

Ю.А. Лебединский

ПРОПУСКАНИЕ СЛОЯ С НЕСФЕРИЧЕСКИМИ РАССЕИВАЮЩИМИ ОРИЕНТИРОВАННЫМИ В ПРОСТРАНСТВЕ ЧАСТИЦАМИ

На основе уравнения переноса излучения разработан приближенный аналитический метод расчета пространственной освещенности и потоков излучения в среде с несферическими рассеивающими ориентированными частицами. Оценена точность данного метода для простейшей модели оптических параметров рассеивающей среды с несферическими ориентированными частицами.

Для решения ряда прикладных задач атмосферной оптики, климатологии необходимо знать энергетические характеристики света, рассеянного атмосферой в видимом диапазоне спектра. В определенных случаях рассеивающие частицы имеют несферическую форму и выделенную ориентацию в пространстве (капли дождя, кристаллы льда) [1, 2]. На основе уравнения переноса излучения нами получен метод приближенного расчета пространственной освещенности и потоков излучения в полубесконечной рассеивающей среде и плоскопараллельном слое, содержащем такие частицы. Аналогичная задача рассматривалась в [3], но полученное решение малоприспособно для практических расчетов, поскольку требует знания собственных функций интегрального уравнения с ядром, в качестве которого берется индикатриса рассеяния несферических частиц. В данной статье для расчетов использованы легко вычисляемые параметры рассеяния.

Известно, что выделенной ориентацией в атмосфере могут обладать лишь частицы, размер которых значительно превышает длину волны света в видимом диапазоне спектра [2]. Это позволяет упростить задачу, поскольку для крупных частиц индикатриса рассеяния имеет резкий максимум в направлении падения света. В этом случае для расчетов может быть использовано транспортное приближение уравнения переноса, дающее высокую точность при расчетах пространственной освещенности [4, 5]. При этом индикатриса имеет вид

$$X(\Omega, \Omega') = 1 - a(\Omega) + 4\pi a(\Omega) \delta(\Omega \cdot \Omega'), \quad (1)$$

где $\delta(\Omega \cdot \Omega')$ — δ -функция, а $a(\Omega)$ — средний косинус угла рассеяния при падении света в направлении единичного вектора Ω . Пусть на полубесконечную среду, ограниченную плоскостью $z = 0$, либо на слой, ограниченный плоскостями $z = 0$ и $z = H$, падает мононаправленный по оси z свет, создающий единичную освещенность на верхней границе среды. С учетом (1) уравнение переноса излучения можно записать в виде

$$\mu \frac{dI}{dz} + \alpha(\Omega) I = \beta(\Omega) \rho + Q, \quad (2)$$

где $\alpha(\Omega) = \varepsilon(\Omega)(1 - \Lambda(\Omega)a(\Omega))$, $\beta(\Omega) = \frac{\sigma(\Omega)(1 - a(\Omega))}{4\pi}$, I — яркость излучения; $\rho = \int_{4\pi} I(\Omega) d\Omega$ — пространственная освещенность; Q — функция источника излучения; $\varepsilon(\Omega)$ — показатель ослабления элементарного объема; $\sigma(\Omega)$ — показатель рассеяния элементарного объема; $\Lambda(\Omega)$ — вероятность выживания фотона $\Lambda = \sigma/\varepsilon$; $\Omega = \{\Theta, \Phi\}$, где Θ — полярный, Φ — азимутальный углы, $\mu = \cos\Theta$. Функция источника Q с учетом постановки задачи имеет вид

$$Q(z, \Omega) = [\theta(z) - \theta(z - H)] e^{-\varepsilon z} X(\Omega)/4\pi.$$

Далее функции ε , σ и a без аргументов подразумевают аргумент $\Omega = \Omega_z$, где Ω_z — единичный вектор вдоль оси z .

При применении транспортного приближения величина прямопрошедшего света и функция источника должны быть переопределены, что приводит к

$$I_{\text{пр.прош}} = e^{-\varepsilon z} \delta(\Omega \cdot \Omega_z), \quad Q = \frac{\sigma(1 - a)}{4\pi} e^{-\varepsilon z} [\theta(z) - \theta(z - H)], \quad (3)$$

где $\varepsilon_r = \varepsilon(1 - \Lambda a)$. От (2) можно перейти к соответствующим интегральным уравнениям для яркости и пространственной освещенности [3, 8]:

$$I(\Omega, z) = \begin{cases} \int_{-\infty}^z \frac{\beta(\Omega)\rho + Q}{\mu} e^{-\frac{\alpha(\Omega)}{\mu}(z-z')} dz', & 0 < \mu \leq 1, \\ -\int_z^{\infty} \frac{\beta(\Omega)\rho + Q}{\mu} e^{-\frac{\alpha(\Omega)}{\mu}(z-z')} dz', & -1 \leq \mu < 0, \end{cases} \quad (4)$$

$$\rho(z) = \int_{-\infty}^z \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\beta(\Omega)\rho + Q) \frac{1}{\mu} e^{-\frac{\alpha(\Omega)}{\mu}(z-z')} d\mu d\varphi dz' + \\ + \int_z^{\infty} \int_1^{2\pi} \int_{-1}^0 (\beta(\Omega)\rho + Q) \cdot \frac{-1}{\mu} e^{-\frac{\alpha(\Omega)}{\mu}(z-z')} d\mu d\varphi dz'. \quad (5)$$

В видимом диапазоне спектра обычно $1 - \Lambda \ll 1$. Тогда $\rho(z')$ медленно меняется вдоль z по сравнению с ядром в (4), имеющим резкий максимум при $z = z'$ и быстро спадающим с ростом $|z - z'|$. С учетом этого $\rho(z')$ можно разложить в ряд Тейлора вблизи точки $z = z'$ и, ограничиваясь квадратичными членами, получить

$$K_2 \frac{d^2 \rho}{dz^2} - K_1 \frac{d\rho}{dz} - \rho(z) (1 - K_0) = P, \quad (6)$$

где

$$K_0 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sigma(\Omega)(1-a(\Omega))}{\alpha(\Omega)} d\mu d\varphi; \quad K_1 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sigma(\Omega)(1-a(\Omega))\mu}{\alpha^2(\Omega)} d\mu d\varphi; \\ K_2 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sigma(\Omega)(1-a(\Omega))\mu^2}{\alpha^3(\Omega)} d\mu d\varphi; \\ P = - \int_0^{2\pi} \left[\int_{-\infty}^z \int_0^1 \frac{1}{\mu} Q(z', \mu, \varphi) \cdot e^{-\frac{\alpha(\Omega)}{\mu}(z-z')} d\mu dz' - \int_z^{\infty} \int_{-1}^0 \frac{1}{\mu} Q(z', \mu, \varphi) e^{-\frac{\alpha(\Omega)}{\mu}(z-z')} \times \right. \\ \left. \times d\mu dz' \right] d\varphi.$$

Из (6) можно найти параметры глубинного ослабления излучения, распространяющегося в среде:

$$\gamma_{1,2} = (K_1 \pm \sqrt{K_1^2 + 4K_2(1 - K_0)}) / 2K_2. \quad (7)$$

В (7) плюс относится к распространению излучения вверх, минус — вниз. Учитывая, что при $\Lambda \rightarrow 1$ величина $1 - K_0$ стремится к нулю, а K_1 и K_2 в общем случае к постоянным значениям, отличным от нуля, имеем, что γ_1 не стремится к нулю при $\Lambda \rightarrow 1$. При этом, очевидно, для γ_1 несправедлива характерная для сферических частиц асимптотика $\gamma \sim \sqrt{1 - \Lambda}$.

У всех распространенных геометрических моделей несферических частиц (сфероид, цилиндр, столбчатый кристалл) имеется центр симметрии. Следовательно, параметры ε , σ и a для элементарного рассеивающего объема с такими частицами обладают следующим свойством: $\varepsilon(\Omega) = \varepsilon(-\Omega)$, анало-

гично для σ и a . При этом из формулы для расчета K_1 имеем $K_1 = 0$. Поэтому в дальнейшем будем считать $K_1 = 0$, $\gamma_1 = -\gamma_2 = \gamma = \sqrt{\frac{1-K_0}{K_2}}$.

В качестве граничных условий для (6) возьмем обычные для диффузионного приближения условия обращения в 0 потока на границе, а именно

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 I(\mu, \varphi, z=0) \mu d\mu d\varphi = 0;$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{-1}^0 I(\mu, \varphi, z=H) \mu d\mu d\varphi = 0, \quad (8)$$

для слоя, где $I(\mu, \varphi, z)$ находим исходя из (3),

Решение (6) с источником (3) и граничными условиями (8) очевидно, но не приводится здесь ввиду громоздкости. Соответствующие расчеты на ЭВМ не представляют никаких трудностей, Отражение и пропускание слоя ищется по следующим формулам:

$$S = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^0 \int_0^H (\beta\rho + Q) e^{\mu z} dz d\mu d\varphi; \quad (9)$$

$$T = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^H (\beta\rho + Q) e^{\mu(H-z)} dz d\mu d\varphi, \quad (10)$$

В качестве конкретной модели для расчетов пропускания слоя данным методом и общей оценки степени влияния ориентации частиц на пропускание в данной статье выбрана простейшая модель параметров элементарного объема, характерных для кристаллических облаков. В частности, в атмосферной оптике широкое распространение получила следующая модель ориентации кристаллических ледяных частиц в атмосфере: частицы ориентированы главными осями по горизонтали, причем в горизонтальной плоскости ориентация частиц по углу φ хаотична [9–11]. Следовательно, параметры ϵ , σ и a для данной модели не зависят от азимутального угла φ направления падения излучения и могут зависеть лишь от μ .

Как показывают расчеты, для ледяных частиц в форме вытянутых цилиндров, в случае, когда радиус цилиндра значительно больше длины волны, a , Λ и фактор эффективности ослабления частицы слабо зависят от Ω [6]. Независимость фактора эффективности ослабления от Ω означает, что ослабление частицей пропорционально площади ее геометрического сечения в плоскости, перпендикулярной направлению падения света. Тогда элементарный объем с такими частицами, хаотично ориентированными осями по углу φ , имеет параметр $\epsilon(\mu)$, пропорциональный площади сечения частицы, полученной из исходной путем вращения вокруг вертикальной оси. Приближенно такую же зависимость $\epsilon(\mu)$ имеет элементарный объем с частицами в виде сплюснутых сфероидов с осью симметрии, ориентированной вертикально.

Отсюда вытекает следующая модель несферичности: параметры Λ и a не зависят от направления падения Ω , параметр ϵ пропорционален площади сечения сплюснутого в нужной степени сфероида.

Введем $\Delta = L/M$, где L и M – соответственно вертикальная и горизонтальная оси сфероида, имеющего вертикальную ось симметрии. Для определенности пусть $\epsilon(\mu = 1) \equiv 1$.

Δ	$\bar{\mu} = 0,9$			$\bar{\mu} = 0,8$		
	$T_{\text{прибл}}$	$T_{\text{точн}}$	$d, \%$	$T_{\text{прибл}}$	$T_{\text{точн}}$	$d, \%$
0,1	0,895	0,964	7,7	0,811	0,932	13,0
0,3	0,889	0,953	6,7	0,797	0,902	11,6
0,5	0,886	0,947	6,4	0,789	0,890	11,3
0,8	0,882	0,945	6,7	0,782	0,876	10,7
1,25	0,878	0,936	6,2	0,774	0,863	10,5

Результаты сравнения T с точными значениями при $H = 2$ и $\Lambda = 0,995$ представлены на таблице, где $d = (T_{\text{точн}} - T_{\text{прибл}})/T_{\text{точн}} \cdot 100\%$. Точные значения рассчитаны методом Монте-Карло с относительным

среднеквадратическим отклонением $0,2 \div 0,3\%$. В качестве модели индикатрисы при расчетах методом Монте-Карло использована индикатриса Хензи-Гринштейна со средним косинусом угла рассеяния $\bar{\mu}$.

Увеличение d с уменьшением $\bar{\mu}$ объясняется уменьшением точности транспортного приближения.

Для больших H в области наступления глубинного режима, как следует из структуры решения (5), предложенный метод будет иметь высокую точность при условии $\gamma \ll \varepsilon_r$. Учитывая, что для дан-

ной модели $\gamma = \sqrt{(1-\Lambda)(1-a)} \left/ \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\mu^2}{\varepsilon^2(\mu)} d\mu \right.$, имеем

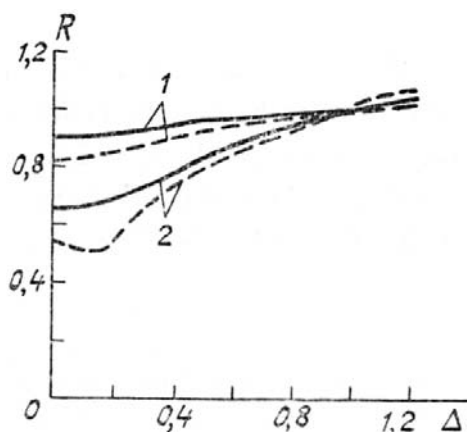
$$\sqrt{1-\Lambda} \ll \sqrt{(1-a) \int_0^1 \frac{\mu^2}{\varepsilon^2(\mu)} d\mu}. \quad (11)$$

Для случая сферы $\Delta = 1$ получаем $\sqrt{1-\Lambda} \ll \sqrt{\frac{1-a}{3}}$. При уменьшении Δ при тех же Λ и a правая часть неравенства (11) растет, то есть погрешность уменьшается с ростом степени „сплюснутости“.

Для реальных ориентированных частиц существует, естественно, определенная зависимость Λ и a от μ . Однако, учитывая малость истинного поглощения света в видимом диапазоне, очевидно, что погрешность решения уравнения (5) в этом случае будет слабо отличаться от погрешности, приведенной в таблице. Для «толстых» слоев для оценки применимости данного метода можно для любой модели Λ , a и ε использовать соотношение $\gamma \ll \varepsilon_r$.

Рассмотрим поведение T в рамках данной простейшей модели несферичности. При расчетах параметры Λ и a менялись в пределах $\Lambda = 0,99 \div 1$, $a = 0,8 \div 0,95$, характерных для крупных частиц в атмосфере при рассеянии волн видимого диапазона. При этом можно сделать следующие выводы для величины $R(\Delta) = T(\Delta) / \bar{T}$, где \bar{T} – пропускание слоя для хаотической ориентации частиц, что в этой модели эквивалентно случаю сферических частиц с $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$, где $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \varepsilon(\mu) d\mu$: R растет с ростом

Δ (рисунок) и с ростом a (с увеличением общих размеров частицы). Однако при малых Δ , когда $T \approx 1$ и практически не зависит от Δ , возможно уменьшение R с ростом Δ . При малых Δ величина R близка к значению $e^{-\sigma(1-a)H}$, равному величине «прямопрошедшего» света в транспортном приближении. Зависимость R от Δ проявляется лишь на больших толщинах слоя H .



Величина $R(\Delta)$ при $\Lambda = 0,995$. Сплошные линии $\mu = 0,9$; штриховые — $\bar{\mu} = 0,8$; $H = 2$ (1); $H = 10$ (2)

1. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. М.: Мир, 1981. Т. 1. 280 с.
2. Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М.: Мир, 1986. 660 с.
3. Furutsu K. // J. Math. Phys. 1980. V. 21. № 4. P. 765.
4. Мануйлова М.И., Романова Л.М. // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1987. Т. 23. № 3. С. 269.
5. Бушмакова О.В., Басс Л.П., Зеге Э.П. // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1972. Т. 8. № 10. С. 1114.
6. Петрушин А.Г. // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1986. Т. 22. № 12. С. 1293.
7. Зеге Э.П., Иванов А.П., Кацев И.Л. Перенос изображения в рассеивающей среде. Минск: Наука и техника, 1985. 327 с.
8. Дэвисон Б. Теория переноса нейтронов. // М.: Атомиздат, 1960. 520 с.

9. Лопатин В.Н., Пармонов Л.Е. Исследование угловой зависимости элементов МРС системами сферидальных частиц. Красноярск, 1987. 31 с. Препринт/Ин-т физики СО АН СССР).
10. Лиоу Ку-Нам. Основы радиационных процессов в атмосфере. Л.: Гидрометеониздат, 1984. 376 с.
11. Asano S. //Appl. Opt. 1983. V. 22. № 9. P. 1390.

Могилёвское отделение института физики АН БССР

Поступила в редакцию
30 мая 1989 г.

Yu. A. Lebedinskii. Transmission of a Layer of Nonspherical Oriented Scattering Particles.

An approximate analytical method for calculating illumination and radiation fluxes in a medium of nonspherical, oriented particles is proposed based on the use of the radiation transfer equation. Accuracy of this method is estimated for the simplest model of optical parameters of scattering medium of nonspherical oriented particles.