<Оптика атмосферы и океана>, **6**, N 4 (1993)

АДАПТИВНАЯ ОПТИКА

УДК 535. 416.3

Р.Т. Якупов

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ВЫПУКЛОГО БУЛЕВА ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПОЛОЖЕНИЯ УПРАВЛЯЮЩИХ ПРИВОДОВ В ГИБКИХ ЗЕРКАЛАХ

Предлагается подход к решению задачи оптимального расположения приводов в гибких зеркалах, основанный на применении методов выпуклого булева программирования.

В последнее время адаптивная оптика широко используется для повышения качества приема оптических сигналов, проходящих через слой турбулентной атмосферы [1–3]. При проектировании систем адаптивной оптики (таких, как гибкие мембранные и пластинчатые зеркала) одной из важных задач является определение мест расположения управляющих приводов [4]. От того, насколько удачно расположены приводы, в значительной степени зависит качество оптической системы.

Известны приближенные методы решения таких задач [4]. Недостатком приближенных методов является то, что в них трудно оценить, насколько близко получающееся решение к оптимальному. В данной статье предлагается подход, позволяющий получать точное решение для выбранного критерия оптимальности, либо приближенное решение с гарантированной относительной или абсолютной точностью (по величине критерия качества).

1. При формулировке проблемы будем в основном придерживаться описания задачи коррекции фазовых искажений, принятого в [4]. Искажение волнового фронта характеризуется функцией $\varphi(\mathbf{r})$. На поверхности зеркала выбрана некоторая сетка координат допустимых мест расположения управляющих приводов (N узловых точек). Ошибку коррекции волнового фронта будем характеризовать величиной

$$\Delta^2 = \frac{1}{s}\int\limits_{\Omega}\gamma^2(\mathbf{r})\left[\varphi(\mathbf{r}) - \sum_{i=1}^{N} b_i^{1/2}\, u_i R_i(\mathbf{r})\right]^2 d^2\mathbf{r} \qquad (1)$$

В дальнейшем для краткости область интегрирования Ω в интегралах мы будем опускать.

В формуле (1) Ω – область коррекции волнового фронта; u_i – величина управляющего воздействия; $R_i(\mathbf{r})$ – функция отклика; b_i – индикаторная переменная, принимающая значения 0 и 1 (1 – если управляющий привод располагается в i-м узле сетки и 0 – если нет); $\gamma^2(\mathbf{r})$ – весовая функция (которая в частном случае может быть равна 1), характеризующая значимость ошибок коррекции в соответствующей зоне зеркала; $1/s$ – нормировочный множитель, в котором $s = \int\gamma^2(\mathbf{r})\, d^2\mathbf{r}$.

Предполагается, что при фиксированном расположении приводов управляющие воздействия определяются на основе минимизации функции

$$f(\mathbf{u}) = \Delta^2(\mathbf{u};\mathbf{b}) + \lambda\, \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{u}\,, \qquad (2)$$

где $\mathbf{b}$ – вектор булевых переменных $\mathbf{b} = (b_1, ..., b_N)$; $\mathbf{u}$ – вектор управляющих воздействий $\mathbf{u} = (u_1, ..., u_N)$; буква <T> обозначает транспонирование.

Такая формулировка является, конечно, идеализированной, поскольку предполагает наблюдение фазы волнового фронта на всей апертуре и возможность мгновенной коррекции искажений. Однако в задаче оптимального расположения приводов такая постановка является вполне оправданной.

Первое слагаемое в (2) характеризует ошибку коррекции фазовых искажений, второе слагаемое имеет смысл добавки, штрафующей большие значения управляющих воздействий. Величина штрафующей добавки регулируется параметром λ и при желании может быть сведена к нулю.

Оптимальное управляющее воздействие $\mathbf{u}^*$ при фиксированном $\mathbf{b}$ можно найти как решение уравнения, которое получается путем приравнивания нулю производных функции f по всем компонентам $\mathbf{u}$. Опуская выкладки, запишем выражение для оптимального управления:

$$\mathbf{u}^* = (\lambda I + BDB)^{-1} B\,\mathbf{c}\,,$$

где $B = \mathrm{diag}(b_1^{1/2}, ..., b_N^{1/2})$; элементы вектора $\mathbf{c}$ и матрицы D определяются по формулам

$$c_i = \int \gamma^2(\mathbf{r})\,\varphi(\mathbf{r})\,R_i(\mathbf{r})\,d^2\mathbf{r}\,;\quad D_{ij} = \int \gamma^2(\mathbf{r})\,R_i(\mathbf{r})\,R_j(\mathbf{r})\,d^2\mathbf{r}\,.$$

Критерий оптимизации расположения приводов возьмем в виде

$$J(\mathbf{b}) = \langle\Delta^2(\mathbf{u}^*, \mathbf{b})\rangle\,,$$

где угловые скобки обозначают усреднение по ансамблю реализаций.

Подставляя выражение для $\mathbf{u}^*$ в формулу (1), после некоторых преобразований получим:

$$J(\mathbf{b}) = \frac{1}{s}\int \gamma^2(\mathbf{r})\,\langle\varphi^2(\mathbf{r})\rangle\,d^2\mathbf{r} - \langle\mathbf{c}^{\mathrm{T}} B\,V B\,\mathbf{c}\rangle - \lambda\,\langle\mathbf{c}^{\mathrm{T}} B\,V\,V B\,\mathbf{c}\rangle\,,$$

где $V = (\lambda I + B\,D\,B)^{-1}$.

Используя оператор вычисления следа матрицы tr и вводя обозначение $Q = \langle\mathbf{c}\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\rangle$, запишем

$$J(\mathbf{b}) = \frac{1}{s}\int \gamma^2(\mathbf{r})\,\langle\varphi^2(\mathbf{r})\rangle\,d^2\mathbf{r} - tr(QL)\,,$$

где $L = B\,V(I + \lambda V)\,B$.

Элементы матрицы Q определяются по формуле

$$Q_{ij} = \int\!\!\int \gamma^2(\mathbf{r})\,\gamma^2(\rho)\,\langle\varphi(\mathbf{r})\,\varphi(\rho)\rangle\,R_i(\mathbf{r})\,R_j(\rho)\,d^2\mathbf{r}\,d^2\rho\,.$$

Задача оптимального расположения приводов записывается в виде

$$\min J(\mathbf{b})\,;\ \mathbf{b} \in \Psi\,;\ \mathbf{b} \in \{0, 1\}^N\,. \tag{3}$$

Множество Ψ в простейшем случае имеет вид

$$\Psi = \left\{\mathbf{b}:\ \sum_{i=1}^{N} b_i = M\right\},$$

что соответствует решению задачи оптимизации при наличии M приводов. Отметим, что в общем случае Ψ может быть определено системой линейных равенств и (или) неравенств, отвечающих условиям задачи.

2. При исследовании свойств J относительно оптимизируемой переменной в данном разделе мы будем рассматривать $\mathbf{b}$ как непрерывную векторную переменную $\mathbf{b} \geq 0$.

Введем обозначение

$$W = B\,V B = (\lambda F^{-1} + D)^{-1} = D^{-1} - D^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}F + D^{-1}\right)^{-1} D^{-1}\,,$$

где $F = \mathrm{diag}\,(b_1, ..., b_N)$.

После несложных преобразований для L получим равенство

$$L = 2\,W - W D\,W\,.$$

Пусть $\delta\,\mathbf{b}$ – малая вариация независимой переменной. Рассмотрим первые две вариации $L(\mathbf{b})$:

$$\delta L = 2\,\delta\,W - \delta\,W D\,W - W D\,\delta\,W\,;$$

$$\delta^2 L = \delta^2\,W D\,(D^{-1} - W) + (D^{-1} - W)\,D\,\delta^2\,W - 2\,\delta\,W D\,\delta\,W\,.$$

Для вариаций $W(\mathbf{b})$ имеем:

$$\delta W = \frac{1}{\lambda} D^{-1}\,Z\,\delta\,F\,Z\,D^{-1}\,;$$

$$\delta^2 W = -\frac{2}{\lambda^2} D^{-1}\,Z\,\delta\,F\,Z\,\delta\,F\,Z\,D^{-1} \le 0\,,$$

где $Z = \left(\frac{1}{\lambda}\,F + D^{-1}\right)^{-1}$.

Учитывая, что $D^{-1} - W$, $-\delta^2 W$ и D – неотрицательно определенные матрицы, получаем неравенство $\delta^2 L \le 0$, откуда следует, что

$$\delta^2 J = -\,tr(Q\delta^2 L) \ge 0\,,$$

то есть $J(\mathbf{b})$ является выпуклой функцией по $\mathbf{b} \ge 0$.

3. В результате исследования свойств $J(\mathbf{b})$ мы выяснили, что (3) является задачей выпуклого булева программирования. Для решения таких задач можно использовать эффективные вычислительные алгоритмы. Мы воспользуемся алгоритмом из [5] с простой его модификацией, позволяющей находить не только точное решение, но и приближенные решения с гарантированной абсолютной или относительной точностью. Ниже приводится схема алгоритма.

Пусть имеется начальная точка $\mathbf{b}^0 \in \Psi$, ε – заданная абсолютная величина допуска на точность поиска (по величине критерия качества). Положим $m = J(\mathbf{b}^0) - \varepsilon$. Переменной – счетчику итераций присвоим начальное значение $i = -\,1$.

1) Полагаем $i = i + 1$. Строим касательную гиперплоскость к $J(\mathbf{b})$ в точке $\mathbf{b}^i$:

$$g_i(\mathbf{b}) = J(\mathbf{b}^i) + \sum_{j=1}^{N} \left.\frac{\partial J(\mathbf{b})}{\partial b_j}\right|_{\mathbf{b}=\mathbf{b}^i} (\,b_j - b_j^i)\,.$$

2) Определяем множество

$$M_i = \{\mathbf{b} :\; g_0(\mathbf{b}) < m\,;\, \ldots\,;\; g_i(\mathbf{b}) < m\,;\; \mathbf{b} \in \Psi\}\,.$$

3) Находим число k такое, что

$$J(\,\mathbf{b}^k\,) = \min\,[\,J(\,\mathbf{b}^0\,),\, \ldots\,,\, J(\,\mathbf{b}^i\,)]\,.$$

Полагаем $m = J(\,\mathbf{b}^k\,) - \varepsilon$.

4) Если множество M_i пусто, то решением задачи (3) с гарантированной абсолютной точностью ε будет $\mathbf{b}^k$.

5) Если M_i не пусто, то находим решение $\mathbf{b}^{i+1}$ задачи линейного булева программирования

$$\min g_i(\mathbf{b})\,;\quad \mathbf{b} \in M_i\,;\quad \mathbf{b} \in \{0,\,1\}^N\,.$$

6) Возвращаемся к п.1.

Заметим, что в п.5 в качестве $\mathbf{b}^{i+1}$ можно взять любую допустимую точку из множества M_i.

Описанный алгоритм сходится за конечное число итераций.

При необходимости решения оптимизационной задачи с заданным относительным допуском δ в приведенном выше алгоритме нужно положить перед входом в цикл $m = (1 - \delta^*)\,J(\mathbf{b}^0)$, а в теле итерационного цикла $m = (1 - \delta^*)\,J(\mathbf{b}^k)$, где $\delta^* = \delta/(1 + \delta)$.

4. Рассмотрим задачу оптимального расположения M управляющих приводов на гибком зеркале для случая, когда

$$\gamma^2(\mathbf{r}) = \exp\{-|\mathbf{r}|^2/r_\gamma^2\}\ ;$$

$$R_i(\mathbf{r}) = \exp\{-|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2/r_R^2\}\ ;$$

$$\langle\varphi(\mathbf{r})\,\varphi(\rho)\rangle = \sigma_\varphi^2 \exp\{-|\mathbf{r} - \rho|^2/r_0^2\}\ ,$$

где $\mathbf{r}_i (\,i = 1, \ldots, N)$ – координаты узловых точек; r_0 – радиус корреляции Фрида для флуктуаций волнового фронта.

Для того чтобы иметь возможность проведения аналитических расчетов элементов матриц Q и D, предполагалось, что круговая область Ω имеет радиус, намного превышающий r_γ. Элементы матриц Q и D при этом определяются по формулам

$$Q_{ij} = \frac{\pi^2 s_\varphi^2}{\eta} \exp\left\{-\frac{1}{\eta\, r_R^4}\,(r_i^2 + r_j^2)\,(\eta\, r_R^2 - \alpha) - \frac{2}{r_0^2}\, r_i r_j \cos(\theta_i - \theta_j)\right\}\ ;$$

$$D_{ij} = \frac{\pi\,(r_R^2 + r_\gamma^2)}{r_R^2 + 2\,r_\gamma^2} \exp\left\{-\frac{1}{r_R^2\,(r_R^2 + 2\,r_\gamma^2)}\left[(r_i^2 + r_j^2)\,(r_R^2 + r_\gamma^2) - 2\,r_i r_j r_\gamma^2 \cos(\theta_i - \theta_j)\right]\right\},$$

где $\alpha = \dfrac{1}{r_0^2} + \dfrac{1}{r_R^2} + \dfrac{1}{r_c^2}$; $\eta = \alpha^2 - \dfrac{1}{r_0^4}$.

Сетка допустимых узловых точек ($N = 31$) была выбрана как в [4] на <паутине>, образованной тремя равноотстоящими концентрическими окружностями и двенадцатью выходящими из центра через равные углы лучами. В качестве узловых были взяты центральная точка, нечетные точки на пересечении первой (внутренней) окружности с лучами и все точки пересечения второй и третьей окружностей с лучами. Радиусы окружностей равны соответственно 2, 4 и 6 (в данном примере рассматриваются безразмерные величины).

При проведении расчетов приняты следующие численные значения параметров: $\sigma_\varphi^2 = 0{,}01$; $r_0 = 15$; $r_\gamma = 6$; $r_R = 10$; $\lambda = 0{,}3$.

Решалась задача размещения четырех приводов.

На ПЭВМ IBM PC/AT было проведено исследование предложенного подхода к решению задачи оптимального расположения приводов. Оказалось, что число итераций в алгоритме выпуклого булева программирования существенно зависит от величины допуска на точность решения (чем <грубее> решение, тем меньше итераций).

В табл. 1 приведены результаты, полученные для разных значений относительного допуска при начальной точке $\mathbf{b}^0$, соответствующей узловым точкам с номерами 2, 3, 5, 6. J^* – значение критерия качества, соответствующее получаемому в результате поиска аргумента **b**.

Таблица 1

δ (%)	$J^* \cdot 10^3$	Номера узловых точек				Число итераций
0	1,799	21	24	27	30	65
1	1,799	21	24	27	30	48
2	1,799	21	24	27	30	40
5	1,835	22	24	27	30	22
10	1,886	22	23	27	31	8
20	1,928	4	20	24	29	5

Таблица 2

Номер итерации	$J \cdot 10^3$	Номера узловых точек			
1	2,365	2	3	5	6
2	2,106	23	24	25	30
3	2,496	19	20	28	29
4	2,052	4	18	20	24
5	2,064	11	22	27	28
6	1,976	11	15	30	31
7	1,886	22	23	27	31
8	1,902	13	21	26	29

Из табл. 1 видно, что при относительных допусках 1 и 2 % полученные решения совпадают с точным. При относительной точности 10 % решение получается за 8 итераций (что в

8 раз меньше числа итераций при поиске точного решения), то есть примерно на порядок быстрее, чем точное решение.

Процесс поиска для случая $\delta = 10\%$ показан в табл. 2.

Поиск завершается через 8 итераций. В качестве приближенного решения с гарантированной точностью 10% принимается точка, полученная на седьмой итерации.

Отметим, что описанный подход может быть использован в сочетании с другими приближенными и эвристическими алгоритмами (известными или которые будут разработаны), в том числе – для оценки их точности.

1. Воронцов М.А., Шмальгаузен В.И. Принципы адаптивной оптики. М.: Наука, 1985, 335 с.
2. Лукин В.П. Атмосферная адаптивная оптика. Новосибирск: Наука, 1986, 247 с.
3. Евсеев О.А., Исупов А.Н., Шишаков К.В. // Оптика атмосферы. 1989. Т. 2. N 8. С. 830–835.
4. Шишаков В.К., Шмальгаузен В.И. // Оптика атмосферы. 1989. Т. 2. N 3. С. 326–328.
5. Якупов Р.Т. Оптимизация систем управления и фильтрации. Томск: Изд-во Томского ун-та, 1977. С 128–131.

Сибирский физико-технический институт им В.Д. Кузнецова,
Томск

Поступила в редакцию
9 июля 1992 г

R.T. Yakupov. **Application of the Convex Boolean Programming Methods to Solution of the Problem on Optimal Allocation of Actuators over Deformable Mirrors.**

An approach to solution of the problem on optimal allocation of actuators over deformable mirrors based on the method of convex Boolean programming is proposed.