«Оптика атмосферы и океана», **12**, № 4 (1999)

УДК 534.24

А.Я. Богушевич

К АНАЛИЗУ АКУСТИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА ДОПЛЕРА В ТРЕХМЕРНО-НЕОДНОРОДНОЙ ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЕ

Институт оптики атмосферы СО РАН, Томск

Поступила в редакцию 10.12.98 г. Принята к печати 4.02.99 г.

Впервые для анализа акустического эффекта Доплера применен известный в геометрической оптике вариационный принцип Ферма. На его основе получены точные и физически наглядные аналитические решения для формулы Доплера в наиболее общем случае распространения звука в трехмерно-неоднородной движущейся среде.

Введение

Эффект Доплера, заключающийся в отличии частоты регистрируемых колебаний $\omega_п$ от частоты излучаемых колебаний $\omega_и$ при движении их источника или приемника, наблюдается для всех волновых явлений – оптических, акустических и иных. Его трактовка зависит от того, можно ли учитывать только скорость *относительного движения* источника и приемника υ или необходимо принимать во внимание скорости движения источника $\mathbf{w}$ и приемника $\mathbf{u}$ *относительно среды* [1–3].

Для звуковых волн, несомненно, имеет место второй случай: они могут распространяться только в материальной среде (например, в газе), а скорости движения их источника и приемника всегда рассматривают раздельно. В частности, классическая формула для акустического эффекта Доплера в однородной неподвижной среде имеет вид [1, 2]:

$$\omega_п = \omega_и \frac{1 - \mathbf{n}\cdot\mathbf{u}/c}{1 - \mathbf{n}\cdot\mathbf{w}/c}, \qquad (1)$$

где c – скорость распространения звука в неподвижной среде; $\mathbf{n}$ – нормаль к фазовому фронту волны. Из (1) следует, что в акустике для неподвижного источника ($\mathbf{w} = 0$) и неподвижного приемника ($\mathbf{u} = 0$) получаются различные формулы для эффекта Доплера. Поэтому измерения доплеровского сдвига частоты звука, в принципе, позволяют судить не только о скорости относительного движения источника и приемника $\upsilon = \mathbf{w} - \mathbf{u}$, но и о скоростях движения источника и приемника относительно среды ($\mathbf{w}$ и $\mathbf{u}$). Более того, если в (1) осуществить переход к другой системе координат, в которой среда движется с некоторой скоростью $\mathbf{v}$, то формула для акустического эффекта Доплера будет содержать также величину $\mathbf{v}$, т.е. движение среды обнаруживается непосредственно из измерений частоты $\omega_п$.

До появления специальной теории относительности (СТО) полагалось, что эффект Доплера для электромагнитных волн по своей сути не отличается от аналогичного явления для звука. При этом считалось, что основные уравнения электродинамики справедливы только в одной инерциальной системе координат, называемой абсолютной системой отсчета, в такой, которая покоится относительно мирового эфира. Под эфиром понималась особая среда, являющаяся носителем электромагнитных процессов, которая заполняет все пространство и любую материю. Отрицательный результат известных опытов по обнаружению эфирного ветра, а также другие экспериментальные данные, подтверждающие следствия СТО, привели к отказу от гипотезы мирового эфира. С релятивистской точки зрения формула Доплера для электромагнитных волн должна включать только скорость относительного движения источника и приемника υ, т.е. не может зависеть от выбора инерциальной системы координат. Например, в оптике формула для эффекта Доплера в вакууме обычно приводится в виде [1, 2]:

$$\omega_п = \omega_и \frac{\sqrt{1 - \mathbf{u}^2/c_e^2}}{1 - \mathbf{u}\cdot\mathbf{s}/c_e}, \qquad (2)$$

где c_e – скорость света в вакууме; $\mathbf{s}$ – единичный вектор, касательный к оптическому лучу.

Хорошо известные факты были изложены выше с целью подчеркнуть принципиальную важность учета в формулах для акустического эффекта Доплера возможных движений среды. Ситуация осложняется тем, что движение реальных сред, в которых могут распространяться звуковые волны, очень часто не является однородным. Например, в атмосфере скорость ветра зависит как от пространственных координат, так и от времени. При этом оказывается невозможным определить абсолютную систему координат, неподвижную относительно всей области среды, влияющей на распространение звука. Возможен даже случай, когда источник и приемник звука полностью увлекаются средой при ее движении и, следовательно, по отношению к ней каждый из них является неподвижным, и тем не менее вследствие их движения относительно друг друга можно ожидать возникновения эффекта Доплера.

Эффект Доплера для звуковых волн в неоднородной движущейся среде рассматривался в [8–14]. В отличие от данных работ ниже впервые для этой цели применяется хорошо известный в механике вариационный принцип, называемый также в геометрической оптике как принцип Ферма. Как будет показано, этот подход позволяет получить точные и физически наглядные решения для эффекта Доплера в наиболее общем случае распространения звука в трехмерно-неоднородной движущейся среде.

Общее решение

Пусть точечные источник и приемник звука движутся с постоянными дозвуковыми скоростями **w** и **u** в непрерывной неоднородной среде, также движущейся с неоднородной дозвуковой скоростью **v**(**r**). Положение источника и приемника в системе координат L, в которой заданы значения **w**, **u** и **v**(**r**), будем описывать переменными радиусами-векторами $\mathbf{r}_и(t)$ и $\mathbf{r}_п(t)$. Предположим также, что источник излучает гармонические колебания, текущая фаза которых в движущейся системе координат L', связанной с ним, описывается временной функцией $\Phi_и(t') = \omega_и t' + \Phi_0$, где $\omega_и = \partial\Phi_и(t')/\partial t'$ – круговая частота этих колебаний (в системе координат L').

Очевидно, что волновое возмущение с некоторым значением фазы, образовавшееся в момент времени $t'_и$ в точке излучения звука $\mathbf{r}'_и = \mathbf{r}'_и(t'_и)$, по причине конечности скорости его распространения достигнет точки приема $\mathbf{r}'_п = \mathbf{r}'_п(t')$ за определенный интервал времени $\tau' = t' - t'_и \neq 0$. Поэтому $\Phi'(\mathbf{r}'_п, t') = \Phi_и(t' - \tau')$ и, следовательно, используя выражение для $\Phi_и(t')$, можно записать

$$\Phi'(\mathbf{r}'_п, t') = \Phi_и(t') - \omega_и \tau'. \qquad (3)$$

Воспользуемся в (3) инвариантностью фазы одной и той же волны в системах координат L и L' [1, 2], выражаемой равенством

$$\Phi(\mathbf{r}_п, t) = \Phi'(\mathbf{r}'_п, t'), \qquad (4)$$

где $\mathbf{r}_п$, t и $\mathbf{r}'_п$, t' – координаты и время одного и того же события в системах L и L' соответственно, связанные в акустике формулами преобразования Галилея.

При преобразовании Галилея $t = t'$ и, следовательно, $\tau = \tau'$, где $\tau = t - t_и$ – время распространения звука из точки $\mathbf{r}_и(t_и)$ в точку $\mathbf{r}_п(t)$ в неподвижной системе координат L. Поэтому, подставляя (3) в (4), имеем

$$\Phi(\mathbf{r}_п, t) = \Phi_и(t) - \omega_и \tau. \qquad (5)$$

Частоту звуковых колебаний, регистрируемых приемником (в системе координат L'', движущейся совместно с приемником со скоростью **u**), можно определить из соотношения

$$\omega_п = \partial\Phi''[\mathbf{r}_п(t'')]/\partial t'', \qquad (6)$$

условия применимости которого рассмотрены в [7], и здесь учтены при постановке задачи.

В силу инвариантности фазы волны и формул преобразования Галилея в (6) $\Phi''[\mathbf{r}_п(t'')] = \Phi(\mathbf{r}_п, t)$ и $t'' = t$, т.е. $\partial\Phi''[\mathbf{r}_п(t'')]/\partial t'' = \partial\Phi(\mathbf{r}_п, t)/\partial t$. В результате с учетом (5) из (6) получается наиболее общее выражение для эффекта Доплера в акустике, не накладывающее каких-либо ограничений на характер неоднородности среды:

$$\omega_п = \omega_и \left\{1 - \partial\tau[\mathbf{r}_и(t_и), \mathbf{r}_п(t)]/\partial t\right\}, \qquad (7)$$

где учтена функциональная зависимость τ от координат источника и приемника.

Выражение (7) показывает, что доплеровский сдвиг частоты принимаемых звуковых колебаний обусловливается только изменениями времени распространения звукового сигнала (или энергии волны) от источника к приемнику.

Вывод формул для акустического эффекта Доплера

Пусть среда удовлетворяет условию применимости уравнений геометрической акустики $\lambda \ll a$, где λ – длина звуковой волны; a – характерный размер неоднородностей среды. В этом случае время распространения звука τ от одной точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ декартового пространства (x, y, z) до другой $M_2(x_2, y_2, z_2)$ можно рассматривать на основе известной в геометрической акустике формулы (см., например, [13])

$$\tau = \int_{M_1}^{M_2} \frac{dl}{U(M)}. \qquad (8)$$

Здесь интегрирование выполняется вдоль звукового луча, соединяющего точки M_1 и M_2; dl – элемент длины дуги вдоль луча; $U = |\, c\,\mathbf{n} + \mathbf{v}\,|$ – модуль групповой скорости звука в системе координат L [7]; c – скорость звука в неподвижной среде; **n** – единичный вектор, нормальный к фазовому фронту волны. Выражение (8) справедливо для наиболее общего случая трехмерно-неоднородной движущейся среды. Если поведение звукового луча описывается параметрическими уравнениями

$$x = x(\sigma), \quad y = y(\sigma), \quad z = z(\sigma),$$

то (8) также может быть записано в виде

$$\tau = \int_{M_1}^{M_2} \frac{\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}}{U(x, y, z)}\, d\sigma, \qquad (9)$$

где $x' = \partial x/\partial\sigma$; $y' = \partial y/\partial\sigma$; $z' = \partial z/\partial\sigma$.

Криволинейные интегралы типа (8), в которых подынтегральную функцию F можно представить как в (9), т.е. в виде $F = F(x, y, z, x', y', z')$, в вариационном исчислении относят к функционалам, зависящим от линии интегрирования. Для каждого конкретного пути от M_1 к M_2 они дают определенное численное значение τ [15]. Хорошо известно, что звуковые лучи в рефрагирующей среде удовлетворяют принципу Ферма [16]. Согласно этому принципу луч, соединяющий заданные точки M_1 и M_2, должен совпадать с такой кривой $M_1 M_2$, для которой функционал (9) дает наименьшее значение τ. Иначе говоря, звуковой луч является экстремалью функционала (9), описываемой уравнениями Эйлера [15, 17]:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right) - \frac{\partial F}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right) - \frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

где F – подынтегральная функция в (9).

Вспоминая (7), нетрудно заметить, что выражение (9) применимо для анализа эффекта Доплера в неоднородной движущейся среде, если рассматривать его как функционал с подвижными во времени концами $M_1 = M_и\,[x_и(t_и), y_и(t_и), z_и(t_и)]$ и $M_2 = M_п\,[x_п(t), y_п(t), z_п(t)]$, координаты которых совпадают с координатами источника и приемника в моменты излучения $t_и$ и приема t звука соответственно. В данной задаче удобно ввести ортогональную криволинейную систему координат (x^0, y^0, z^0) [17], в которой одна из координатных линий, например x^0, совпадает в каждой точке с лучом, соединяющем $M_и$ и $M_п$, а две другие (y^0 и z^0) пересекают ее и друг друга в любой точке луча ортогонально. Возможность ввода этой системы координат обоснована тем, что все экстремали, выходящие из какой-либо фиксированной точки M_0, образуют в трехмерном пространстве семейство линий, нигде взаимно не пересекающихся, кроме точки M_0, т.е. в семействе экстремалей можно указать только единственную экстремаль, проходящую через заданную точку $M \neq M_0$ [15]. Вследствие этого любая точка $M(x, y, z)$ в окрестности луча $M_и M_п$ является однозначной функцией x^0, y^0, z^0.

В новой системе координат (9) записывается как

$$\tau = \int_{x_и^0(t_и)}^{x_п^0(t)} \frac{\sqrt{1 + (\partial y^0/\partial x^0)^2 + (\partial z^0/\partial x^0)^2}}{U(x^0, y^0, z^0)}\, dx^0, \tag{10}$$

где $x_и^0(t)$ и $x_п^0(t)$ – x^0-координаты точек $M_и$ и $M_п$ соответственно. Применяя к (10) общую формулу для первой вариации функционала с подвижными концами [15, 17], получим

$$\delta\tau = \left[\frac{\partial \tau}{\partial x^0}\delta x^0 + \frac{\partial \tau}{\partial y^0}\delta y^0 + \frac{\partial \tau}{\partial z^0}\delta z^0\right]\Bigg|_{x^0 = x_и^0(t_и)}^{x^0 = x_п^0(t)} +$$

$$+ \int_{x_и^0(t_и)}^{x_п^0(t)} \left\{\left[\frac{\partial F}{\partial y^0} - \frac{\partial}{\partial x^0}\left(\frac{\partial F}{\partial y^0}\right)\right]\delta y^0 + \left[\frac{\partial F}{\partial z^0} - \frac{\partial}{\partial x^0}\left(\frac{\partial F}{\partial z^0}\right)\right]\delta z^0\right\} dx^0, \tag{11}$$

где F – подынтегральная функция в (10), а выражение $Q\Big|_{x_1}^{x_2}$ означает, как обычно, двойную подстановку, т.е. $Q\Big|_{x_1}^{x_2} = Q(x_2) - Q(x_1)$.

Интегральный член в (11) тождественно равен нулю, поскольку интегрирование выполняется по экстремали. Поэтому с учетом соотношения [13] $\tau = \psi\,[\mathbf{r}_и(t_и), \mathbf{r}_п(t)]/c_0$, связывающего τ с приращением эйконала ψ вдоль луча $M_и M_п$ (c_0 – выбранное характерное значение скорости звука в среде c, например, $c_0 = c(0)$), из (11) имеем:

$$\delta\tau = \frac{1}{c_0}\left[\frac{\partial \psi}{\partial x^0}\delta x^0 + \frac{\partial \psi}{\partial y^0}\delta y^0 + \frac{\partial \psi}{\partial z^0}\delta z^0\right]\Bigg|_{x^0 = x_и^0(t_и)}^{x^0 = x_п^0(t)}. \tag{12}$$

Учитывая, что первая вариация функционала является главной (линейной) частью его приращения, а также полагая, что координаты подвижных точек $M_и(x_и^0, y_и^0, z_и^0)$ и $M_п(x_п^0, y_п^0, z_п^0)$ в конечном итоге зависят от единственного параметра t, из (12) получаем

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{1}{c_0}\left\{\frac{\partial \psi}{\partial x_п^0}\frac{\partial x_п^0}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y_п^0}\frac{\partial y_п^0}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial z_п^0}\frac{\partial z_п^0}{\partial t} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial \psi}{\partial x_и^0}\frac{\partial x_и^0}{\partial t_и}\frac{\partial t_и}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial y_и^0}\frac{\partial y_и^0}{\partial t_и}\frac{\partial t_и}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial z_и^0}\frac{\partial z_и^0}{\partial t_и}\frac{\partial t_и}{\partial t}\right\}.$$

Последнее выражение с учетом равенства $\partial t_и/\partial t = 1 - \partial\tau/\partial t$ преобразуется к виду

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{A_п + B_п - A_и - B_и}{1 - A_и - B_и}, \tag{13}$$

где для краткости изложения введены промежуточные обозначения:

$$A_п = \frac{1}{c_0}\frac{\partial \psi}{\partial x_п^0}\frac{\partial x_п^0}{\partial t},\ B_п = \frac{1}{c_0}\left\{\frac{\partial \psi}{\partial y_п^0}\frac{\partial y_п^0}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial z_п^0}\frac{\partial z_п^0}{\partial t}\right\}, \tag{14}$$

$$A_и = \frac{1}{c_0}\frac{\partial \psi}{\partial x_и^0}\frac{\partial x_и^0}{\partial t_и},\ B_и = \frac{1}{c_0}\left\{\frac{\partial \psi}{\partial y_и^0}\frac{\partial y_и^0}{\partial t_и} + \frac{\partial \psi}{\partial z_и^0}\frac{\partial z_и^0}{\partial t_и}\right\}.$$

Подставляя (13) в (7), получаем предварительный вариант формулы для эффекта Доплера в виде

$$\omega_п = \omega_и \frac{1 - A_п - B_п}{1 - A_и - B_и}, \tag{15}$$

в которой дополнительно следует определить величины $A_и$, $B_и$, $A_п$ и $B_п$.

Скорости изменения во времени координат точек $M_и(x_и^0, y_и^0, z_и^0)$ и $M_п(x_п^0, y_п^0, z_п^0)$ определяются скоростями движения источника $\mathbf{w}$ и приемника $\mathbf{u}$. Поэтому в (14)

$$\frac{\partial x_и^0(t_и)}{\partial t_и} = \mathbf{w}\cdot\mathbf{e}_x^0(M_и),\ \frac{\partial y_и^0(t_и)}{\partial t_и} = \mathbf{w}\cdot\mathbf{e}_y^0(M_и),$$

$$\frac{\partial z_и^0(t_и)}{\partial t_и} = \mathbf{w}\cdot\mathbf{e}_z^0(M_и),\ \frac{\partial x_п^0}{\partial t} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_x^0(M_п),$$

$$\frac{\partial y_п^0}{\partial t} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_y^0(M_п),\ \frac{\partial z_п^0}{\partial t} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_z^0(M_п), \tag{16}$$

где $(\mathbf{e}_x^0, \mathbf{e}_y^0, \mathbf{e}_z^0)$ – локальный ортонормированный базис системы координат (x^0, y^0, z^0). Отметим, что в криволинейных системах координат пространственная ориентация локального базиса может меняться от точки к точке. Здесь система координат (x^0, y^0, z^0) была введена таким образом, что

$$\mathbf{e}_x^0(M_и) = \mathbf{s}_и \quad \text{и} \quad \mathbf{e}_x^0(M_п) = \mathbf{s}_п, \tag{17}$$

где $\mathbf{s}_и$ и $\mathbf{s}_п$ – единичные векторы, касательные к лучу $M_и M_п$ в его крайних точках $M_и$ и $M_п$ (в рефрагирующей среде, как правило, $\mathbf{s}_п \neq \mathbf{s}_и$).

Поскольку производная скалярной функции $f(x, y, z)$ по направлению равна проекции ее градиента $\mathrm{grad} f = \nabla f$ на данное направление, то в (14) также имеем

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_и^0} = \{\mathbf{e}_x^0\,\nabla\psi\}\Big|_{M = M_и} = \mathbf{e}_x^0(M_и)\,\nabla_и\,\psi,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y_и^0} = \{\mathbf{e}_y^0\,\nabla\psi\}\Big|_{M = M_и} = \mathbf{e}_y^0(M_и)\,\nabla_и\,\psi,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z_и^0} = \{\mathbf{e}_z^0\,\nabla\psi\}\Big|_{M = M_и} = \mathbf{e}_z^0(M_и)\,\nabla_и\,\psi,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_п^0} = \{\mathbf{e}_x^0\,\nabla\psi\}\Big|_{M = M_п} = \mathbf{e}_x^0(M_п)\,\nabla_п\,\psi,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y_п^0} = \{\mathbf{e}_y^0\,\nabla\psi\}\Big|_{M = M_п} = \mathbf{e}_y^0(M_п)\,\nabla_п\,\psi,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z_п^0} = \{\mathbf{e}_z^0\,\nabla\psi\}\Big|_{M = M_п} = \mathbf{e}_z^0(M_п)\,\nabla_п\,\psi, \tag{18}$$

где $\nabla_\text{и} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_\text{и}} + \dfrac{\partial}{\partial y_\text{и}} + \dfrac{\partial}{\partial z_\text{и}} \right)$ и $\nabla_\text{п} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_\text{п}} + \dfrac{\partial}{\partial y_\text{п}} + \dfrac{\partial}{\partial z_\text{п}} \right)$ – операторы дифференцирования по точкам $M_\text{и}$ и $M_\text{п}$ в декартовой системе координат (x, y, z).

Воспользуемся в (18) уравнением эйконала Д.И. Блохинцева [7]:

$$|\nabla\psi| = c_0/c\,(1 - \mathbf{v}\nabla\psi/c_0), \tag{19}$$

которое модифицируем здесь следующим образом. Поскольку $\nabla\psi = |\nabla\psi|\,\mathbf{n}$, то (19) можно привести к векторному уравнению

$$\nabla\psi(\text{r}) = \mathbf{n}(\mathbf{r})\, c_0/W(\mathbf{r}), \tag{20}$$

где $W = c + \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$ – значение фазовой скорости звука в системе координат L. Далее вектор $\nabla\psi$ в (20) выразим явным образом через две ортогональные составляющие: вдоль луча и поперечную к нему. С этой целью рассмотрим рисунок, где через η обозначен угол между нормалью $\mathbf{n}$ и единичным вектором $\mathbf{s}$, касательным к лучу, а через φ – угол между направлением скорости движения среды $\mathbf{v}$ и $\mathbf{s}$. Поскольку угол между $\mathbf{v}$ и $\mathbf{n}$ равен величине $\varphi + \eta$, то

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = v\cos(\varphi + \eta) = v_s \cos\eta - v_{\perp s}\sin\eta,$$

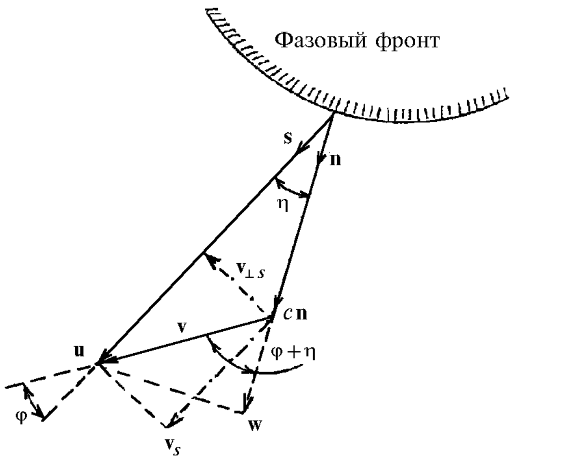
где $v_s = v\cos\varphi$ и $v_{\perp s} = v\sin\varphi$ – значения продольной ($\mathbf{v}_s$) и поперечной ($\mathbf{v}_{\perp s}$) к лучу компонент вектора $\mathbf{v}$. Поэтому, учитывая равенства $\cos\eta = W/U$ и $\sin\eta = v_{\perp s}/c$, имеем

$$\mathbf{n} = \mathbf{s}\, W/U - \mathbf{v}_{\perp s}/c. \tag{21}$$

Подставляя (21) в (20), получаем уравнение для градиента эйконала

$$\nabla\psi = \frac{c_0}{U}\mathbf{s} - \frac{c_0}{c}\frac{\mathbf{v}_{\perp s}}{W}, \tag{22}$$

правая часть которого представлена в виде разности двух ортогональных друг другу векторов.



Геометрические соотношения между фазовой **W** и групповой **U** скоростями звука относительно нормали к фазовому фронту волны **n** и единичного вектора **s**, касательного к лучу, в среде, движущейся со скоростью **v**

С учетом (16)–(18) и (22) выражения (14) имеют вид

$$A_\text{п} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{s}_\text{п}/U_\text{п},$$

$$B_\text{п} = -\{(\mathbf{u}\cdot\overset{0}{\mathbf{e}}_y(M_\text{п}))\,(\mathbf{v}_{\perp s}(M_\text{п})\cdot\overset{0}{\mathbf{e}}_y(M_\text{п})) + (\mathbf{u}\cdot\overset{0}{\mathbf{e}}_z(M_\text{п}))\,(\mathbf{v}_{\perp s}(M_\text{п})\cdot\overset{0}{\mathbf{e}}_z(M_\text{п}))\}/$$
$$/(c_\text{п}\, W_\text{п}),$$

$$A_\text{и} = \mathbf{w}\cdot\mathbf{s}_\text{и}/U_\text{и}, \tag{23}$$

$$B_\text{и} = -\{(\mathbf{w}\cdot\overset{0}{\mathbf{e}}_y(M_\text{и}))\,(\mathbf{v}_{\perp s}(M_\text{и})\cdot\overset{0}{\mathbf{e}}_y(M_\text{и})) + (\mathbf{w}\cdot\overset{0}{\mathbf{e}}_z(M_\text{и}))(\mathbf{v}_{\perp s}(M_\text{и})\cdot\overset{0}{\mathbf{e}}_z(M_\text{и}))\}/$$
$$/\,(c_\text{и} W_\text{и}),$$

где $W_\text{и} = c_\text{и} + \mathbf{v}_\text{и}\cdot\mathbf{n}_\text{и}$; $W_\text{п} = c_\text{п} + \mathbf{v}_\text{п}\cdot\mathbf{n}_\text{п}$; $U_\text{и} = |c_\text{и}\,\mathbf{n}_\text{и} + \mathbf{v}_\text{и}|$; $U_\text{п} = |c_\text{п}\,\mathbf{n}_\text{п} + \mathbf{v}_\text{п}|$; $\mathbf{n}_\text{и} = \mathbf{n}(M_\text{и})$; $\mathbf{n}_\text{п} = \mathbf{n}(M_\text{п})$; $c_\text{и} = c(M_\text{и})$; $c_\text{п} = c(M_\text{п})$; $\mathbf{v}_\text{и} = \mathbf{v}(M_\text{и})$; $\mathbf{v}_\text{п} = \mathbf{v}(M_\text{п})$ – значения параметров звуковой волны и среды в крайних точках луча $M_\text{и}\, M_\text{п}$.

Выражения для $B_\text{п}$ и $B_\text{и}$ в (23) привязаны к ориентации поперечных к лучу осей криволинейной системы координат (x^0, y^0, z^0). В то же время данная система координат была введена таким образом, что совместная ориентация ее орт $\overset{0}{\mathbf{e}}_y$ и $\overset{0}{\mathbf{e}}_z$ в плоскости, ортогональной $\overset{0}{\mathbf{e}}_x$, не существенна в рассматриваемой задаче и может задаваться произвольно. При этом для наглядности окончательного результата удобнее всего ее задавать в указанной плоскости относительно направления, имеющего физическую интерпретацию. Пусть, например, орт $\overset{0}{\mathbf{e}}_y$ в точке $M_\text{п}$ направлен вдоль вектора $\mathbf{v}_{\perp s}(M_\text{п})$, т.е. $\overset{0}{\mathbf{e}}_y(M_\text{п}) = \mathbf{v}_{\perp s}(M_\text{п})/v_{\perp s}(M_\text{п})$. Тогда выражение для $B_\text{п}$ из (23) в силу ортогональности $\overset{0}{\mathbf{e}}_y$ и $\overset{0}{\mathbf{e}}_z$ преобразуется к виду

$$B_\text{п} = -\{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_{\perp s}(M_\text{п})\}/(c_\text{п}\, W_\text{п}).$$

Если обозначить через $\mathbf{u}_{\perp s} = \mathbf{u} - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{s}_\text{п})\,\mathbf{s}_\text{п}$ поперечную к направлению распространения звука компоненту скорости движения приемника $\mathbf{u}$, то с учетом тождества $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_{\perp s}(M_\text{п}) \equiv \mathbf{u}_{\perp s}\cdot\mathbf{v}(M_\text{п})$ последнее выражение для $B_\text{п}$ также можно записать как

$$B_\text{п} = -\,\mathbf{u}_{\perp s}\cdot\mathbf{v}_\text{п}/(c_\text{п}\, W_\text{п}). \tag{24}$$

Аналогично (24) получается выражение для $B_\text{и}$:

$$B_\text{и} = -\,\mathbf{w}_{\perp s}\cdot\mathbf{v}_\text{и}/(c_\text{п}\, W_\text{п}), \tag{25}$$

где $\mathbf{w}_{\perp s} = \mathbf{w} - (\mathbf{w}\cdot\mathbf{s}_\text{и})\,\mathbf{s}_\text{и}$ – поперечная к направлению распространения звука компонента скорости движения источника $\mathbf{w}$.

Подставляя (23)–(25) в (15), получим

$$\omega_\text{п} = \omega_\text{и}\,\frac{1 - \mathbf{u}\cdot\mathbf{s}_\text{п}/U_\text{п} + \mathbf{u}_{\perp s}\cdot\mathbf{v}_\text{п}/(c_\text{п}\, W_\text{п})}{1 - \mathbf{w}\cdot\mathbf{s}_\text{и}/U_\text{и} + \mathbf{w}_{\perp s}\cdot\mathbf{v}_\text{и}/(c_\text{и}\, W_\text{и})}. \tag{26}$$

Выражение (26) можно отнести к окончательной формуле для акустического эффекта Доплера в трехмерно-неоднородной движущейся среде, в которой скорости движения источника и приемника рассматриваются относительно физического направления распространения волны, описываемого векторами $\mathbf{s}_\text{и}$ и $\mathbf{s}_\text{п}$.

Известен также другой вариант представления доплеровских формул, альтернативный (24), в котором указанные скорости рассматриваются относительно нормали к фазовому фронту волны $\mathbf{n} = \nabla\psi/|\nabla\psi|$ (или относительно направления волнового вектора $\mathbf{K} = k_0\nabla\psi$, где $k_0 = \omega/c_0$). В частности, в таком виде приведена классическая формула (1) для акустического эффекта Доплера в однородной неподвижной среде. Для преобразования (26) к виду, аналогичному (1), воспользуемся равенствами: $\mathbf{w}_{\perp s}\cdot\mathbf{v}(M_и) \equiv \mathbf{w}\cdot\mathbf{v}_{\perp s}(M_и)$ и $\mathbf{u}_{\perp s}\cdot\mathbf{v}(M_п) \equiv \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_{\perp s}(M_п)$. Подставляя их в (26), с учетом (21) получим

$$\omega_п = \omega_и \frac{1 - \mathbf{n}_п\cdot\mathbf{u}/W_п}{1 - \mathbf{n}_и\cdot\mathbf{w}/W_и}\,. \tag{27}$$

Выбор опорной (условно неподвижной) системы координат L, в которой рассматривается движение источника и приемника, вообще говоря, произволен и диктуется только удобством физической интерпретации эффекта Доплера. Например, в акустике атмосферы и океана наиболее часто считают неподвижной систему координат $\hat{L}$, привязанную к какой-либо точке земной поверхности. Другой распространенный вариант выбора неподвижной системы координат заключается в ее связывании с приемником (в этом случае $L = L''$). Причиной последнего выбора может служить то, что наблюдатель, выполняющий измерения частоты звука, обычно находится рядом с приемником и, как правило, движется совместно с ним (например, на летательном аппарате или плавающем корабле). В этом случае, аналогично тому, как это делается в СТО [1–3], удобно ввести понятие относительной скорости совместного движения источника и приемника $\upsilon = \mathbf{w} - \mathbf{u}$, равной скорости движения источника $\mathbf{w}''$ в системе координат L''.

Выполнить преобразование формулы (27), соответствующее переходу рассмотрения эффекта Доплера от одной системы координат L к другой $\hat{L}$, движущейся относительно первой с постоянной (условие их инерциальности) скоростью $\mathbf{m}$, нетрудно. Правило сложения скоростей, вытекающее из преобразований Галилея, имеет вид

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}} + \mathbf{m},$$

где $\mathbf{v}$ и $\hat{\mathbf{v}}$ – скорости движения материальной точки в системах координат L и $\hat{L}$. Также известно [1], что из инвариантности фазы волны следует инвариантность нормали к ее фазовому фронту (в данном случае величин $\mathbf{n}_и$ и $\mathbf{n}_п$). Поэтому эффект Доплера в новой системе координат $\hat{L}$ описывается формулой, формально идентичной (27):

$$\omega_п = \omega_и \frac{1 - \mathbf{n}_п\cdot\hat{\mathbf{u}}/\hat{W}_п}{1 - \mathbf{n}_и\cdot\hat{\mathbf{w}}/\hat{W}_и}\,,$$

где $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{m}$; $\hat{\mathbf{w}} = \mathbf{w} - \mathbf{m}$; $\hat{W}_и = c_и + \hat{\mathbf{v}}_и\cdot\mathbf{n}_и$; $\hat{W}_п = c_п + \hat{\mathbf{v}}_п\cdot\mathbf{n}_п$; $\hat{\mathbf{v}}_и = \mathbf{v}_и - \mathbf{m}$ и $\hat{\mathbf{v}}_п = \mathbf{v}_п - \mathbf{m}$. В системе координат L'', связанной с приемником, доплеровская формула имеет вид $\omega_п = \omega_и /(1 - \mathbf{n}_и\,\upsilon/W''_и)$, аналогичный формуле, получающейся из (27) в случае движения только источника звука.

Простота этих конечных формул для акустического эффекта Доплера в неоднородной движущейся среде является кажущейся. Чтобы реально оценивать по ним величину доплеровского сдвига частоты, необходимо дополнительно решать рефракционную задачу относительно ориентаций векторов $\mathbf{s}_и$ и $\mathbf{s}_п$ (или $\mathbf{n}_и$ и $\mathbf{n}_п$). Подобные задачи могут решаться аналитически только для случая стратифицированной среды с использованием, как правило, приближенных методов (см., например, [9, 18]).

Во многих случаях требуется выполнять численное восстановление траектории звукового луча от источника к приемнику путем ее расчетов на компьютере при заданном пространственном распределении значений $c(\mathbf{r})$ и $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ (см. [19, 20]).

Анализ результатов

Прежде всего отметим физическую содержательность формулы (27), вытекающую из ее сравнения с (1). В классической формуле (1), описывающей эффект Доплера в однородной неподвижной среде, адиабатическая скорость звука c одновременно является также его фазовой скоростью ($W = c$); вектор $\mathbf{n}$ совпадает с нормалью к фазовому фронту волны одновременно как в точке излучения звука ($\mathbf{n} = \mathbf{n}_и$), так и в точке приема ($\mathbf{n} = \mathbf{n}_п$). Поэтому из (1) можно утверждать, что акустический эффект Доплера в случае однородной неподвижной среды определенным образом зависит от отношений проекций скоростей движения источника и приемника на нормаль к фазовому фронту волны к фазовой скорости распространения последней. В свою очередь, формула (27) показывает, что данная физическая закономерность сохраняется также в случае неоднородной движущейся среды, причем поскольку значения указанных отношений в этой среде различны в разных точках, то они должны учитываться только для крайних точек луча, связывающего источник и приемник.

Из (27) можно рассмотреть эффект Доплера при полном увлечении источника и приемника неоднородным потоком среды, т.е. когда они по отношению к среде оба неподвижны, но перемещаются относительно друг друга. В этом случае $\mathbf{w} = \mathbf{v}_и$, $\mathbf{u} = \mathbf{v}_п$ и с учетом выражения для фазовой скорости звука (27) преобразуется к виду

$$\omega_п = \omega_и \frac{1 + \mathbf{n}_и\cdot\mathbf{v}_и/c_и}{1 + \mathbf{n}_п\cdot\mathbf{v}_п/c_п}\,. \tag{28}$$

Поскольку в неоднородной движущейся среде, как правило, $\mathbf{n}_и\,\mathbf{v}_и/c_и \neq \mathbf{n}_п\,\mathbf{v}_п/c_п$, то из (28) следует, что доплеровский сдвиг частоты колебаний, регистрируемых приемником, в данном случае также должен наблюдаться.

Вспоминая формулу (2) для оптического эффекта Доплера в вакууме, отметим, что если направление наблюдаемого оптического луча перпендикулярно направлению скорости υ (при $\upsilon\cdot\mathbf{s} = 0$), то имеет место поперечный эффект Доплера, описываемый формулой

$$\omega_п = \omega_и \sqrt{1 - \upsilon^2/c_e^2}. \tag{29}$$

Этот эффект проявляется для электромагнитных волн как одно из следствий СТО, а именно из-за неодинакового течения времени в движущихся относительно друг друга системах координат. Поэтому его наличие обычно отмечают как отличительную особенность эффекта Доплера для электромагнитных волн по сравнению с акустическим случаем.

Из полученной выше формулы (26) следует, что в акустике движущихся сред также может наблюдаться доплеровский сдвиг частоты принимаемых колебаний при распространении волны перпендикулярно направлениям движения источника или приемника, т.е. при $\mathbf{w}\cdot\mathbf{s} = 0$ или $\mathbf{u}\cdot\mathbf{s} = 0$. Величина указанного сдвига описывается соотношением

$$\omega_п = \omega_и \frac{1 + \mathbf{u}_{\perp S}\cdot\mathbf{v}_п/(c_п\, W_п)}{1 + \mathbf{w}_{\perp S}\cdot\mathbf{v}_и/(c_и\, W_и)} \text{ или } \omega_п = \omega_и\, /\{1 + \upsilon\, \mathbf{v}''_и/(c_и\, W''_и)\},$$

где $\mathbf{v}''_и = \mathbf{v}_и - \mathbf{v}_п$, не совпадающим с (29). Поскольку данное явление формально удовлетворяет принятому определению поперечного эффекта Доплера, то для него имеет смысл использовать то же наименование.

В соответствии с (26) движение источника или приемника обусловливает изменение времени распространения звука между ними τ прежде всего за счет изменения геометрической длины S луча, связывающего их, вызывая тем самым в силу соотношения (7) продольный эффект Доплера. При этом вклад в доплеровский сдвиг частоты изменений ΔU значений групповой скорости звука U вдоль трассы его распространения сказывается обычно значительно меньше в силу малости величин $|\Delta U|/U$ в реальных природных средах. При перемещении источника или приемника перпендикулярно направлению распространения волны звук приходит в точку приема в каждый момент времени по новому лучу с другими значениями углов его выхода. Данные лучи можно рассматривать также как единственный нестационарный луч, связывающий источник и приемник, который в зависимости от текущего местоположения последних поворачивается в пространстве. Поскольку в движущейся (анизотропной для звуковых волн) среде значение групповой скорости звука зависит от направления его распространения, то указанный поворот луча будет вызывать дополнительное изменение τ даже при фиксированном значении его длины S. Последнее явление описывается в (26) как поперечный эффект Доплера.

Отметим, что для единичного вектора $\mathbf{s}$, характеризующего направление распространения звуковой волны, справедливо соотношение [13]:

$$\mathbf{s} = (\mathbf{n} + \mathbf{v}/c)/(1 + 2\mathbf{vn} + \mathbf{v}^2/c^2)^{1/2}.$$

Нормаль к фазовому фронту волны $\mathbf{n}$, как уже указывалось, является инвариантной величиной. В то же время при переходе от одной инерциальной системы координат к другой, движущейся относительно первой, изменяется скорость потока среды $\mathbf{v}$. При этом в соответствии с последним соотношением направление $\mathbf{s}$ также изменяется, т.е. направление распространения звуковой волны не является инвариантной величиной. Поэтому величина доплеровского сдвига частоты, относящаяся к поперечному эффекту Доплера, зависит от выбора системы координат.

В случае однородного потока среды ($c(\mathbf{r}) = \text{const}$ и $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \text{const}$) $\mathbf{s}_п = \mathbf{s}_и = \mathbf{s}$ и формула (26) преобразуется к виду

$$\omega_п = \omega_и \frac{1 - \mathbf{u}\cdot\mathbf{s}/U + \mathbf{u}_{\perp S}\cdot\mathbf{v}/(c\, W)}{1 - \mathbf{w}\cdot\mathbf{s}/U + \mathbf{w}_{\perp S}\cdot\mathbf{v}/(c\, W)}, \tag{30}$$

где $U = |c\,\mathbf{n} + \mathbf{v}|$ и $W = c + \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$. Выражение (30) показывает, что поперечный эффект Доплера может наблюдаться даже в отсутствие рефракции, если в системе координат L, в которой рассматривается данное явление, среда движется. Однако легко заметить, что в отличие от более общего случая $c(\mathbf{r})$ и $\mathbf{v}(\mathbf{r}) \neq \text{const}$ при однородном потоке среды можно всегда указать такую абсолютную систему отсчета, в которой $\mathbf{v} \equiv 0$ и, значит, отсутствует поперечный эффект Доплера. В абсолютной системе отсчета (30) имеет вид

$$\omega_п = \omega_и \frac{1 - \mathbf{u}\cdot\mathbf{s}/U}{1 - \mathbf{w}\cdot\mathbf{s}/U}.$$

Поскольку в неподвижной среде $\mathbf{s} = \mathbf{n}$ и $U = c$, то последнее выражение тождественно (1).

Известные формулы для описания эффекта Доплера в акустике

Вывод классической формулы (1) для акустического эффекта Доплера в однородной неподвижной среде, также из инвариантности фазы волны, описан, например, в [1, 2]. Аналогичная формула без вывода приводится в [4]. В то же время в [3, 6] формула, совпадающая по виду с (1), содержит вместо величины $\mathbf{w}\cdot\mathbf{n}$ проекцию $\mathbf{w}$ на направление $\mathbf{p} = \{\mathbf{r}_п(t) - \mathbf{r}_и(t)\}/|\mathbf{r}_п(t) - \mathbf{r}_и(t)|$, вдоль которого визуально наблюдается источник в момент приема звуковых волн t. Поскольку при движении источника направления $\mathbf{n}$ и $\mathbf{p}$ не совпадают, то в [3, 6] допускается ошибка, составляющая величину второго порядка малости по w/c. Точная формула для эффекта Доплера в однородной среде, выраженная через проекции $\mathbf{u}$ и $\mathbf{w}$ на направление $\mathbf{p}$, получена Д.И. Блохинцевым [7]. В ней присутствует квадратичный член w^2/c^2. Формула для частоты $\omega_п$, полученная в [21], также содержит w^2/c^2. Однако поскольку в этой работе взаимное расположение источника и приемника характеризуется нормалью $\mathbf{n}$, то приведенные в ней результаты нельзя признать правильными.

В системе координат, в которой однородная среда движется со скоростью $\mathbf{v}$, скорости движения источника и приемника соответственно равны $\mathbf{w} - \mathbf{v}$ и $\mathbf{u} - \mathbf{v}$. Подставляя их в (1) и учитывая инвариантность $\mathbf{n}$, имеем

$$\omega_п = \omega_и \frac{1 + \mathbf{u}\cdot(\mathbf{v} - \mathbf{u})/c}{1 + \mathbf{w}\cdot(\mathbf{v} - \mathbf{w})/c}.$$

Это выражение приведено в монографии В.Е. Осташева [13] как формула для эффекта Доплера в однородном потоке.

Акустический эффект Доплера в неоднородной движущейся среде впервые рассматривался в [8]. Основная цель данной работы заключалась в анализе рефракционных ошибок измерений скоростей ветра в доплеровских содарах (акустических локаторах). При этом в ней были допущены принципиальные ошибки. В частности, в [8] длина луча, связывающего источник и приемник, и, следовательно, приращение эйконала $\psi(\mathbf{r}_и, \mathbf{r}_п)$ зависят от координат источника не в момент излучения им звука $t_и$, а в момент приема t. Это привело к исчезновению известной нелинейности доплеровской формулы в акустике относительно скорости движения источника $\mathbf{w}$ (или υ). Кроме того, в [8] игнорируется поворот луча во времени при наличии поперечных к нему компонент скоростей движения источника или приемника. Вследствие этого не учитывается вклад в доплеровский сдвиг частоты $\omega_д = \omega_п - \omega_и$ описанного выше поперечного эффекта. Не трудно заметить, что в результате изложенного относительная погрешность оценивания $\omega_д$ в [8] сравнима по величине с членом порядка $\varepsilon = \max\{|\mathbf{v}|/c_0 \ll 1,\ |c - c_0|/c_0 \ll 1\}$. Поэтому из результатов этой работы нельзя оценить вклад рефракции в $\omega_п$ даже с точностью линейного приближения по ε.

Желание устранить ошибки [8] и получить корректные формулы для оценивания влияния атмосферной стратификации на работу доплеровских содаров с точностью до членов, линейных по ε, привело к появлению работ [9, 10]. Поскольку полученные в [9, 10] результаты представляли автономный интерес, то позднее они были обобщены в [11] на случай трехмерно-неоднородной движущейся среды. В [11] впервые также было указано на наличие поперечного эффекта Доплера в акустике движущихся сред.

Одновременно с [11] была опубликована статья В.Е. Осташева [12], в которой также рассматривался эффект Доплера в трехмерно-неоднородной движущейся среде. При этом для его описания было предложено соотношение

$$\omega_п = \omega_и \frac{1 + \mathbf{s}_и \cdot \mathbf{v}_и / c_и}{1 + \mathbf{s}_и \cdot (\mathbf{v}_и - \mathbf{w}) / c_и} \frac{1 + \mathbf{s}_п \cdot (\mathbf{v}_п - \mathbf{u}) / c_п}{1 + \mathbf{s}_п \cdot \mathbf{v}_п / c_п}, \qquad (31)$$

где $\mathbf{s}_и$ и $\mathbf{s}_п$ – единичные векторы в направлении от источника к приемнику в системах координат, движущихся со скоростями $\mathbf{v}_и$ и $\mathbf{v}_п$.

Формула (31) выводилась в [12] из физических рассуждений, сущность которых кратко можно выразить следующим образом. Рассматривается среда, в которой характерный масштаб a изменения скорости звука c и скорости движения среды $\mathbf{v}$ много больше длины волны λ и размеров источника или приемника d. Вблизи источника и приемника, движущихся с постоянными скоростями $\mathbf{w}$ и $\mathbf{u}$, выделяются области пространства $D_и$ и $D_п$ с масштабом много больше λ и d, но меньше a. В этих областях c и $\mathbf{v}$ считаются постоянными и равными соответственно $c_и$, $\mathbf{v}_и$ и $c_п$, $\mathbf{v}_п$. Эффект Доплера рассматривается только внутри областей $D_и$ и $D_п$ на основе классической формулы (1), используя правило сложения скоростей при переходе из одной инерциальной системы координат в другую. В доплеровских формулах, полученных для областей $D_и$ и $D_п$, направления векторов $\mathbf{s}_и$ и $\mathbf{s}_п$ не конкретизируются, так как считаются связанными в соответствии с законами рефракции. В случае одновременного движения источника и приемника формулы для областей $D_и$ и $D_п$ сводятся в одну на основе того, что при распространении волны в неоднородной движущейся среде ее частота в выбранной (условно неподвижной) системе координат L не изменяется. В результате получается выражение (31). Позднее (см., например, [13]) векторы $\mathbf{s}_и$ и $\mathbf{s}_п$ в формуле (31) было предложено заменить на совпадающие с ними нормали $\mathbf{n}_и$ и $\mathbf{n}_п$.

Формула (31) и аналогичное выражение, полученное в [11], заметно различались между собой. Вследствие использования в [11] и [12] принципиально разных подходов к решению задачи, непосредственно из этих работ было не понятно, как одно из указанных выражений можно преобразовать в другое. Поэтому в [14] в рамках того же подхода, который использовался в [9–11], впервые для описания акустического эффекта Доплера в неоднородной движущейся среде было получено соотношение (27). Если в последнем значения фазовой скорости звука $W_и$ и $W_п$, входящие в него, выразить через величины c и $\mathbf{v}$, то оно легко преобразуется в (31). Полученная здесь формула (26) ранее в литературе не приводилась.

1. *Меллер К.* Теория относительности. Изд. 2-е. М.: Атомиздат, 1975. 400 с.
2. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Оптика. Изд. 2-е, испр. М.: Наука, 1985. 751 с.
3. *Ландсберг Г.С.* Оптика. Изд. 5-е., испр. и доп. М.: Наука, 1976. 926 с.
4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. Изд. 3-е. М.: Наука, 1986. 733 с.
5. *Исакович М.А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973. 495 с.
6. *Ультразвук* (МЭ)/ Под ред. И.П. Голямина. М.: Сов. энциклопедия, 1979. 400 с.
7. *Блохинцев Д.И.* Акустика неоднородной движущейся среды. М.: Наука, 1981. 206 с.
8. *Georges J.M., Clifford S.F.* // J. Acoust. Soc. America. 1972. V. 52. *N* 5 (2). P. 1514–1520.
9. *Богушевич А.Я., Красненко Н.П.* // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1987. Т. 23. № 7. С. 716–723.
10. *Богушевич А.Я., Красненко Н.П.* // Распространение звуковых и оптических волн в атмосфере. Томск: ТФ СО АН СССР, 1988. С. 7–10.
11. *Богушевич А.Я., Красненко Н.П.* // Акуст. журн. 1988. Т. 34. Вып. 4. С. 598–602.
12. *Осташев В.Е.* // Акуст. журн. 1988. Т. 34. Вып. 4. С. 700–705.
13. *Осташев В.Е.* Распространение звука в движущихся средах. М.: Наука, 1992. 206 с.
14. *Богушевич А.Я.* // Акуст. журн. 1994. Т. 40. Вып. 5. С. 50–53.
15. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. М.: Наука, 1974. Т.IV. Ч. 1. 336 с.
16. *Ugincius P.* // J. Acoust. Soc. America. 1972. V. 51. N 5. P. 1759–1763.
17. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по высшей математике. М.: Наука, 1974. 831 с.
18. *Богушевич А.Я., Красненко Н.П.* // Оптика атмосферы и океана. 1994. Т. 7. № 7. С.1258–1274.
19. *Chessel S.I.* // J. Acoust. Soc. America. 1973. V. 53. N 1. P. 83–87.
20. *Абрамов Н.Г., Богушевич А.Я., Карпов В.И., Красненко Н.П., Фомичев А.А.* // Оптика атмосферы и океана. 1994. Т. 7. № 3. С. 403–413.
21. *Сухоруков В.И., Сухоруков Г.И.* // Акуст. журн. 1986. Т. 32. Вып. 1. С. 134.

A.Ya. Bogushevich. **To Analysis of the Acoustic Doppler Effects in the Three-dimensional Inhomogeneous Moving Medium.**

The variation Fermat′s principle known in the geometric optics have been first applied for analysis of the acoustic Doppler effects. Using this technique, the exact and physically illustrative analytical solutions for Doppler formula are obtained in the case of sound propagation in the three-dimensional inhomogeneous moving medium.