«Оптика атмосферы», **4**, № 4 (1991)

АДАПТИВНАЯ ОПТИКА

УДК 621.373.826

**В.Е. Киракосянц, В.А. Логинов, В.В. Слонов**

# ОПТИМИЗАЦИЯ И АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ АДАПТИВНЫХ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С МНОГОКАНАЛЬНОЙ ФАЗОВОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ

Решается задача синтеза и анализа оптимального алгоритма управления АОС, в котором оценивание искажении волнового фронта осуществляется за счет использования многоканальной фазовой модуляции принимаемого сигнала. Учитывается влияние как фонового излучения атмосферы, так и шумов регистрации сигнала в приемнике. Проводится сравнение эффективности в условиях турбулентной атмосферы оптимального и субоптимальных алгоритмов.

Хорошо известно [11, что в оптических устройствах лазерной связи, локации и навигации для компенсации искажений, вносимых турбулентной атмосферой, большими потенциальными возможностями обладают адаптивные оптические системы (АОС). Наряду с АОС, работающими по принципу обращения волнового фронта (ОВФ), в литературе пристальное внимание уделяется системам с многоканальной фазовой модуляцией (МФМ) [2J, в которых информация о фазовых искажениях извлекается из принимаемого оптического сигнала, промодулированного по фазе на этапе излучения или приема. С позиций статистической оптимизации информационных систем и теории статистических решений [3, 4] АОС и МФМ можно рассматривать как системы с частично заданной структурой, поскольку идея модуляции фазы заложена в них принципиально. При реализации алгоритма измерения искажений в таких АОС можно действовать одним из двух способов: либо использовать обычный приемник прямого фотодетектирования, либо синтезировать и эту часть системы. В настоящей работе рассмотрены оба варианта оптимизации.

## 1. Модель принимаемого сигнала

Будем исследовать импульсный многотактовый режим работы АОС. Рассмотрим произвольный $m$-й ($m = 1, 2, \ldots$) такт зондирования. Поле, отраженное от точечного объекта с координатами ($Z_m$, $\theta_m$), может быть записано в виде

$$Y_m(\mathbf{r}, t) = \mathrm{Re}\, u(t - t_m)\, X_m(\mathbf{r}, t)\, V_m(\mathbf{r}) + n(\mathbf{r}, t),$$
$$\mathbf{r} \in \Omega_a, \ (m-1)\, T_0 \leqslant t \leqslant mT_0, \tag{1}$$

где $Z_m$ — дальность до объекта; $\theta_m$ — его угловые координаты; $\Omega_а$ — область, занятая приемной апертурой; $T_0$ — период зондирования; $u(t)$ — функция, описывающая форму зондирующего импульса, $t_m = (m-1)T_0+2z_m/c$ — момент приема сигнала; функции $X_m(\mathbf{r}, t) = \exp\{-i\omega t + ikr^2/2z_m - ik\theta_m\mathbf{r}]$ и $V_m(\mathbf{r}) = E_m e^{i\varphi_m(\mathbf{r})}$ описывают соответственно набег фазы при распространении излучения от объекта до приемной апертуры в однородной среде и случайные искажения ВФ при распространении излучения в турбулентной атмосфере, причем в фазовом приближении $E_m$ — действительная детерминированная амплитуда поля, а $\varphi(\mathbf{r}) = \varphi(0, \mathbf{r}; z_m, \theta_m; t_m)$ — случайный набег фазы; $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число; $\lambda$ — длина волны, а $\omega = k/c$ — несущая частота полезного сигнала; $n(\mathbf{r}, t)$ — фоновое излучение, которое обычно считают гауссовым с равномерной спектральной плотностью $N_0$.

Для измерения искажений волнового фронта принимаемого сигнала на приемной апертуре $\Omega_а$, совмещенной с передающей, осуществляется фазовая модуляция сигнала на частотах $\omega_j (j = 1, \ldots N)$ в соответствующих областях (субапертурах) $\Omega_j \subset \Omega_а$. Затем принятое поле фокусируется на фотодетектор (ФД). Для «точечного» ФД, центр чувствительной поверхности которого располагается в точке с координатами $\xi = -d_m\theta_m$, $d_m = z_mF/(z_m-F)$ (где $F$ — фокусное расстояние приемной оптики), выполняется условие $n = S_аS / \lambda^2 d_m^2 \ll 1$, где $S_а$ — площадь приемной апертуры, а $S$ — площадь чувствительной поверхности ФД. При этом в соответствии с (1) поле на ФД приобретает вид

$$Y_m(\boldsymbol{\xi}, t) = \mathrm{Re}\, E_m X_m(\boldsymbol{\xi}, t) \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\Delta} \int_{\Omega_i} \exp\{i\,[a \sin \omega_j t + \varphi_m(\mathbf{r})]\}\, d^2r +$$

$$+\operatorname{Re}\frac{1}{i\lambda d_m}\sum_{j=1}^{N}\int_{\Omega_j} n(\mathbf{r},\ t)\exp\left\{ia\sin\omega_j t+i\kappa d_m-\frac{i\kappa}{2F}r^2+\frac{i\kappa}{2d_m}|\mathbf{r}-\boldsymbol{\xi}|^2\right\}d^2r, \tag{2}$$

где $X_m(\xi,t)=\dfrac{\Delta}{i\lambda d_m}u(t-t_m)\exp\{-i\omega t+i\kappa d_m+i\kappa\xi^2/2d_m\}$, $\Delta=S_а/N$ — площадь субапертуры $\Omega_j(j=1,\ \ldots,\ N)$; функция $a\sin\omega_j t$ описывает модуляцию фазы на $j$-й субапертуре с амплитудой $a$ и частотой $\omega_j$.

## 2. Оптимальная последетекторная обработка

Выходной сигнал ФД, из которого извлекается информация об искажениях фазы волны, имеет вид

$$i_m(t)=\sum_{\kappa=1}^{K_m}\delta(t-t_{\kappa m}), \tag{3}$$

где $t_{\kappa m}$ и $K_m$ — случайные моменты вылета фотоэлектронов и число зарегистрированных электронов, на $m$-м такте. В большинстве случаев [5] при фиксированной реализации фазы $\varphi_m(r)$ сигнал с выхода ФД подчиняется пуассоновскому распределению.

Использование статистического подхода дает возможность синтезировать алгоритм обработки в виде следящей системы автоматического управления. Действительно, выражение для логарифма функционала отношения правдоподобия на $m$-м такте можем записать в виде [3]

$$L_m[t,\ \nu_{cm}(t)]=\int_{(m-1)T_0}^{t} l[\tau,\ \nu_{cm}(\tau)]\,d\tau,\ (m-1)T_0\leqslant t\leqslant mT_0, \tag{4}$$

где $l[t,\nu_{cm}(t)]=i_m(t)\ln[1+\nu_{cm}(t)/\nu_ш]-\nu_{cm}(t)$, $\nu_{cm}$ и $\nu_ш$ — сигнальная и шумовая составляющие интенсивности пуассоновского потока электронов (3). С учетом выражения для падающего на ФД поля (2) имеем

$$\nu_{cm}(t)=\mu_m(t)\left|\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{\Delta}\int_{\Omega_j}\exp\{i[a\sin\omega_j t+\varepsilon_{jm}(t)]\}d^2r\right|^2, \tag{5}$$

где $\mu_m(t)=\eta|E_m|^2S_аn|u(t-t_m)|^2/2\hbar\omega$ — сигнальная составляющая интенсивности потока (3) при распространении излучения в однородной среде, $\eta$ — квантовая эффективность ФД; $\hbar\omega$ — квант энергии на несущей частоте $\omega$; $\varepsilon_{im}(\mathbf{r},t)=\varphi_m(\mathbf{r})-\hat{\varphi}_{im}(t)$ — ошибка рассогласования между измеряемым фазовым распределением $\varphi_m(\mathbf{r})$ на субапертуре $\mathbf{r}\in\Omega_j$ и сигналом управления $\hat{\varphi}_{jm}(t)$ (средним устанавливаемым положением $j$-й субапертуры) на $m$-м такте. Шумовая составляющая интенсивности потока, очевидно, равна

$$\nu_ш=\eta N_0n/\hbar\omega+\nu_т, \tag{6}$$

где $\nu_т$ — интенсивность потока темновых электронов ФД.

При малых ошибках рассогласования в каналах следящих АОС для средних по субапертурам ошибок $\varepsilon_{jm}(t)=\dfrac{1}{\Delta}\displaystyle\int_{\Omega_j}\varepsilon_{jm}(\mathbf{r},t)d^2r$, как следует из (4) и (5), справедлива система дифференциальных уравнений

$$\frac{d\varepsilon_{jm}(t)}{dt}=\sum_{\kappa=1}^{N}=C_{j\kappa m}(t)\,B_{\kappa m}(t),\ j=1,\ \ldots,\ N,\ (m-1)T_0\leqslant t\leqslant mT_0, \tag{7}$$

$$B_{\kappa m}(t)=\frac{\partial}{\partial\varepsilon_{\kappa m}}l[t,\ \nu_{cm}(t)]=-\frac{2\mu_m(t)}{N^2}[i_m(t)/(\nu_{cm}(t)+\nu_ш)-1]\times$$
$$\times\sum_{p=1}^{N}[a(\sin\omega_\kappa t-\sin\omega_p t)+\varepsilon_{\kappa m}(t)-\varepsilon_{pm}(t)]; \tag{8}$$

$C_{j\kappa m}(t)$ — элементы матрицы, обратной к матрице

$$A_{j\kappa m}(t) = -\frac{\partial^2}{\partial\varepsilon_{jm}\partial\varepsilon_{\kappa m}} L_m[t, \nu_{cm}(t)] = A_{j\kappa m}((m-1)T_0) +$$

$$+\frac{4}{N^4}\int\limits_{(m-1)T_0}^{t} \mu_m^2(\tau)\, i_m(\tau)/(\nu_{cm}(\tau)+\nu_{ш})^2 \sum_{p,\,q=1}^{N} [a(\sin\omega_j\tau - \sin\omega_p\tau) + \varepsilon_{jm}(\tau) -$$

$$-\varepsilon_{pm}(\tau)]\,[a(\sin\omega_\kappa\tau - \sin\omega_q\tau) + \varepsilon_{\kappa m}(\tau) - \varepsilon_{qm}(\tau)]\,d\tau +$$

$$+\frac{2}{N^2}\int\limits_{(m-1)T_0}^{t} \mu_m(\tau)\,[i_m(\tau)/(\nu_{cm}(\tau)+\nu_{ш}) - 1]\,d\tau\,(N\delta_{j\kappa}-1). \tag{9}$$

Выражения (7)÷(9) определяют оптимальный алгоритм управления. Однако такой алгоритм требует обращения матрицы $A_{j\kappa m}(t)$, ($j$ = 1, ...., $N$) на каждом такте зондирования. Для того чтобы устранить этот недостаток, можно предварительно провести усреднение в (9) по ансамблю дробовых шумов фоторегистрации и взять значения элементов матрицы $A_{j\kappa}(t)$ не в точке, соответствующей оценке максимального правдоподобия $\varphi_{jm}(t)(j = 1, \ldots, N)$, а в точке истинных значений этих параметров: $\hat{\varphi}_{jm}(t) = \frac{1}{\Delta}\int_{\Omega_j}\varphi_m(r)d^2(r)$. При этом выражение (9) приобретает вид информационной матрицы Фишера [3]

$$\overline{A_{j\kappa m}(t)} = \overline{A_{j\kappa m}((m-1)T_0)} + \frac{2a^2}{N^3}\int\limits_{(m-1)T_0}^{t} \mu_m(\tau)\,q_m(\tau)/(1+q_m(\tau))\,d\tau \times$$

$$\times (N\delta_{j\kappa}-1),\ j,\ \kappa = 1,\ \ldots,\ N,\ (m-1)T_0 \leqslant t \leqslant mT_0, \tag{10}$$

где $q_m(t) = \mu_m(t)/\nu_m$ — отношение сигнал-шум на $m$-м такте зондирования при распространении излучения в однородной среде; горизонтальная черта сверху означает усреднение по ансамблю дробовых шумов фоторегистрации в приемнике.

Однако матрица Фишера (10) оказывается вырожденной. Ранг матрицы на единицу меньше ее размерности, а это означает, что система $N$ уравнений (7) имеет одно уравнение, которое может быть выражено в виде линейной комбинаци остальных линейно независимых уравнений. Эти линейно независимые уравнения определяют $N-1$ неизвестных как линейные функции одной неизвестной, которая может быть выбрана произвольно. В данной задаче такое положение отражает специфику фазовых измерений, заключающуюся в том, что реально возможно измерение только разности фаз, но не абсолютного значения фазы. В качестве опорного значения, относительно которого производится измерение всех остальных фаз, возьмем фазу на $N$-й субапертуре. Положив поэтому $\varepsilon_{nm}(t) = 0$ и исключив из рассмотрения $N$-е дифференциальное уравнение в (7), получим алгоритм управления в следующем виде

$$\frac{d\varepsilon_{jm}(t)}{dt} = \sum_{\kappa=1}^{N-1} C_{j\kappa m}(t)\,B_{\kappa m}(t),\ j = 1,\ \ldots,\ N-1,\ (m-1)T_0 \leqslant t \leqslant mT_0. \tag{11}$$

В двух предельных случаях может быть найден явный аналитический вид элементов матрицы $C_{j\kappa m}(t)$. Действительно, если оцениваемые фазовые искажения на всем интервале наблюдения не изменяются, т. е. $\varphi_m(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r})$ при любом $m$, то, очевидно,

$$C_{j\kappa m}(t) \simeq k_{0m}(t)\,(1+\delta_{j\kappa}), \tag{12}$$

где обозначено: $k_{0m}(t) = N^2 \Big/ \left(2a^2\left[\sum\limits_{i=1}^{m-1}\int\limits_{(l-1)T_0}^{lT_0}\mu_l(\tau)q_l(\tau)/(1+q_l(\tau))d\tau + \int\limits_{(m-1)T_0}^{t}\mu_m(\tau)q_m(\tau)/(1+q_m(\tau))d\tau\right]\right)$.

На практике чаще встречается противоположная ситуация (в частности, она имеет место при наблюдении за быстро перемещающимися объектами), когда фазовые искажения на соседних тактах зондирования не коррелированы. В этом случае информация об искажениях фазового фронта (ФФ) к началу очередного $m$-го такта приема зондирующего сигнала отсутствует, т.е. $\overline{A_{j\kappa m}((m-1)T_0)} = 0$. Тогда матрица $C_{j\kappa m}(t)$ вновь определяется выражением (12), в котором теперь

$$k_{0m}(t) = N^2 / \left(2a^2 \int\limits_{(m-1)T_0}^{t} \mu_m(\tau)\, q_m(\tau)/(1+q_m(\tau))\, d\tau\right). \tag{13}$$

Подставляя (13) в (11), получим алгоритм управления в более простом виде

$$d\varepsilon_{jm}(t)/dt = \mu_m(t)\, N / \left(a^2 \int\limits_{(m-1)T_0}^{t} \mu_m(\tau)\, q_m(\tau)/(1+q_m(\tau))\, d\tau\right) \times$$

$$\times [1 - i_m(t)/(\nu_{cm}(t) + \nu_{ш})]\, [a(\sin\omega_j t - \sin\omega_N t) + \varepsilon_{im}(t)],$$

$$j = 1, \ldots, N-1, \ (m-1)T_0 \leqslant t \leqslant mT_0. \tag{14}$$

Из выражения (14) следует, что $N$ — связная система управления — оказалась преобразована к системе с $N-1$ независимыми каналами и одним каналом, который используется как опорный. Поэтому алгоритм, описываемый уравнениями (14), может быть реализован с помощью простейших аналоговых устройств.

В качестве точностной характеристики АОС удобно принять среднюю по апертуре дисперсию остаточной ошибки компенсации искажений ФФ в момент излучения зондирующего сигнала на текущем такте

$$D_m = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{\Delta}\int\limits_{\Omega_j} \overline{<[\delta_j(\mathbf{r},\ mT_0) - \frac{1}{N}\sum_{\kappa=1}^{N}\frac{1}{\Delta}\int\limits_{\Omega_\kappa}\delta_\kappa(\mathbf{r}_1,\ mT_0)\, d^2 r_1]^2>}\, d^2 r, \tag{15}$$

где $\delta_j(\mathbf{r}, mT_0) = \varphi(\mathbf{r}, mT_0) - \hat{\varphi}_{jm}(mT_0)$ — ошибка компенсации на $j$-й субапертуре $\mathbf{r} \in \Omega_j$ в момент очередного зондирования $mT_0$; а угловые скобки означают усреднение по ансамблю реализаций ФФ полезного сигнала. Очевидно, ошибка $\delta_j(\mathbf{r},\ mT_0)$ может быть представлена в виде

$$\delta_j(\mathbf{r},\ mT_0) = \varphi(\mathbf{r},\ mT_0) - \varphi_{jm} + \varepsilon_{jm}(mT_0),$$

где $\varphi_{jm} = \dfrac{1}{\Delta}\int\limits_{\Omega_j}\varphi_m(\mathbf{r})d^2 r$ — средняя по $j$-й субапертуре фаза сигнала.

Как следует из вида алгоритма управления (14), среднее значение ошибки управления равно нулю: $\overline{\varepsilon_{jm}(t)} = 0$, $j = 1, \ldots, N$. Что касается корреляционной матрицы ошибок $\left\langle\overline{\varepsilon_{jm}(mT_0)\varepsilon_{\kappa m}(mT_0)}\right\rangle$, $j = 1, \ldots, N-1$, $\kappa = 1, \ldots, N-1$, то она легко определяется на основании теоремы Крамера—Рао [3]:

$$<\overline{\varepsilon_{jm}(mT_0)\,\varepsilon_{\kappa m}(mT_0)}> = C_{j\kappa m}(mT_0),\ j = 1, \ldots, N-1,\ \kappa = 1, \ldots, N-1 \tag{16}$$

Поэтому при аппроксимации структурной функции ФФ функцией вида $D_\varphi(\mathbf{r}) = 2(|\mathbf{r}|/\rho_c)^{5/3}$, где $\rho_c$ — радиус когерентности принимаемого полезного сигнала, использовании гипотезы замороженной турбулентности атмосферы и в предположении малых интервалов задержки сигнала зондирования (относительно момента приема) $\Delta t_m$ по сравнению с временем когерентности принимаемого сигнала $\tau_c$ будем иметь

$$D_m \simeq (N-1)\, k_{0m}(mT_0)/N + \Gamma(11/6)\,(N_п/N)^{5/6} + + \frac{25}{18}\Gamma(5/6)\,(\Delta t_m/\tau_c)^2\,(N^{1/6}-1)/N_п^{1/6}, \tag{17}$$

где $\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$ — гамма-функция; $N_п = S_а/\pi\rho_c^2$ — число „пятен" когерентности сигнального поля, укладывающихся на приемной апертуре; $\Delta t_m = mT_0 - t_m = T_0 - 2z_m/c$; $\tau_c = \rho_c/|\mathbf{v}_\perp|$, $\mathbf{v}_\perp$ — поперечная (к направлению распространения излучения) скорость перемещения неоднородностей показателя преломления турбулентной атмосферы.

Как следует из выражения (17), дисперсия ошибок компенсации состоит из трех составляющих: шумовой, «динамической» и ошибки экстраполяции (измеренного при приеме в момент времени $t_m$ фазового фронта на момент зондирования $mT_0$). Для случая, когда фазовые искажения на соседних тактах зондирования некоррелированы, а форма зондирующего импульса близка к прямоугольной, шумовая составляющая имеет вид

$$D_{\text{ш}m} \simeq (1+q_m) N(N-1)/2 \; a^2 q_m \bar{K}_{cm} n, \tag{18}$$

где $\bar{K}_{cm} = \int\limits_{(m-1)T_0}^{mT_0} \mu_m(t)dt = \eta |E_m|^2 S_{\text{а}} T_{\text{эф}} / 2\hbar\omega$ — среднее число сигнальных фотоэлектронов, регистрируемых в приемнике на $m$-м такте; $T_{\text{эф}} = \int\limits_{(m-1)T_0}^{mT_0} |u(t-t_m)|^2 dt$ — эффективная длительность принимаемого импульса; $q_m = n\bar{K}_{cm} / \bar{n}_{\text{ш}}$ — отношение сигнал-шум; $\bar{n}_{\text{ш}} = \nu_{\text{ш}} T_{\text{эф}}$ — среднее число шумовых электронов, регистрируемых за интервал действия импульса сигнала. Таким образом, шумовая составляющая ошибки пропорциональна квадрату числа каналов приемного устройства $N$ (при достаточно большом их числе), поскольку после детектирования сигналы в каналах суммируются некогерентно. Естественно, что ошибка возрастает с уменьшением отношения сигнал-шум $q_m$, а при фиксированном $q_m$ — увеличивается при уменьшении «энергетики» сигнала $\bar{K}_{cm}$ (т.е. когда возрастает степень влияния шумов фоторегистрации). Уменьшение глубины модуляции сигналов $a$ приводит к возрастанию трудностей различения промодулированных сигналов в приемнике, а следовательно, и к увеличению ошибки.

«Динамическая» составляющая ошибки $\Gamma(11/6)\,(N_{\text{п}}/N)^{5/6}$ обусловлена конечным размером субапертур по сравнению с размером «пятна» когерентности принимаемого поля и определяется числом этих пятен, укладывающихся на одной субапертуре. Ошибка экстраполяции $\frac{25}{18}\Gamma(5/6)(\Delta t_m / \tau_c)^2 (N^{1/6} - 1) / N_{\text{п}}^{1/6}$ в малой степени зависит от «скорости» изменения ФФ по апертуре, а в основном определяется скоростью смены реализаций фазового фронта на характерном размере «пятна» когерентности сигнала.

Естественно, что шумовая и экстраполяционная составляющие ошибки возрастают при увеличении числа каналов $N$ (при фиксированном размере апертуры), а «динамическая» составляющая при этом уменьшается. Очевидно, поэтому существует некое оптимальное число каналов АОС, которое легко может быть найдено из условия минимума выражения (17). Найденное выражение для дисперсии ошибки компенсации (17) позволяет рассчитать и значение коэффициента Штреля $\mathrm{St}_m$ на произвольном такте зондирования. Действительно, в соответствии с работой [6] имеем

$$\mathrm{St}_m \simeq \exp(-D_m) + (1-\exp(-D_m/2))^2 / [1 + N_{\text{п}}(1-\exp(-D_m/2))]. \tag{19}$$

Интересно сравнить эффективность синтезированного алгоритма с эффективностью широкоиспользуемой на практике схемы с одним синхронным детектором и соответствующим фильтром в каждом канале (см., например, [7]). Сигнал с выхода фильтра непосредственно используется в качестве управляющего для перемещения управляемой субапертуры в канале. Очевидно, при одинаковом числе каналов отличие алгоритмов может привести к изменению лишь шумовой составляющей ошибки. Сравнение этих составляющих проведем для простого случая, когда ФФ сигнала на всем интервале наблюдения остается неизменным $\varphi_m(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r})$; импульсы зондирования являются достаточно короткими, так что управление субапертурами осуществляется в промежутках между импульсами. Тогда сигнал управления $j$-й субапертурой записывается в виде

$$\hat{\varphi}_{jm} = \hat{\varphi}_{jm-1} + \gamma_m \cdot \int\limits_{(m-1)T_0}^{mT_0} i_m(t) \sin \omega_j t \, dt, \; j = 1, \ldots, N, \tag{20}$$

где $\gamma_m$ — коэффициент пропорциональности, определяющий крутизну дискриминационной характеристики измерителя [8]; $i_m(t)$ — поток фотоэлектронов с выхода ФД, определяемый выражением (3).

При управлении (20) ошибка компенсации равна

$$\varepsilon_{jm} = \varphi_j - \hat{\varphi}_{jm} = \varepsilon_{jm-1} - P_m[\varepsilon_p, \; p = 1, \ldots, N] + \xi_{jm}, \tag{21}$$

где $P_m[\varepsilon_p, p = 1, \ldots, N] = \gamma_m \int\limits_{(m-1)T_0}^{mT_0} \overline{i_m(t)} \sin \omega_j t dt$ и $\xi_{jm} = -\gamma_m \int\limits_{(m-1)T_0}^{mT_0} [i_m(t) - \overline{i_m(t)}] \sin \omega_j t dt$ — соответственно медленноменяющаяся и быстроменяющаяся составляющие ошибки следящего измерителя. Здесь усреднение проведено по ансамблю шумов фоторегистрации данного такта зондирования. В соответствии с выражением (5) медленноменяющаяся составляющая может быть представлена в виде

$$P_m[\varepsilon_p, \; p = 1, \ldots, N] = \varepsilon_{jm-1} - \frac{1}{N} \sum_{p=1}^{N} \varepsilon_{pm-1}. \tag{22}$$

При этом крутизна дискриминационной характеристики равна $\gamma_m = -N / an\bar{K}_{cm}$, а корреляционная матрица быстроменяющихся составляющих ошибок управления $N$ субапертурами имеет простой вид

$$k_{j\kappa m} = \overline{\xi_{jm}\xi_{\kappa m}} = (1+q_m)\, N^2\delta_{j\kappa}/2a^2nq_m\bar{K}_{cm},\ j=1,\ \ldots,\ N,\ \kappa=1,\ \ldots,\ N. \tag{23}$$

С учетом (22) вместо (21) имеем $\varepsilon_{jm} = \frac{1}{N}\sum_{p=1}^{N}\varepsilon_{pm-1} + \xi_{jm}$, $j = 1, \ldots N$, а поэтому шумовая составляющая дисперсии ошибки компенсации на $m$-м такте в точности совпадает с шумовой составляющей дисперсии ошибки (18) синтезированного алгоритма.

Последнее требует физического объяснения. Казалось бы, поскольку в синтезированном алгоритме «задействована» $N-1$ управляемая субапертура (одна субапертура неподвижна и измеряемая на ней фаза используется в качестве опорной), а в рассматриваемой сейчас схеме $N$ таких субапертур, то дисперсия шумовой ошибки должна быть меньше в синтезированном алгоритме. Однако (для рассматриваемого примера) ошибка в синтезированном алгоритме формируется следующим образом:

$$\varepsilon_{jm} - \varepsilon_{Nm} = \frac{1}{N}\sum_{p=1}^{N}\varepsilon_{pm-1} + \varepsilon_{jm} - \left(\frac{1}{N}\sum_{p=1}^{N}\varepsilon_{pm-1} + \xi_{Nm}\right) =_{jm} - \xi_{Nm},\ j=1,\ \ldots,\ N-1.$$

Корреляционная матрица этой ошибки равна

$$k_{j\kappa m} = \overline{(\varepsilon_{jm}-\varepsilon_{Nm})\,(\varepsilon_{\kappa m}-\varepsilon_{Nm})} = k_{0m}(1+\delta_{j\kappa}), \tag{24}$$

где $k_{om} = (1+q_m)\,N^2/(2a^2q_m\,n\,\bar{K}_{cm})$, откуда следует, что диагональные элементы матрицы ошибок синтезированного алгоритма в 2 раза превышают соответствующие элементы матрицы (23), что объясняется сложением ошибок измерения фазы на данной и опорной субапертурах. Недиагональные элементы в (24) в отличие от (23) не равны нулю, а определяются дисперсией шумовой ошибки на опорной апертуре.

### 3. Оптимальный алгоритм с многоканальной фазовой модуляцией принимаемого сигнала

В отличие от предыдущего пункта здесь мы не будем заранее задавать операцию фотодетектирования принимаемого сигнала, а, используя теорию статистических решений, получим оптимальный алгоритм обработки поля с МФМ.

В соответствии с выражением (2) для поля в плоскости изображения объекта на $m$-м такте, логарифм функционала правдоподобия записывается в виде

$$L_m\,[\,Y_m(\xi,\ t)/V_{jm},\ j=1,\ \ldots,\ N] \sim \int_{(m-1)T_0}^{mT_0} dt \int_{\Omega} d^2\xi \left[\,Y_m(\xi,\ t) - \mathrm{Re}\,X_m(\xi,\ t)\sum_{j=1}^{N} V_{jm}\exp\left(i\,a\sin\omega_j t\right)\right]^2, \tag{25}$$

где $\Omega$ — область наблюдения в плоскости изображения; $V_{jm} = \frac{E_m}{\Delta}\int_{\Omega_j}\exp(i\varphi_m(\mathbf{r}))d^2r$. Оценка ВФ сигнала $V_{jm}$, соответствующего $j$-й субапертуре, максимизирующая функционал (25), оказывается равной

$$\hat{V}_{jm} \sim a_{jm} - \frac{\alpha}{1+\alpha(N-2)}\sum_{p\neq j}^{N} a_{pm},\ N \geqslant 2, \tag{26}$$

где $a_{jm} = \frac{1}{T_{эф}}\int_{(m-1)T_0}^{mT_0} dt \int_{\Omega}\frac{1}{S}d^2\xi\, Y_m(\xi,t)x_m^*(\xi,t)\exp(-ia\sin\omega_j t)$; $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{a}{2}\right)^{2n} C_n^{2n}$.

Выражение (26), в свою очередь, определяет оптимальное пространственное распределение комплексной амплитуды зондирующего сигнала на передающей апертуре $\Omega_a = \bigcup_{j=1}^{N}\Omega_j$

$$A_m(\mathbf{r}) \sim \hat{V}^*_{jm},\ \mathbf{r}\in\Omega_j,\ j=1,\ \ldots,\ N. \tag{27}$$

Из выражений (26) и (27) следует, что оптимальное распределение поля зондирующего сигнала может быть сформировано в два этапа. На первом этапе проводится измерение искаженного ВФ, «закодированного» в принимаемом сигнале. Для измерения ВФ на каждой из $N$ субапертур должен быть использован $N$-канальный гетеродинный приемник, выходные сигналы каналов которого пропорциональны величинам $a_{jm}$, $j = 1, \dots N$. В соответствии с выражениями для $a_{jm}$ в каждом канале приемника осуществляется пространственно-временная фильтрация принимаемого поля. Опорное излучение гетеродина в $j$-м канале определяется при этом функцией $x_{jm}(\xi, t)\exp(-ia\sin\omega_j t)$. На втором этапе осуществляется «весовое» суммирование выходных каналов приемника в соответствии с выражением (26). После операций перенесения сигнала на оптическую частоту, обращения его ВФ в каждом канале и усиления сформированный зондирующий сигнал излучается в атмосферу.

Интересен физический смысл процедуры «весового» суммирования, описываемой выражением (26). Поскольку параметр $\alpha$, входящий в (26), представляет собой нормированный коэффициент корреляции шумов разных каналов, то второе слагаемое в (26) является оценкой шума $j$-го канала. Поэтому процедура (26) заключается в компенсации коррелированных шумов измерений. В частности, если шумы разных каналов полностью коррелированы ($a \to 0$, $\alpha \to 1$), то «вес» измерений каждого канала при суммировании приближается к единице: $\widehat{V}_{jm} \sim a_{jm} - \frac{1}{N-1}\sum_{p\neq j}^{N} a_{pm}$; если же шумы некоррелированы ($a \sim \pi$, $\alpha \to 0$), то для формирования излучения $j$-го канала используется оценка ВФ только этого канала:

$$\hat{V}_{jm} \sim a_{jm}. \tag{28}$$

Как и в предыдущем пункте, простейшими характеристиками, определяющими качество работы алгоритма, могут служить средняя по апертуре дисперсия ошибки оценивания ВФ на момент излучения сигнала

$$\delta V_m = \sum_{j=1}^{N} \int_{\Omega_j} \overline{<| V(\mathbf{r},\ mT_0) - \hat{V}_{jm}|^2>}\, d^2r \Big/ \int_{\Omega_a} <| V(\mathbf{r},\ mT_0)|^2>\, d^2r =$$
$$= 1 - R_N(0) + 2\,[R_N(0) - R_N(\Delta t_m)] + N^2\beta/Q_m \tag{29}$$

и коэффициент Штреля

$$\mathrm{St}_m = <\Big|\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \hat{V}^{*}_{jm} \frac{1}{\Delta}\int_{\Omega_j} \exp(i\varphi_m(\mathbf{r},\ mT_0))\, d^2r\Big|^2> \Big/ \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} <|\overline{\hat{V}_{jm}}|^2> \simeq \Big(R_N^2(\Delta t_m) + \frac{N\beta}{Q_m}\Big[R_N(0) -$$
$$- \frac{\alpha}{1+\alpha(N-2)}(NR_1(0) - R_N(0))\Big]\Big) \Big/ (R_N(0) + N^2\beta/Q_m). \tag{30}$$

В выражениях (29) и (30) приняты следующие обозначения

$R_N(\Delta t_m) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{\Delta^2}\int_{\Omega_j} d^2r_2 \exp\left(-\frac{1}{2}D_\rho(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 + \bar{\upsilon}_\perp \cdot \Delta t_m)\right)$; $\beta = \frac{1}{1-\alpha}\left[1 - \frac{\alpha}{1+\alpha(N-1)}\right]$;

$Q_m = \bar{K}_{cm} n \Big/ \left(1 + \frac{\nu_т}{\nu_г} + \frac{\eta N_0}{\hbar\omega}\right)$ — отношение сигнал-шум в гетеродинном приемнике; $\nu_г$ — интенсивность потока фотоэлектронов, обусловленных излучением гетеродина. Обычно в гетеродинном приемнике $\nu_т/\nu_г + \eta N_0/\hbar\omega \ll 1$, поэтому $Q_m \simeq \bar{K}_{cm} n$.

Из выражения (29) следует, что точностная характеристика алгоритма, как и ранее, состоит из трех составляющих: «динамической» — $1 - R_N(0)$, ошибки экстраполяции — $2[R_N(0) - R_N(\Delta t_m)]$ и шумовой ошибки $N^2\beta/Q_m$. Легко убедиться, что при малых ошибках (тогда $R_N(\Delta t_m) \simeq \simeq 1 - \Gamma(11/6)(N_П/N)^{5/6} - 25/36\ \Gamma(5/6)(N/N_п)^{1/6}(\Delta t_m/\tau_c)^2$) „динамическая» и экстраполяционная составляющие в точности совпадают с соответствующими характеристиками алгоритма с приемником прямого детектирования, рассмотренного в предыдущем пункте. Что касается шумовой составляющей, то ее величина в существенной степени зависит от значений параметра $\alpha$. В частности, при малой глубине фазовой модуляции $a \to 0$, т.е. $\alpha \to 1 - a$, шумовая составляющая равна

$$\delta V_{шm} \simeq N(N-1)/an\bar{K}_{cm}. \tag{31}$$

Сравнение выражений (18) и (31) показывает, что во втором случае дисперсия ошибки в $(1 + q_m)/2aq_m$ раз меньше. Так, например, при $q_m = 5$ и $a = 0{,}1$ $D_{шm}/\delta V_{шm} = 6$. При большой глубине модуляции фазы в оптимальном алгоритме $a_{опт} \sim \pi$, т.е. $\alpha \to 0$, имеем

$$\delta V_{шm} \simeq N^2/K_{cm} n. \tag{32}$$

Здесь шумовая ошибка оптимального алгоритма отличается от ошибки алгоритма (14) уже в $(1 + q_m)/2a^2q_m$ раз, т. е. (при тех же значениях параметров) $D_{шm}/\delta V_{шm} = 60$. При этом в обеих ситуациях при малых ошибках ($\delta V_m \ll 1$) коэффициент Штреля равен $St_m \simeq 1-\delta V_m$, а в противоположном случае больших ошибок ($N^2\beta/Q_m \gg R_N(0)$) $\mathrm{St}_m \simeq R_N(0)/(N-1)$, $N \gg 2$.

Сравнительная эффективность оптимального алгоритма и алгоритма (14) иллюстрируются данными таблицы, где представлены значения коэффициентов Штреля этих алгоритмов в зависимости от «энергетики» принимаемого сигнала $Q_m = \bar{K}_{cm} \cdot n$.

| $Q_m$ | $10^5$ | $3\cdot10^4$ | $10^4$ |
|---|---|---|---|
| $\mathrm{St}_{opt}$ | 0,78 | 0,76 | 0,70 |
| $\mathrm{St}_m$ | 0,51 | 0,23 | 0,16 |

При расчете использованы следующие значения параметров: $N = 30$; $N_п = 5$; $a_{опт} = 3\pi/4$ [9]; $a = 0{,}1$; $\Delta t_m/\tau_c = 0$. Из приведенных результатов следует, что эффективность оптимального алгоритма существенно выше. Особенно наглядно это проявляется при низкой энергетике ($Q_m = 10^4$), когда для алгоритма (14) эффект компенсации вообще отсутствует, а оптимальный алгоритм продолжает сохранять достаточно большой показатель эффективности.

Однако реализация оптимального алгоритма, включающая «весовое» суммирование сигналов (26), может оказаться достаточно сложной для практики. Поэтому определенный интерес представляет исследование эффективности более простого алгоритма оценивания искажений ВФ, например, описываемого выражением (28). Легко показать, что дисперсия ошибки оценивания ВФ для этого алгоритма (соответствующая выражению (29) оптимального алгоритма) также состоит из трех составляющих: «динамической» — $1 - (1 - \alpha^2)R_N(0) + \alpha^2N(N - 2)R_1(0)$, ошибки экстраполяции — $2\{1 - \alpha)[R_N(0) - R_N(\Delta t_m)] + \alpha N[R_1(0) - R_1(\Delta t_m)]\}$ и шумовой — $N^2/Q_m$. Однако здесь даже при выполнений условий: $N_п/N \to 0$, $N^2/Q_m \to 0$, $\Delta t_m/\tau_c \to 0$, достаточных для обеспечения высокой эффективности оптимального алгоритма, «динамическая» и экстраполяционная составляющие не равны нулю $\delta V_m \simeq \alpha^2[1 + N(N-2)R_1(0)]$. Из этого выражения следует, что при малой глубине модуляции (тогда $\alpha \to 1$) ошибка оказывается недопустимо большой.

Коэффициент Штреля данного алгоритма равен

$$\mathrm{St}_m \simeq \{(1-\alpha)[R_N^2(\Delta t_m) + NR_N(0)/Q_m] + \alpha N[\alpha NR_1^2(\Delta t_m) + (1-\alpha)R_N(\Delta t_m)R_1(\Delta t_m) + NR_1(0)/Q_m]\}/\{(1-\alpha)^2R_N(0) + \alpha NR_1(0)[2+(N-2)\alpha] + N^2/Q_m\}. \quad (33)$$

При малой глубине модуляции отсюда получим

$$\mathrm{St}_m \simeq \frac{R_1^2(\Delta t_m) + R_1(0)/Q_m}{R_1(0) + 1/Q_m} \simeq \begin{cases} R_1^2(\Delta t_m)/R_1(0) & \text{при } Q_m/N^2 \gg 1; \\ R_1(0) & \text{при } Q_m/N \ll 1 \end{cases}$$

т.е. алгоритм компенсации абсолютно неэффективен, поскольку коэффициент Штреля не превышает своего значения в отсутствие компенсации, который равен $R_1(0) \geq R_1(\Delta t_m)$. В случае большой глубины модуляции ($\alpha \to 0$) эффективность алгоритма

$$\mathrm{St}_m \simeq \frac{R_N^2(\Delta t_m) + NR_N(0)/Q_m}{R_N(0) + N^2/Q_m} \simeq \begin{cases} R_N^2(\Delta t_m)/R_N(0) & \text{при } Q_m/N^2 \gg 1; \\ R_N(0)/N & \text{при } Q_m/N \ll 1 \end{cases}$$

близка к эффективности оптимальной схемы.

Таким образом, при большой глубине модуляции оптимальный алгоритм, не требуя реализации достаточно сложной процедуры «весового» суммирования высокочастотных сигналов, может обеспечить высокую эффективность работы АОС.


1. Лазерные измерительные системы /Под ред. Д.П. Лукьянова. М.: Радио и связь, 1981. 456 с.
2. Воронцов М.А., Шмальгаузен В.И. Принципы адаптивной оптики. М.: Наука, 1985. 335 с.
3. Репин В.Г., Тартаковский Г.П. Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем. М.: Сов. радио, 1977. 432 с.
4. Бакут П.А., Киракосянц В.Е., Логинов В.А. //Материалы VIII Всесоюзн. симпозиума по распространению лазерного излучения в атмосфере. Ч. 3. Томск, 1986. С. 55—74.
5. Гальярди Р.М., Карп Ш. Оптическая связь. М.: Связь, 1978. 424 с.

6. Киракосянц В.Е., Логинов В.А., Слонов В.В. //Квантовая электроника, 1990. Т. 17. № 10. С. 1291–1294.
7. Адаптивная оптика /Пер. с англ. под ред. Э.А. Витриченко. М.: Мир, 1980. 456 с.
8. Вопросы статистической теории радиолокации /Под ред. Г.П. Тартаковского. Т. 2. М.: Сов. радио, 1964.
9. Киракосянц В.Е., Логинов В.А., Слонов В.В. //Квантовая электроника. 1987. Т. 14. № 4. С. 889–891.

Научно-производственное объединение«Астрофизика»,
Москва

Поступила в редакцию
21 декабря 1990 г.

V.E. Kirakosyants, V.A. Loginov, V.V. Slonov. **Optimization of the Adaptive Optical Systems with the Multichannel Phase Modulation and Analysis of Their Efficiency.**

The paper deals with the problem on synthesis and analysis of an optimal algorithm for adaptive optical system control, in which the estimation of wave front distortions is made using multichannel phase modulation of received signal. The algorithm takes into account the influence of the atmospheric background noise and the noises of photodetector as well. A comparison is made in the paper of optimal and suboptimal algorithms for the case of a turbulent atmosphere.