\ y_0) \in V$ – нулевое приближение,

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = P\left[I + \lambda\left(\frac{1}{1+\alpha_0}P_1 - I\right)\right](x_n, y_n) =$$
$$= \left[(1-\lambda)I + \frac{\lambda}{1+\alpha_0}PP_1\right](x_n, y_n), \tag{10}$$

где операторы P_1 и P определяются выражениями (8), (8a) и (9).

Из (8a) видно, что оператор P_1 непрерывно зависит от $\tilde{y}$, поэтому непрерывен по $\tilde{y}$ и оператор $P\tilde{T}$ в правой части (10). Оператор $P\tilde{T}$ имеет коэффициент сжатия $\left(1 - \frac{\lambda\alpha_0}{1+\alpha_0}\right)$, который не зависит от множеств V и V_1 и, следовательно, от $\tilde{y}$. Поэтому [8] неподвижная точка оператора $P\tilde{T}$ непрерывно зависит от $\tilde{y}$. Таким образом, решение $(x^*(\alpha_0),\ y^*(\alpha_0))$, найденное по итерационной схеме (10), является регуляризованным решением уравнения (1).

5. Формальный вывод итерационной схемы (10)

Нерегуляризованную итерационную схему (10) можно получить формально из уравнения (1). Для этого уравнение (1) умножим слева на A^* и полученное уравнение представим в эквивалентном виде

$$x + A^*Ax = x + A^*y. \tag{11}$$

Уравнение (11) умножим слева на оператор W и получим уравнение

$$x = (1 - \lambda)\ x + \lambda\ W\ (x + A^*y).$$

Если x и y удовлетворяют ограничению V_1, то $(x,y) = (x_1,y_1) = P_1(x,y)$ и

$$x = (1 - \lambda)\ x + \lambda W\ (x_1 + A^*y_1). \tag{12}$$

Теперь уравнение (1) запишем в другом эквивалентном виде:

$$y = (1 - \lambda)\ y + \lambda\ Ax. \tag{13}$$

Если в (10) положить $\alpha_0 = 0$, то сразу видно, как из (12) и (13) получить нерегуляризованную итерационную схему (10).

Достоинство МУР-метода в том, что он позволяет указать значения параметра λ и способ регуляризации итерационной схемы. Кроме того, выбор λ и α_0 имеет ясный смысл.

6. Обсуждение и обобщения

Если ограничение задается не одним множеством V_1, а множествами $V_1,\ \ldots,\ V_m$, то в итерационной схеме (10) оператор P_1 надо заменить оператором $\overline{P} = \sum_{s=1}^{m}\alpha_s P_s$. С помощью данного подхода можно учитывать свойство гладкости решения. Для этого решение (x,y) следует рассматривать на прямом произведении возможно различных гильбертовых пространств $H_1 \times H_2$ со скалярным произведением $\langle x_1,\ x_2\rangle_{H_1} + \langle y_1,\ y_2\rangle_{H_2}$.

Если оптическая система не является изопланатической, то метод Фурье не применим для нахождения оператора W, поэтому нет смысла рассматривать решение уравнения (1) на всей плоскости, а достаточно считать, что $(x,\ y) \in L_2(\omega_0) \times L_2(\omega)$. При этом алгоритм (10) приводит к регуляризованному решению с ограничениями для интегрального уравнения 1-го рода общего вида.

Рассматриваемый здесь подход решения задачи восстановления источника также применим, когда изображение измеряется в дискретных точках и когда интеграл в уравнении (1) заменяется интегральной суммой (случай дискретной модели).

1. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. М.: Наука, 1970. 327 с.
2. *Верлань А.Ф., Сизиков В.С.* Интегральные уравнения. Киев: Наукова думка, 1986. 543 с.
3. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974. 223 с.
4. *Бейтс Р., Мак-Доннел М.* Восстановление и реконструкция изображений. М.: Мир, 1989. 334 с.
5. *Реконструкция* изображений / Под ред. Г. Старка. М.: Мир, 1992. 637 с.
6. *Даджион Д., Мерсера Р.* Цифровая обработка многомерных сигналов. М.: Мир, 1988. 275 с.
7. *Chernyavskii S.* Dimensional method for solving inverse optical problems //Proc. SPIE. 1998. V. 3583. P. 282–287.
8. *Канторович Л.И., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 740 с.

S.M. Chernyavskii. **Source reconstruction from its noised and incomplete image.**

The concurrent iterative algorithm of finding a regularization solution for given problem of the source reconstruction from its noised and incomplete image is considered. This problem is reduced to a problem of general point determination of convex sets and is solved by the projection method offered by the author.