«Оптика атмосферы и океана», **15**, № 4 (2002)

УДК 535.36

А.Б. Гаврилович

Учет границы раздела сред в задаче об отыскании функции источников для уравнения переноса излучения в сферической системе «атмосфера–океан»

Институт физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси, г. Минск

Поступила в редакцию 5.09.2001 г.

Сферическая модель системы «атмосфера–океан» представлена математически эквивалентной моделью, в которой отражение, пропускание и преломление света на границе раздела воздух–вода выражаются посредством оптических параметров элементарного объема среды в уравнении переноса излучения (УПИ). Последние определяются с использованием понятий теории обобщенных функций и принципа Ферма. Функция источников для УПИ в такой модели выражается через линейные непрерывные функционалы в форме, соответствующей отсутствию искривления и преломления лучей. Таким образом, показана возможность обобщения на границу раздела сред нетрадиционного способа учета рефракции, основанного на деформировании системы сферических координат.

Введение

Теоретическое моделирование поля солнечной радиации, рассеянной воздушной и водной оболочками системы «атмосфера–океан» (САО), основывается на решении краевой задачи для уравнения переноса излучения (УПИ). Постановка задачи о переносе солнечного излучения в САО предполагает учет большого числа параметров, определяющих характер взаимодействия света со средой как внутри, так и на ее границах, включая и границу раздела сред воздух–вода. В связи с этим широкое распространение получили приближенные методы, основанные на введении различных упрощающих предположений, таких, например, как плоская геометрия среды, отсутствие рефракции света, однократное взаимодействие света с френелевской границей раздела и др. (см. [1–3] и ссылки в них). Обмен излучением между средами с плоской френелевской границей раздела учтен в работе [4]. Многопараметричность задачи, трудность получения простых решений побуждают к поиску новых методических подходов, учитывающих сферическую геометрию системы, рефракцию света, сингулярные свойства граничных условий и функции источников.

В данной статье излагается нетрадиционный подход к учету рефракции и границы раздела сред в задаче об отыскании функции источников УПИ. При формулировке задачи о переносе излучения в сферической системе «атмосфера–океан» с учетом искривления лучей, преломления и отражения на френелевской границе этот подход позволяет представить функцию источников в форме, явно не включающей эффект рефракции и границу раздела сред.

1. Функция источников для уравнения переноса излучения с учетом рефракции

В среде с переменным показателем преломления n света УПИ

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{I}{n^2}\right) = \varepsilon\left(\frac{B}{n^2} - \frac{I}{n^2}\right) \qquad (1)$$

выражает закон изменения интенсивности I на элементе ds траектории луча [5]. В уравнении (1) интенсивность $I = I(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ является функцией радиуса-вектора точки $\mathbf{r}$ пространства и вектора $\mathbf{s}$ направления распространения излучения. Функция источников равна [6]:

$$B(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = \frac{\Lambda}{4\pi}\int_{4\pi} x(\mathbf{r}, \mathbf{s}{\cdot}\mathbf{s}')\, I(\mathbf{r}, \mathbf{s}')\, d\Omega', \qquad (2)$$

где $\mathbf{s}'$ – вектор направления луча, падающего на элементарный объем в точке $\mathbf{r}$, $\mathbf{s}{\cdot}\mathbf{s}' = \cos\gamma$, γ – угол рассеяния; $d\Omega'$ – элемент телесного угла в окрестности вектора $\mathbf{s}'$.

В каждой точке $\mathbf{r}$ среда характеризуется показателем ослабления света ε, вероятностью выживания кванта света (альбедо однократного рассеяния) $\Lambda = \sigma/\varepsilon$, где σ – показатель рассеяния, и индикатрисой рассеяния света $x(\mathbf{s}{\cdot}\mathbf{s}')$, описывающей угловое распределение излучения, рассеянного элементарным объемом среды.

Граничные условия выражают характер изменения интенсивности на нижней границе (НГ) САО и на границе раздела сред, а также задают поток солнечного излучения, падающего на верхнюю границу (ВГ) атмосферы

$$I_{0\lambda} = \pi F_\lambda\, \delta(\mathbf{s}' - \mathbf{s}_0)\ , \qquad (3)$$

где $\delta(\mathbf{s}' - \mathbf{s}_0)$ – дельта-функция Дирака; $\mathbf{s}_0$ – вектор направления солнечного луча на ВГ атмосферы; πF_λ – солнечная постоянная; λ – длина волны излучения. Индекс длины волны в дальнейшем будем опускать.

Учитывая, что функция источников $B = B(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ при учете рефракции имеет вид (2) [6], такой же как и при ее отсутствии, выделим из B ее компоненту $B_1 = B_1(\mathbf{r}, \mathbf{s})$, обусловленную нерассеянным излучением. Для этого представим решение УПИ в виде суммы $I = I_i + I_d$ прямой $I_i = I_i(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ и диффузной $I_d = I_d(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ компонент и выделим из (1) уравнение для I_i:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{I_i}{n^2}\right) = \varepsilon \left(-\frac{I_i}{n^2}\right). \qquad (4)$$

Для интенсивности I_d диффузной компоненты уравнение переноса излучения

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{I_d}{n^2}\right) = \varepsilon \left(\frac{B}{n^2} - \frac{I_d}{n^2}\right) \qquad (5)$$

содержит функцию источников $B = B_d + B_1$, определяемую интегральным выражением в виде суммы двух слагаемых:

$$B = \frac{\Lambda}{4\pi}\int\limits_{4\pi} x(\mathbf{r}, \mathbf{s}{\cdot}\mathbf{s}')\, I_d(\mathbf{r}, \mathbf{s}')\, d\Omega' +$$

$$+ \frac{\Lambda}{4\pi}\int\limits_{4\pi} x(\mathbf{r}, \mathbf{s}{\cdot}\mathbf{s}')\, I_i(\mathbf{r}, \mathbf{s}_0')\, d\Omega', \qquad (6)$$

где диффузная компонента B_d (первое слагаемое) сохраняет вид (2).

Компонента B_1, определяемая вторым слагаемым в (6), соответствует источникам однократного рассеяния и содержит неизвестную сингулярную функцию $I_i(\mathbf{r}, \mathbf{s}_0')$, где $\mathbf{s}_0'$ – вектор направления нерассеянного солнечного луча в точке $\mathbf{r}$ пространства. Очевидно, что в САО с переменным показателем преломления из-за эффекта рефракции направление $\mathbf{s}_0'$ излучения, падающего на элементарный объем среды в точке $\mathbf{r}$ пространства, не совпадает с первоначальным направлением $\mathbf{s}_0$ солнечных лучей на ВГ атмосферы. Функция $I_i(\mathbf{r}, \mathbf{s}_0')$ находится путем интегрирования уравнения (4) при граничном условии (3). Заметим, что интегрирование в (4) следует выполнять по реальной криволинейной траектории $\breve{L}$ солнечного луча на его пути от ВГ атмосферы до фиксированной точки $P(\mathbf{r})$ пространства. Решение уравнения (4)

$$I_i^{\text{o}} = \frac{I_i}{n^2} = \pi F \exp\,(-\int\limits_{\breve{L}} \varepsilon\, ds)\ \delta(\mathbf{s}' - \mathbf{s}_0') =$$

$$= \pi F \exp\,(-\,\tau)\, \delta(\mathbf{s}' - \mathbf{s}_0') \qquad (7)$$

в качестве параметров содержит оптическое расстояние $\tau = \tau(\mathbf{r})$, соответствующее пути луча до точки P:

$$\tau = \int\limits_{\breve{L}} \varepsilon\, ds, \qquad (8)$$

и направление $\mathbf{s}_0' \neq \mathbf{s}_0$, зависящее от фактического распределения показателя преломления n на его траектории. Воспользуемся понятиями, принятыми в теории обобщенных функций [7], и определим $\pi F \exp\,(-\,\tau)\, \delta(\mathbf{s}' - \mathbf{s}_0')$ как плотность углового распределения солнечного излучения, падающего на элементарный объем среды, а в качестве основной функции выберем $\frac{\Lambda}{4\pi} x(\mathbf{r}, \mathbf{s}{\cdot}\mathbf{s}')$. Тогда нахождение функции источников $B_1(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ однократного рассеяния в (6) сводится к вычислению функционала

$$B_1(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = \frac{\Lambda}{4\pi}\int\limits_{4\pi} x(\mathbf{r}, \mathbf{s}{\cdot}\mathbf{s}')\, \pi F \exp\,(-\,\tau)\, \delta(\mathbf{s}' - \mathbf{s}_0') d\Omega' =$$

$$= \frac{\Lambda}{4\pi}\, x(\mathbf{r}, \mathbf{s}{\cdot}\mathbf{s}_0')\, \pi F \exp\,(-\,\tau) \qquad (9)$$

при фиксированном направлении $\mathbf{s}_0'$ солнечного луча, как параметра индикатрисы рассеяния $x(\mathbf{r}, \mathbf{s}{\cdot}\mathbf{s}_0')$.

Выражение (9) задает схему для отыскания функции источников $B(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ в среде, когда показатель преломления света $n(\mathbf{r})$ непрерывно зависит от пространственных координат. Распределение $n(\mathbf{r})$ в САО имеет разрыв на границе раздела сред, и функция источников $B(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ должна учитывать эту особенность. Ниже дана обобщенная схема отыскания функции источников $B(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ для многослойной и двухсредной сферических моделей САО, со скачкообразным распределением $n(\mathbf{r})$ по радиусу.

2. Учет границ раздела в многослойной сферической модели САО

Рассмотрим модель САО, состоящую из сферически симметричных слоев конечной геометрической толщины с дискретными значениями показателя преломления. Граница раздела сред воздух – вода является одной из множества границ раздела слоев с разными n. Траектория квантов в такой среде будет представлять собой ломаную линию, удовлетворяющую принципу Ферма. Принцип Ферма выражает условие, согласно которому в среде с переменным показателем преломления луч света выбирает экстремальную траекторию. Математически это сводится к требованию, чтобы первая вариация функционала, выражающего оптическую длину луча l^{o} (верхний индекс «о» – оптическая) на пути между двумя произвольными точками P_1 и P_2, принимала нулевое значение [8]:

$$\delta \int\limits_{P_1}^{P_2} n ds = 0. \qquad (10)$$

Интеграл $l^{о}$ в (10) еще называют приведенной длиной луча [9], поэтому ниже будем пользоваться этим названием, чтобы не путать с термином оптическое расстояние для τ. Внутри каждого слоя принцип Ферма непосредственно приводит к закону прямолинейного распространения света. При переходе луча через границу раздела слоев с разными значениями n этот принцип дает закон Снеллиуса преломления света [9]:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2, \tag{11}$$

где θ_1 и θ_2 – соответственно углы падения и преломления света; n_1 и n_2 – показатель преломления света в первом и втором слоях, отсчитываемых по ходу луча. Относительный показатель преломления $n_{21} = n_2/n_1$ принимает значения ≥ 1 и ≤ 1.

Из закона сохранения потока для светового луча как лучевой трубки [10], при учете закона преломления (11), легко находится выражение лучевого инварианта

$$I^{о} = \frac{I_t}{n_2^2} = \frac{I_i - I_r}{n_1^2} = \frac{I_i}{n_1^2}(1 - R) = \text{const}, \tag{12}$$

определяющего распределение приведенной интенсивности $I^{о} = \dfrac{I}{n^2}$ по траектории луча в прозрачной слоистой среде. Индексы i, r, t обозначают соответственно интенсивность падающего, отраженного и преломленного света; $R = R(n_{21}, \theta_1)$ – коэффициент френелевского отражения на границе раздела слоев [9]. Таким образом, в слоистой модельной среде, согласно (12), ослабление приведенной интенсивности $I^{о}$ определяется не только эффектами поглощения и рассеяния света внутри слоев, но также потерями на отражение, поскольку при $n_{21} \neq 1$ на границах раздела слоев множитель $1 - R < 1$. Назовем этот фактор френелевским ослаблением света в среде. Эффект френелевского ослабления света проявляется в пространственно разнесенных точках. В этих точках показатель френелевского ослабления света имеет сингулярность и в классическом смысле не определен. Однако он может быть определен с позиций теории обобщенных функций [7] в смысле Соболева–Шварца

$$(f', g) = -(f, g'). \tag{13}$$

Здесь функционал (f', g) представляет собой производную сингулярной обобщенной функции f, определенной на основной функции g. Назовем f' плотностью распределения.

Направление $\mathbf{s}$ луча в пространстве будем задавать сферическими координатами (ϑ, φ), где ϑ – полярный угол вектора направления; φ – азимутальный угол. В соответствии с (13) определим оптическую толщину $\tau_F = \tau_F(\mathbf{r})$, обусловленную френелевским ослаблением света на пути $\breve{L}$ луча в среде от ВГ атмосферы до точки $P(\mathbf{r})$, в виде функционала

$$\tau_F(\mathbf{r}) = \int\limits_{\breve{L}} \varepsilon_F\, ds = \int\limits_{\breve{L}} \sum_{j=1}^{N} \tau_{Fj}\delta(r - r_j)\,\delta(\vartheta' - \vartheta'_j)\,ds = \sum_{j=1}^{N} \tau_{Fj}(r_j, \vartheta'_j), \tag{14}$$

где в качестве сингулярной плотности распределения используется величина

$$\varepsilon_F(r, \vartheta') = \sum_{j=1}^{N} \tau_{Fj}\delta(r - r_j)\,\delta(\vartheta' - \vartheta'_j). \tag{15}$$

Назовем ее показателем френелевского ослабления света. Здесь индекс $j = 1, 2, \ldots, N$ – порядковый номер границ раздела (j – 1-го и j-го) слоев на пути солнечного луча до точки $P(\mathbf{r})$; r_j – радиус j-й границы раздела слоев в сферической системе координат с началом в центре планеты; ϑ'_j – полярный угол вектора направления луча, падающего на j-ю границу раздела слоев; $\tau_{Fj} = -\ln(1 - R_j)$ – френелевская оптическая толщина, соответствующая проходу луча через j-ю границу раздела; $R_j = R_j(n_{21}, \theta_1^j)$ – френелевский коэффициент отражения света на j-й границе раздела. На каждой из границ раздела при вычислении $R_j(n_{21}, \theta_1^j)$ угол падения луча θ_1^j находится из соотношения $\theta_1^j = \arccos|\cos\vartheta'_j|$.

При учете границ раздела слоев согласно (14), (15) определение суммарного оптического расстояния $\tau^{о}(\mathbf{r})$ на трассе $\breve{L}$ луча сводится к обычному суммированию $\tau^{о}(\mathbf{r}) = \tau_F(\mathbf{r}) + \tau(\mathbf{r})$ френелевской оптической толщины $\tau_F(\mathbf{r})$ на границах раздела слоев и оптической толщины $\tau(\mathbf{r})$, обусловленной поглощением и рассеянием света внутри каждого слоя.

Перейдем к нахождению направления $\mathbf{s}'_0$ нерассеянного солнечного луча, достигающего точки $P(\mathbf{r})$. В сферической модели САО учет рефракции не приводит к изменению азимутального угла φ_0 вектора направления, т.е. $\varphi'_0 = \varphi_0$ [8]. Полярный же угол ϑ'_0 направления луча в точке $P(\mathbf{r})$ отличается от своего первоначального значения ϑ_0 на величину угла рефракции β, именно $\vartheta'_0 = \vartheta_0 - \beta$. Отклонение луча от первоначального направления в слоистой модели САО происходит в дискретных точках траектории, расположенных на границах раздела слоев. Поэтому угол рефракции $\beta = \beta(\mathbf{r})$ на трассе $\breve{L}$ луча, аналогично френелевской оптической толщине (14), можно определить в смысле (13) в виде функционала:

$$\beta(\mathbf{r}) = \int\limits_{\breve{L}} \beta' ds = \int\limits_{\breve{L}} \sum_{j=1}^{N} \beta_j\,\delta(r - r_j)\,\delta(\vartheta' - \vartheta'_j)\,ds = \sum_{j=1}^{N} \beta_j(r_j, \vartheta'_j). \tag{16}$$

Здесь угол рефракции луча $\beta_j(r_j, \vartheta'_j)$ на j-й границе раздела слоев находится из закона преломления света (11) по формуле

$$\beta_j(r_j,\ \vartheta_j') = \vartheta' - \arcsin\ (\sin\vartheta'/n_{21})\ . \qquad (17)$$

Косинус угла рассеяния $\cos\gamma_0' = \mathbf{s}\cdot\mathbf{s}_0'$, для индикатрисы в точке $P(\mathbf{r})$ при учете рефракции света, определяется из формулы сферической тригонометрии

$$\cos\gamma_0' = \cos\vartheta\ \cos\vartheta_0' + \sin\ \vartheta\ \sin\vartheta_0'\ \cos\left(\varphi - \varphi_0'\right), \qquad (18)$$

где ϑ_0' и φ_0' – полярный и азимутальный углы вектора направления $\mathbf{s}_0'$ луча, падающего на элементарный объем среды; ϑ и φ – соответствующие углы для луча $\mathbf{s}$, рассеянного средой.

Сингулярную компоненту, обусловленную френелевским отражением на границах раздела слоев, учтем в качестве дополнительной интенсивности в угловой диаграмме рассеяния. В элементарный объем v среды включим также точки $\mathbf{r}_{jv}$, принадлежащие границам раздела. Плотность углового распределения рассеянного излучения $\dfrac{\sigma_F}{4\pi}\,x_F(\gamma)$ за счет отраженной компоненты, очевидно, равна

$$\frac{\sigma_F}{4\pi}\,x_F(\gamma) = \sum_{jv} R_j\ \delta(r - r_j)\ \delta(\mu' - \mu_j')\delta(\varphi' - \varphi_j'),$$
$$\mu = \cos\ \vartheta, \qquad (19)$$

где суммирование производится по точкам пространства, лежащим в пределах элементарного объема среды. Здесь σ_F и $x_F(\gamma)$ – соответственно показатель и индикатриса френелевского рассеяния. Их определение будет дано в следующем разделе.

При учете (14), (16), (19) из (9) следует выражение функционала

$$\varepsilon^{\text{o}}B_1^{\text{o}}(\mathbf{r},\ \mathbf{s}) = \frac{\sigma^{\text{o}}}{4\pi}\,x^{\text{o}}(\mathbf{r},\ \mathbf{s},\ \mathbf{s}_0')\pi F\ \exp(-\tau^{\text{o}}), \qquad (20)$$

где суммарный показатель рассеяния $\sigma^{\text{o}} = \sigma + \sigma_F$, а индикатриса рассеяния света $x^{\text{o}}(\mathbf{r},\ \mathbf{s},\ \mathbf{s}_0')$ представляет собой средневзвешенную функцию вида $x^{\text{o}} = \sum\limits_i q_i x_i$, определенную через весовые множители q_i рассеивающих компонент $(\sum\limits_i q_i = 1)$.

3. Учет границы раздела в двухсредной сферической модели САО

Двухсредная сферическая модель САО получается из рассмотренной выше многослойной модели в результате предельного перехода при увеличении числа слоев системы к бесконечности. Рассмотрим, к каким изменениям выражений для τ^{o}, ϑ_0' и $\dfrac{\sigma^{\text{o}}}{4\pi}\,x^{\text{o}}(\gamma)$, определяющих функцию источников, приведет такой предельный переход. Так, траектория солнечного луча в результате предельного перехода из ломаной линии превратится в изогнутую с единственным изломом на границе раздела сред воздух–вода. На уровнях, соответствующих воздушной и водной оболочкам, относительный показатель преломления n_{21} станет равным единице, коэффициент отражения $R = 0$, лучевой инвариант (12) примет вид $I^{\text{o}} = I/n^2 = \text{const}$, и исчезнут, следовательно, изломы траектории луча. На границе раздела сред воздух–вода, напротив, коэффициент френелевского отражения сохранит прежнее значение $R \neq 0$ и будет иметь место преломление луча, так как $n_{21} \neq 1$.

Найдем выражение оптической длины τ^{o} для точки P, расположенной, например, на уровне r в водной среде. Для этого выведем сначала условие, которому удовлетворяет каждая точка реальной траектории солнечного луча. Из уравнения (4) в сферических координатах (см. [6, 12]) компоненту дифференциального оператора, содержащую рефракционный член, представим в виде

$$\left(\frac{\partial I}{\partial s}\right)\bigg|_{\vartheta} = -\sin\vartheta\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_c}\right)\frac{\partial I}{\partial\vartheta} = \frac{\partial I}{\partial\vartheta}\,\frac{\partial\vartheta}{\partial r}\,\frac{\partial r}{\partial s}\,. \qquad (21)$$

Из (21) получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial r} = \text{tg}\ \vartheta\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_c}\right) = -\text{tg}\ \vartheta\ \frac{\partial}{\partial r}\ln\ (nr), \qquad (22)$$

содержащее рефракционную кривизну луча

$$\frac{1}{r_c} = -\frac{\partial}{\partial r}\ln\ n. \qquad (23)$$

Здесь r_c – радиус кривизны. Разделим в (22) переменные

$$-\frac{\partial(\sin\vartheta)}{\sin\vartheta} = \frac{\partial(nr)}{nr}\,, \qquad (24)$$

выполним интегрирование и в результате придем к выражению инварианта

$$\breve{C} = nr\ \sin\vartheta = n_P r_P\ \sin\vartheta_P = \text{const}, \qquad (25)$$

которому удовлетворяет реальная траектория светового луча в САО на пути от ВГ атмосферы до фиксированной точки P. Здесь $n_P r_P\ \sin\vartheta_P$ – значение инварианта в точке P, которая может находиться на произвольном уровне r, выше или ниже границы раздела сред. Очевидно, что выражение (25) применимо и к границе раздела сред воздух–вода. Именно, при $r = r_P$, на границе раздела из (25), как частный случай, следует закон преломления луча (11). В однородной среде, при $n = n_P$, из (25) следует частное выражение инварианта

$$\bar{C} = r\ \sin\vartheta = r_P\ \sin\vartheta_P = \text{const} \qquad (26)$$

для прямолинейной траектории луча. Учтем инвариант (25) в выражении для элемента ds криволинейной траектории луча $\breve{L}$ и в результате подстановок получим

$$\tau(\mathbf{r}) = \int\limits_{\breve{L}} \varepsilon\ ds =$$

$$= \int\limits_{\breve{L}} \frac{\varepsilon\, dr}{\sqrt{1-\sin^2\vartheta}} = \int\limits_{\breve{L}} \frac{\varepsilon\, nr\, dr}{\sqrt{(nr)^2-(n_P r_P \sin\vartheta_P)^2}}\,. \quad (27)$$

Подчеркнем, что оптическая толщина $\tau(\mathbf{r})$, как интеграл по криволинейной траектории луча, находится по формуле (27), независимо от того, где выбрана точка P, в воздушной или водной оболочке. В соответствии с требованиями принципа Ферма, следуя работе [12], изменим кривизну координатных линий и перейдем к приведенному радиусу $r^{\text{o}} = nr$. Убедимся, что (27) при этом сводится к форме [11]:

$$\tau(\mathbf{r}) = \int\limits_{\bar{L}} \frac{\varepsilon r\, dr}{\sqrt{r^2-\breve{C}^2}}, \qquad (28)$$

характерной для случая, когда реализуется прямолинейная траектория луча, т.е. в отсутствие границы раздела сред. Отсюда следует вывод о возможности обобщения на границу раздела сред нетрадиционного способа учета рефракции [12], основанного на деформировании системы сферических координат соответственно профилю показателя преломления света. При использовании таких координат траектории световых лучей в САО принимают вид прямых линий.

Перейдем к выводу формулы для ϑ_0' в точке P. Уже отмечалось, что эта задача сводится к нахождению угла рефракции $\beta(\mathbf{r})$. Заметим при этом, что рефракционная компонента дифференциального оператора, за вычетом геометрической кривизны координатной линии, вытекает из (22). Выражая затем $\mathrm{tg}\vartheta$ через $\sin\vartheta$ и учитывая инвариант (25), найдем, что

$$\beta(\mathbf{r}) = \int\limits_{\breve{L}} \beta' ds = \int\limits_{\breve{L}} -\frac{\partial}{\partial r}(\ln n)\, \mathrm{tg}\vartheta\, dr =$$

$$= \int\limits_{\breve{L}} -\frac{\partial}{\partial r}(\ln n) \frac{dr}{\sqrt{(nr/\breve{C})^2-1}}\,. \qquad (29)$$

На участках криволинейной траектории $\breve{L}$, находящихся в воздушной и водной оболочках, величина $-\frac{\partial}{\partial r}(\ln n)$ является регулярной гладкой функцией радиуса и поэтому интегрирование ее по уровням в (29) приводит к плавному нарастанию ϑ_0', определяющему направление солнечного луча. На границе раздела сред в точке преломления луча стоящее под интегралом в (29) выражение рефракционной кривизны $-\frac{\partial}{\partial r}(\ln n)$ имеет сингулярность в виде дельта-функции. Поэтому интегрирование (29) на границе раздела, отражая упомянутое свойство инварианта (25), приводит к скачкообразному изменению направления луча на величину, вытекающую из закона преломления. Итак:

$$\vartheta_0' = \vartheta_0 + \int\limits_{\breve{L}} \frac{\partial}{\partial r}(\ln n) \frac{dr}{\sqrt{(nr/\breve{C})^2-1}}\,. \qquad (30)$$

Очевидно, что для однородной среды, при $n = \text{const}$, второе слагаемое в (30) равно нулю и $\vartheta_0' = \vartheta_0$.

Угловая диаграмма $\frac{\sigma^{\text{o}}}{4\pi} x^{\text{o}}(\gamma)$ излучения, рассеянного элементарным объемом среды, выражается обычным образом, если точка P находится в воздушной или водной оболочке. Если точка P лежит на уровне r_0 границы раздела сред воздух–вода, то угловая плотность излучения определяется, как известно [6], сингулярным коэффициентом яркости

$$\rho(\mu, \varphi, \mu') = \frac{\pi}{\mu} R(n_{21}, \mu')\, \delta(\mu-\mu')\delta(\varphi'-\varphi_0'),$$
$$\mu' = \mu_r = \cos\vartheta_r. \qquad (31)$$

Дельта-функция в (31) имеет смысл френелевской индикатрисы рассеяния $x_F(\mathbf{r}, \mathbf{s}{\cdot}\mathbf{s}')/4\pi$. Она определяется в соответствии с условием нормировки

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{4\pi} x_F\, d\Omega = \int\limits_{4\pi} \delta(\mu-\mu')\delta(\varphi'-\varphi_0')\, d\Omega = 1. \quad (32)$$

Коэффициент отражения R границы раздела сред выражается через коэффициент яркости $\rho(\mu, \varphi, \mu')$ в виде функционала

$$R = \frac{1}{\pi}\int\limits_{2\pi} \rho(\mu, \varphi, \mu)\, \mu d\mu =$$

$$= \int\limits_{4\pi} R(n_{21}, \mu')\delta(\mu-\mu')\delta(\varphi'-\varphi_0')\, d\Omega = R(n_{21}, \mu_r, \varphi_r) \qquad (33)$$

при выделенных значениях $\mu_r = \mu'$ и $\varphi_r = \varphi_0'$.

Показатель френелевского рассеяния σ_F определяется согласно (13)

$$R = \int\limits_{L} \sigma_F ds = \int\limits_{L} R(n_{21}, \mu_r, \varphi_r)\, \delta(r-r_0) ds =$$
$$= R(n_{21}^{\text{o}}, \mu_r, \varphi_r) \qquad (34)$$

как линейная плотность коэффициента отражения. Здесь $n_{21}^{\text{o}} = n_{21}(r = r_0)$. Элемент пути в (34) выбирается вдоль направления отраженного луча. Очевидно, что при σ_F, определенном таким образом, суммарный показатель рассеяния света $\sigma^{\text{o}} = \sigma + \sigma_F$.

Индикатриса рассеяния света $x^{\text{o}} = x^{\text{o}}(\mathbf{r}, \mathbf{s}{\cdot}\mathbf{s}_0')$ для элементарного объема среды выражается в виде суммы регулярной и сингулярной компонент с помощью следующего интегрального равенства:

$$\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{4\pi v} \sigma^{\text{o}} x^{\text{o}} I(\mathbf{s}_0')\, d\Omega\, ds = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{4\pi v} \sigma x I(\mathbf{s}_0')\, d\Omega\, ds +$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{4\pi v} \sigma_F x_F I(\mathbf{s}_0')\, d\Omega\, ds. \qquad (35)$$

Интегрирование в (35) ведется по элементам $d\Omega$ телесного угла (в направлениях рассеянного излучения) и элементам ds толщины элементарного объема.

Выполнив интегрирование при $I(\mathbf{s}'_0) = \mathrm{const}$, из (35) получим

$$x^o = x^o(\mathbf{r},\ \mathbf{s}\cdot\mathbf{s}'_0) = qx(\mathbf{r},\ \mathbf{s}\cdot\mathbf{s}'_0) + q_F x_F(\mathbf{r},\ \mathbf{s}\cdot\mathbf{s}'_0). \quad (36)$$

Здесь весовые множители

$$q = \frac{\tau_{\sigma v}}{\tau_{\sigma v} + R}, \quad q_F = \frac{R}{\tau_{\sigma v} + R} \quad (37)$$

выражаются через оптическую толщину элементарного объема среды $\tau_{\sigma v}$, обусловленную рассеянием, и коэффициент отражения R границы раздела сред. Для регулярных функций из (37) следует известное частное представление весовых множителей в виде отношения $q_i = \sigma_i / \sum_i \sigma_i$.

Из вышеизложенного следует, что с учетом принятых обозначений и использованных определений оптических характеристик элементарного объема среды выражение для суммарной функции источников в двухсредной сферической модели САО, как и в многослойной сферической модели, сводится к форме

$$\varepsilon B^o = \frac{\sigma^o}{4\pi} \int_{4\pi} x^o(\mathbf{r},\ \mathbf{s}\cdot\mathbf{s}')\ I_d^o(\mathbf{r})\, d\Omega +$$

$$+ \frac{\sigma^o}{4\pi} x^o(\mathbf{r},\ \mathbf{s}\cdot\mathbf{s}'_0)\pi F \exp(-\tau^o), \quad (38)$$

соответствующей модели среды при $n = \mathrm{const}$ [11], когда отсутствует граница раздела сред и реализуется прямолинейная траектория лучей.

Заключение

Сферическая модель системы «атмосфера–океан» сведена к математически эквивалентной модели, в которой отражение, пропускание и преломление света на границе раздела сред выражаются посредством оптических параметров элементарного объема в уравнении переноса излучения. Последние вводятся с использованием понятий теории обобщенных функций и принципа Ферма. Величины, определяющие функцию источников для уравнения переноса излучения в такой модели, выражаются в форме, соответствующей однородной среде, без границы раздела, где реализуется прямолинейная траектория лучей.

1. *Mobley C.D., Gentili B., Gordon H.R., Jin Z., Kattawar G.W., Morel A., Reinersman P., Stamnes K., Stavn R.H.* Comparison of numerical models for computing underwater light fields // Appl. Opt. 1993. V. 33. № 36. P. 7484–7504.
2. *Jin Z., Stamnes K.* Radiative transfer in nonuniformly reflacting layered media: atmosphere-ocean system // Appl. Opt. 1994. V. 33. № 3. P. 431 – 433.
3. *Сушкевич Т.А., Стрелков С.А., Иолтуховский А.А.* Метод характеристик в задачах атмосферной оптики. М.: Наука, 1990. 296 с.
4. *Сушкевич Т.А., Куликов А.К., Максакова С.В.* Перенос солнечного излучения в системе атмосфера–океан с френелевской границей. Общая теория // Изв. РАН. Физ. атмосф. и океана. 1999. Т. 36. № 1. С. 95–104.
5. *Бекефи Дж.* Радиационные процессы в плазме: Пер. с англ. М.: Наука, 1971. 437 с.
6. *Минин И.Н.* Теория переноса излучения в атмосферах планет. М.: Наука, 1988. 264 с.
7. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988. 512 с.
8. *Яценко А.Ю.* Теория рефракции. Казань: Изд-во Каз. ун-та, 1990. 130 с.
9. *Саржевский А.М.* Оптика. Т. 1. Минск: Университетское, 1984. 287 с.
10. *Исимару А.* Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. Т. 1: Пер. с англ. М.: Мир, 1981. 280 с.
11. *Смоктий О.И.* Моделирование полей излучения в задачах космической спектрофотометрии. Л.: Наука, 1986. 352 с.
12. *Гаврилович А.Б.* Новый способ учета рефракции в уравнении переноса излучения для сферической модели атмосферы // Оптика атмосф. и океана. 2002. Т. 15. № 2. С. 152–156.

A.B. Gavrilovich. **Inclusion of the interface of media in problems of determination of the source function for the radiative transfer equation in the atmosphere–ocean spherical system.**

The spherical model of the atmosphere-ocean system is presented by a mathematically equivalent model in which reflection, transmission and refraction of light at the air-water interface is defined by optical parameters of an elementary volume of the medium in the radiative transfer equation (RTE). These parameters are introduced with the use of notions of the generalized functions theory and the Fermat principle. The source function for the RTE in such model is expressed through linear continuous functionals in the form corresponding to the absence of bending and refraction of beams. Thus, the new method of inclusion of refraction, based on deformation of the system of spherical coordinates, was generalized on the interface.