<Оптика атмосферы и океана>, **8**, N 5 (1995)

РАССЕЯНИЕ И ПЕРЕНОС ОПТИЧЕСКИХ ВОЛН
В АТМОСФЕРЕ И ОКЕАНЕ

УДК 551: 521: 535.31: 535.36

Т.А. Сушкевич, Е.И. Игнатьева, С.В. Максакова

МЕТОД СФЕРИЧЕСКИХ ГАРМОНИК: ТОЧНЫЕ ТРЕХМЕРНЫЕ МОДЕЛИ РАСЧЕТА ПЛОТНОСТИ И ПОТОКОВ ОПТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ПРИРОДНЫХ СРЕДАХ

Для исследования спектрально-энергетических характеристик радиационного поля Земли с учетом многократного рассеяния сформулированы точные математические модели расчета сферических и полусферических плотностей и потоков оптического излучения в природных средах. Рассматривается перенос излучения в трехмерном плоском слое при горизонтально-неоднородных и однородных источниках и при отражающих границах. Модели строятся строго методом сферических гармоник. Для замыкания математических моделей введены параметры излучения с физической интерпретацией.

Многомерные модели теории переноса оптического излучения реалистичнее, чем одномерные модели, описывают радиационные процессы в природных средах (атмосфера, облака, океан, гидрометеоры). В большинстве задач дистанционного зондирования окружающей среды такие модели неизбежны [1]. Современные вычислительные комплексы позволяют создавать универсальное математическое обеспечение, ориентированное на решение разных прикладных проблем. Разрабатываемый математический аппарат в сочетании с компьютерной технологией создают основу для методических и прикладных исследований по проблемам эволюции и прогноза энергетики Земли, климата, метеорологии, атмосферной фоторадиационной химии, динамики истощения озонового слоя, трансграничного и локального переноса загрязнений и т.п.

Задачи с горизонтальными периодическими флуктуациями облачности исследовались Л.М. Романовой [2]. Отдельные результаты по приложению метода сферических гармоник [3] к решению задач для плоских сред с горизонтальными неоднородностями получены К.В. Предко, Ю.А. Лебединским, А.Н. Валентюком, В.В. Козодеровым, И.В. Мишиным и др. В Институте оптики атмосферы ТФ СО РАН и Вычислительном центре СО РАН многомерные задачи теории переноса оптического излучения традиционно решаются методом Монте-Карло. Состояние зарубежных работ отражено в обзоре Ж. Ленобль [2]. Приближенные подходы изложены в монографии Э.П. Зеге, А.П. Иванова, И.Л. Кацева [4].

Цель работы – формулировка обобщенной модели расчета суммарных и полусферических плотностей, вертикальных и горизонтальных потоков оптического излучения с учетом многократного рассеяния в трехмерных плоских средах. Радиационные характеристики и параметры излучения представляются через азимутальные и сферические гармоники. Строго методом сферических гармоник построены точные математические модели, для замыкания которых введены параметры излучения, имеющие физическую интерпретацию. В приближении одномерного, вертикально неоднородного рассеивающего и поглощающего плоского слоя такие модели изложены в [5–8].

В настоящей статье рассматривается неоднородный трехмерный плоский слой, неограниченный в горизонтальном направлении и конечный по высоте с горизонтально-неоднородными и однородными источниками излучения и отражающими границами. Точные модели описываются системами дифференциальных уравнений первого порядка и содержат нелинейные параметры, зависящие от моментов интенсивности излучения. Установлен ряд точных соотношений между радиационными характеристиками, с помощью которых можно модифицировать уравнения, изменяя набор искомых функций.

Следует отметить, что вопрос о замыкании систем уравнений неоднозначен. Один из подходов – введение нелинейных параметров излучения, другой подход – приближенное решение задач, например в P_1-приближении метода сферических гармоник. Вследствие многомерности задачи радиационные параметры можно определять разными способами. Области применимости предлагаемых моделей предполагается описать в ходе дальнейших исследований.

Постановка задачи

Рассмотрим рассеивающий и поглощающий неограниченный в горизонтальном направлении ($-\infty < x,\ y < \infty$) и конечный по высоте ($0 \le z \le H$) плоский слой, освещаемый сверху или снизу потоком излучения и ограниченный сверху или снизу отражающей границей. Направление распространения излучения определяется вектором $s = (\mu,\ \varphi)$, $\mu = \cos\vartheta$, где $\vartheta \in [0,\ \pi]$ – зенитный угол, отсчитываемый от оси z; азимут $\varphi \in [0,\ 2\pi]$ отсчитывается от оси x. Для направлений распространения нисходящего излучения $s \in \Omega^+ = \{(\mu,\ \varphi): \mu \in [0,\ 1],\ \varphi \in [0,\ 2\pi]\}$, а восходящего $s \in \Omega^- = \{(\mu,\ \varphi):\ \mu \in [-1,\ 0],\ \varphi \in [0,\ 2\pi]\}$, $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$. Пространственные координаты в плоском слое описываются радиус-вектором $r = (x, y, z)$; в горизонтальной плоскости $r_\perp = (x, y)$.

Интенсивность излучения $\Phi(r,\mu,\varphi)$ находится как решение краевой задачи теории переноса [1]

$$\begin{cases} (s,\ \mathrm{grad})\ \Phi(r,\ \mu,\ \varphi) + \sigma_t(r)\ \Phi(r,\ \mu,\ \varphi) = B(r,\ \mu,\ \varphi) + F(r,\ \mu,\ \varphi)\ , \\ \Phi\big|_{\Gamma_0} = f_0(r_\perp,\ \mu,\ \varphi) + \hat{R}_0\ \Phi\ ,\quad \Phi\big|_{\Gamma_{\mathrm{H}}} = f_{\mathrm{H}}(r_\perp,\ \mu,\ \varphi) + \hat{R}_{\mathrm{H}}\ \Phi\ ; \end{cases} \tag{1}$$

$$(s,\ \mathrm{grad}) \equiv \mu\,\frac{\partial}{\partial z} + \sin\vartheta\ \cos\varphi\,\frac{\partial}{\partial x} + \sin\vartheta\ \sin\varphi\,\frac{\partial}{\partial y}\ .$$

Интеграл столкновений

$$B(r,\ \mu,\ \varphi) \equiv \frac{\sigma_s(r)}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} \Phi(r,\ \mu',\ \varphi')\ \gamma(r,\ \cos\chi)\ d\mu'\ d\varphi'\ ; \tag{2}$$

нормировка индикатрисы рассеяния

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} \gamma(r,\ \cos\chi)\ d\mu\ d\varphi = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \gamma(r,\ \cos\chi)\ d\cos\chi = 1\ ; \tag{3}$$

$$\cos\chi = \mu\mu' + \sin\vartheta\ \sin\vartheta'\ \cos(\varphi - \varphi')\ .$$

В общем случае коэффициент ослабления $\sigma_t(r) = \sigma_s(r) + \sigma_a(r)$, где $\sigma_s(r)$ – коэффициент суммарного аэрозольно-молекулярного рассеяния; $\sigma_a(r)$ – коэффициент поглощения. Источники излучения $F(r,\ \mu,\ \varphi) = F_1(z,\ s) + F_2(r,\ s)$, $f_0(r_\perp,\ \mu,\ \varphi) = f_{01}(s) + f_{02}(r_\perp,\ s)$, $f_{\mathrm{H}}(r_\perp,\ \mu,\ \varphi) = f_{\mathrm{H}1}(s) + f_{\mathrm{H}2}(r_\perp,\ s)$ и операторы $\hat{R}_0\mathrm{F}$, $\hat{R}_{\mathrm{H}}\Phi$, описывающие взаимодействие излучения с границами, определяются в зависимости от конкретной прикладной задачи. Для удобства записи граничных условий используем множества

$$\Gamma_0 = \{(r,\ s):\ z = 0\ ,\ s \in \Omega^+\}\ ,\quad \Gamma_{\mathrm{H}} = \{(r,\ s):\ z = \mathrm{H}\ ,\quad s \in \Omega^-\}\ .$$

Равномерное приближение непрерывного решения задачи (1), заданного на сфере в каждой пространственной точке, линейными комбинациями сферических функций [9]

$$\Phi(r,\ \mu,\ \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Y}_k(r,\ \mu,\ \varphi),\quad \mathrm{Y}_k(r,\ \mu,\ \varphi) = \sum_{m=0}^{k} \Phi^m_{ck}(r)\ C^m_k(\mu,\ \varphi) + \Phi^m_{sk}(r)\ S^m_k(\mu,\ \varphi) \tag{4}$$

с коэффициентами – сферическими гармониками:

$$\Phi^m_{ck}(r) = \frac{2k+1}{2\delta_m\,\pi}\,\frac{(k-m)!}{(k+m)!}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} \Phi(r,\ \mu,\ \varphi)\ C^m_k(\mu,\ \varphi)\ d\mu\ d\varphi\ ,\ \ k \ge 0\ ,\ \ 0 \le m \le k\ ;$$

$$\Phi^m_{sk}(r) = \frac{2k+1}{2\delta_m\,\pi}\,\frac{(k-m)!}{(k+m)!}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} \Phi(r,\ \mu,\ \varphi)\ S^m_k(\mu,\ \varphi)\ d\mu\ d\varphi\ ,\ \ k \ge 0\ ,\ \ 0 \le m \le k\ ;$$

$$\delta_m \equiv 1 + \delta_{m0}\ ,\ \ C^m_k(\mu,\ \varphi) = P^m_k(\mu)\ \cos m\varphi\ ,\ \ S^m_k(\mu,\ \varphi) = (1 - \delta_{m0})\ P^m_k(\mu)\ \sin m\varphi\ ;$$

$P^m_k(\mu)$ – присоединенные функции Лежандра; δ_{mk} – символ Кронекера, приводит к разделению переменных r, μ, φ. Воспользовавшись тождеством

$$\sum_{k=0}^{\infty}\ \sum_{m=0}^{k} f^m_{c\,k}\, C^m_k(\mu,\varphi) + f^m_{s\,k}\, S^m_k(\mu,\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty}\ \sum_{k=m}^{\infty} f^m_{c\,k}\, C^m_k(\mu,\varphi) + f^m_{s\,k}\, S^m_k(\mu,\varphi)\,,$$

в представлении (4) выделяем азимутальную зависимость

$$\Phi(r,\mu,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty}\ \sum_{m=0}^{k} \Phi^m_{c\,k}(r)\, P^m_k(\mu)\cos m\varphi + \Phi^m_{s\,k}(r)\, P^m_k(\mu)\sin m\varphi =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \Phi^m_c(r,\mu)\cos m\varphi + \Phi^m_s(r,\mu)\sin m\varphi\,, \tag{5}$$

где азимутальные гармоники

$$\Phi^m_c(r,\mu) = \sum_{k=m}^{\infty} \Phi^m_{c\,k}(r)\, P^m_k(\mu)\,,\quad \Phi^m_s(r,\mu) = (1-\delta_{m0})\sum_{k=m}^{\infty} \Phi^m_{s\,k}(r)\, P^m_k(\mu) \tag{6}$$

определяются по формулам

$$\Phi^m_c(r,\mu) = \frac{1}{\delta_m \pi}\int_0^{2\pi} \Phi(r,\mu,\varphi)\cos m\varphi\, d\varphi\,,\quad \Phi^m_s(r,\mu) = \frac{1}{\delta_m \pi}\int_0^{2\pi} \Phi(r,\mu,\varphi)\sin m\varphi\, d\varphi\,.$$

Если индикатриса рассеяния представима разложением по полиномам Лежандра

$$\gamma(r,\cos\chi) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k(r)\, P_k(\cos\chi)\,,\quad \omega_k(r) = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1} \gamma(r,\cos\chi)\, P_k(\cos\chi)\, d\cos\chi\,,$$

то с помощью теоремы сложения можно разделить угловые переменные и выделить азимутальные гармоники [9]

$$\gamma(r,\cos\chi) = \sum_{k=0}^{\infty}\ \sum_{m=0}^{k} \gamma^m_k(r)\left[C^m_k(\mu,\varphi)\, C^m_k(\mu',\varphi') + S^m_k(\mu,\varphi)\, S^m_k(\mu',\varphi')\right] = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma^m(r,\mu,\mu')\cos m(\varphi-\varphi'), \tag{7}$$

$$\gamma^m(r,\mu,\mu') = \sum_{k=m}^{\infty} \gamma^m_k(r)\, P^m_k(\mu)\, P^m_k(\mu')\,,\quad g^m_k(r) = \frac{2}{\delta_m}\frac{(k-m)!}{(k+m)!}\,\omega_k(r)\,. \tag{8}$$

Азимутальные гармоники можно определить через интегралы [5]:

$$\gamma^0(r,\mu,\mu') = \frac{1}{2\,p}\int_0^{2p} \gamma(r,\cos\chi)\, d\varphi = \sum_{k=0}^{\$} \omega_k(r)\, P_k(\mu)\, P_k(\mu')\,; \tag{9}$$

$$\gamma^m(r,\mu,\mu') = \frac{1}{\pi\,\delta_m}\int_0^{2\pi} \gamma(r,\cos\chi)\cos m(\varphi-\varphi')\, d(\varphi-\varphi')\,.$$

Будем считать, что имеют место разложения

$$F(r,\mu,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty}\ \sum_{m=0}^{k} F^m_{c\,k}(r)\, C^m_k(\mu,\varphi) + F^m_{s\,k}(r)\, S^m_k(\mu,\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} F^m_c(r,\mu)\cos m\varphi + F^m_s(r,\mu)\sin m\varphi\,; \tag{10}$$

$$F^m_c(r,\mu) = \sum_{k=m}^{\infty} F^m_{c\,k}(r)\, P^m_k(\mu)\,,\quad F^m_s(r,\mu) = (1-\delta_{m0})\sum_{k=m}^{\infty} F^m_{s\,k}(r)\, P^m_k(\mu)\,. \tag{11}$$

Выражения для коэффициентов разложений (10), (11) зависят от конкретных задач и будут представлены в отдельном выпуске. Там же обсудим проблемы, связанные с граничными условиями.

Метод сферических гармоник в общем виде достаточно широко представлен в литературе [3]. В нашем изложении мы избегаем комплексных представлений сферических функций и отрицательных значений индексов, что часто используется в общетеоретических исследованиях, но не вполне удобно для практических реализаций. Для сокращения записей будем опускать аргументы (r, μ) в азимутальных гармониках $\Phi^m_c(r, \mu)$, $\Phi^m_s(r, \mu)$ и аргумент r в сферических гармониках $\Phi^m_{ck}(r)$, $\Phi^m_{sk}(r)$. Вводим метку <$\downarrow$> для полусферических характеристик нисходящего излучения, определяющихся интегрированием по полусфере Ω^+ с $\mu > 0$, и метку <$\uparrow$> для полусферических характеристик восходящего излучения, определяющихся интегрированием по полусфере Ω^- с $\mu < 0$.

Радиационные характеристики

Интегральные (по углам) радиационные характеристики – сферические и полусферические плотности, вертикальные и горизонтальные потоки – полностью определяются через нулевую и первые азимутальные гармоники. Сферические характеристики описываются одной из сферических гармоник, а полусферические – представляются суммами бесконечных рядов разложений по четным или нечетным сферическим гармоникам. Представим явные выражения радиационных характеристик [10].

Плотность излучения (актинометрический поток)

$$n(r) = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{1} \Phi(r, \mu, \varphi)\, d\mu\, d\varphi = 2\pi \int_{-1}^{1} \Phi^0_c(r, \mu)\, d\mu = 4\pi\, \Phi^0_{c0}(r)\,;$$

плотность нисходящего излучения

$$n^{\downarrow} = \int_0^{2\pi} \int_0^{1} \Phi\, d\mu\, d\varphi = 2\pi \int_0^{1} \Phi^0_c\, d\mu = 2\pi \left[\Phi^0_{c0} + \frac{1}{2}\Phi^0_{c1} + \sum_{n=1}^{\infty} t^0_{2n+1}\, \Phi^0_{c,\,2n+1} \right];$$

плотность восходящего излучения

$$n^{\uparrow} = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{0} \Phi\, d\mu\, d\varphi = 2\pi \int_{-1}^{0} \Phi^0_c\, d\mu = 2\pi \left[\Phi^0_{c0} - \frac{1}{2}\Phi^0_{c1} - \sum_{n=1}^{\infty} t^0_{2n+1}\, \Phi^0_{c,\,2n+1} \right];$$

$$t^0_{2n+1} \equiv \int_0^1 P_{2n+1}(\mu)\, d\mu = \frac{(-1)^n\,(2n-1)!!}{2^{n+1}\,(n+1)!}\,, \quad n \ge 0\,, \ (-1)!! = 1\,.$$

Вертикальный поток излучения (вдоль оси z)

$$J(r) = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{1} \Phi(r, \mu, \varphi)\, \mu\, d\mu\, d\varphi = 2\pi \int_{-1}^{1} \Phi^0_c\, \mu\, d\mu = \frac{4\pi}{3}\Phi^0_{c1}\,;$$

нисходящий вертикальный поток излучения

$$J^{\downarrow} = \int_0^{2\pi} \int_0^{1} \Phi\, \mu\, d\mu\, d\varphi = 2\pi \int_0^{1} \Phi^0_c\, \mu\, d\mu = \pi \left[\Phi^0_{c0} + \frac{2}{3}\Phi^0_{c1} + \frac{1}{4}\Phi^0_{c2} + 2\sum_{n=2}^{\infty} \beta_{2n}\, \Phi^0_{c,\,2n} \right];$$

восходящий

$$J^{\uparrow} = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{0} \Phi\, \mu\, d\mu\, d\varphi = 2\pi \int_{-1}^{0} \Phi^0_c\, \mu\, d\mu = -\pi \left[\Phi^0_{c0} - \frac{2}{3}\Phi^0_{c1} + \frac{1}{4}\Phi^0_{c2} + 2\sum_{n=2}^{\infty} \beta_{2n}\, \Phi^0_{c,\,2n} \right];$$

$$\beta_{2n} \equiv \int_0^1 \mu\, P_{2n}(\mu)\, d\mu = (-1)^{n+1}\frac{(2n-3)!!}{2^{n+1}\,(n+1)!}\,, \quad n \ge 1\,.$$

Очевидно, что суммарный вертикальный поток излучения

$$J(r) = J^{\downarrow}(r) + J^{\uparrow}(r)\ ;\quad J^{\downarrow}(r) \ge 0\ ,\quad J^{\uparrow}(r) \le 0\ .$$

Горизонтальный поток излучения по оси x

$$G_x(r) = \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} \Phi(r,\mu,\varphi)\sin\vartheta\cos\varphi\, d\mu\, d\varphi = \pi\int_{-1}^{1}\Phi_c^1 \sin\vartheta\, d\mu = \frac{4\pi}{3}\Phi_{c1}^1\ ;$$

нисходящий горизонтальный поток излучения по оси x

$$G_x^{\downarrow} = \int_0^{2\pi}\int_0^{1}\Phi\sin\vartheta\cos\varphi\, d\mu\, d\varphi = \pi\int_0^1 \Phi_c^1\sin\vartheta\, d\mu = \pi\left[\frac{2}{3}\Phi_{c1}^1 + \frac{3}{4}\Phi_{c2}^1 + \sum_{n=2}^{\infty}\beta_{2n}^1\Phi_{c,2n}^1\right];$$

Восходящий

$$G_x^{\uparrow} = \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{0}\Phi\sin\vartheta\cos\varphi\, d\mu\, d\varphi = \pi\int_{-1}^0 \Phi_c^1\sin\vartheta\, d\mu = \pi\left[\frac{2}{3}\Phi_{c1}^1 - \frac{3}{4}\Phi_{c2}^1 - \sum_{n=2}^{\infty}\beta_{2n}^1\Phi_{c,2n}^1\right].$$

Горизонтальный поток излучения по оси y

$$G_y(r) = \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} \Phi(r,\mu,\varphi)\sin\vartheta\sin\varphi\, d\mu\, d\varphi = \pi\int_{-1}^{1}\Phi_s^1 \sin\vartheta\, d\mu = \frac{4\pi}{3}\Phi_{s1}^1\ ;$$

нисходящий горизонтальный поток излучения по оси y

$$G_y^{\downarrow} = \int_0^{2\pi}\int_0^{1}\Phi\sin\vartheta\sin\varphi\, d\mu\, d\varphi = \pi\int_0^1 \Phi_s^1\sin\vartheta\, d\mu = \pi\left[\frac{2}{3}\Phi_{s1}^1 + \frac{3}{4}\Phi_{s2}^1 + \sum_{n=2}^{\infty}\beta_{2n}^1\Phi_{s,2n}^1\right];$$

восходящий

$$G_y^{\uparrow} = \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{0}\Phi\sin\vartheta\sin\varphi\, d\mu\, d\varphi = \pi\int_{-1}^0 \Phi_s^1\sin\vartheta\, d\mu = \pi\left[\frac{2}{3}\Phi_{s1}^1 - \frac{3}{4}\Phi_{s2}^1 - \sum_{n=2}^{\infty}\beta_{2n}^1\Phi_{s,2n}^1\right];$$

$$\beta_{2n}^1 \equiv \int_0^1 P_{2n}^1(\mu)\sin\vartheta\, d\mu = \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)!!}{2^n(2n-1)(n+1)(n-1)!}\ ,\quad n \ge 1\ .$$

Горизонтальный поток излучения в азимутальной плоскости $\varphi = \varphi_\perp$

$$G_\perp(r) = \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\Phi(r,\mu,\varphi)\sin\vartheta\cos(\varphi-\varphi_\perp)\, d\mu\, d\varphi = \pi\cos\varphi_\perp\int_{-1}^{1}\Phi_c^1\sin\vartheta\, d\mu + \pi\sin\varphi_r\int_{-1}^{1}\Phi_s^1\sin\vartheta\, d\mu =$$

$$= G_x\cos\varphi_\perp + G_y\sin\varphi_\perp\ ;$$

нисходящий горизонтальный поток излучения в азимутальной плоскости $\varphi = \varphi_\perp$

$$G_\perp^{\downarrow}(r) = \int_0^{2\pi}\int_0^{1}\Phi(r,\mu,\varphi)\sin\vartheta\cos(\varphi-\varphi_r)\, d\mu\, d\varphi = G_x^{\downarrow}\cos\varphi_\perp + G_y^{\downarrow}\sin\varphi_\perp\ ;$$

восходящий

$$G_\perp^{\uparrow}(r) = \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{0}\Phi(r,\mu,\varphi)\sin\vartheta\cos(\varphi-\varphi_\perp)\, d\mu\, d\varphi = G_x^{\uparrow}\cos\varphi_\perp + G_y^{\uparrow}\sin\varphi_\perp\ .$$

Очевидно, что $G_x = G_x^{\downarrow} + G_x^{\uparrow}$, $G_y = G_y^{\downarrow} + G_y^{\uparrow}$, $G_\perp = G_r^{\downarrow} + G_\perp^{\uparrow}$.

Параметры излучения

Коэффициенты уравнений, описывающих математические модели расчета плотностей и потоков, – параметры излучения – представим через азимутальные и сферические гармоники.

K-интеграл – момент второго порядка

$$K(r) \equiv \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} \Phi(r,\mu,\varphi)\,\mu^2\,d\mu\,d\varphi = 2\pi\int_{-1}^{1}\Phi_c^0\,\mu^2\,d\mu = \frac{4\pi}{3}\Phi_{c0}^0 + \frac{8\pi}{15}\Phi_{c2}^0\,;$$

полусферические *K*-интегралы

$$K^{\downarrow} \equiv \int_0^{2\pi}\int_0^1 \Phi\,\mu^2\,d\mu\,d\varphi = 2\pi\int_0^1\Phi_c^0\,\mu^2\,d\mu = 2\pi\left[\frac{1}{3}\Phi_{c0}^0 + \frac{1}{4}\Phi_{c1}^0 + \frac{2}{15}\Phi_{c2}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} t_{2n+1}\,\Phi_{c,2n+1}^0\right];$$

$$K^{\uparrow}(r) \equiv \int_0^{2\pi}\int_{-1}^0 \Phi\,\mu^2\,d\mu\,d\varphi = 2\pi\int_{-1}^0\Phi_c^0\,\mu^2\,d\mu = 2\pi\left[\frac{1}{3}\Phi_{c0}^0 - \frac{1}{4}\Phi_{c1}^0 + \frac{2}{15}\Phi_{c2}^0 - \sum_{n=1}^{\infty} t_{2n+1}\,\Phi_{c,2n+1}^0\right];$$

$$t_{2n+1} \equiv \int_0^1 \mu^2 P_{2n+1}(\mu)\,d\mu = \frac{(-1)^{n+1}\,(2n-3)!!}{2^{n+1}\,(n+2)!}\,,\quad n \ge 1\,.$$

Коэффициент диффузии излучения в вертикальном направлении

$$D(r) \equiv K(r)\,/\,n(r) = \frac{1}{3} + \frac{2}{15}\Phi_{c2}^0\,/\,\Phi_{c0}^0\,;$$

полусферические вертикальные коэффициенты диффузии

$$D^{\downarrow}(r) = K^{\downarrow}(r)\,/\,n^{\downarrow}(r)\,;\quad D^{\uparrow}(r) = K^{\uparrow}(r)\,/\,n^{\uparrow}(r)\,.$$

Коэффициент диффузии излучения в горизонтальной плоскости

$$D_{\perp}(r) \equiv 1 - D(r) = \frac{2}{3}\left[1 - \frac{1}{5}\Phi_{c2}^0\,/\,\Phi_{c0}^0\right];$$

в случае нисходящего и восходящего излучения коэффициенты диффузии в горизонтальной плоскости

$$D_{\perp}^{\downarrow}(r) \equiv 1 - D^{\downarrow}(r)\,,\quad D_{\perp}^{\uparrow}(r) \equiv 1 - D^{\uparrow}(r)\,.$$

Для характеристики угловой анизотропии излучения вводим параметры – <средние косинусы> и <средние синусы>.

<Средние косинусы> вертикальных потоков излучения

$$\bar{\mu}(r) \equiv J(r)\,/\,n(r) = \frac{1}{3}\Phi_{c1}^0\,/\,\Phi_{c0}^0\,;\quad \mu^{\downarrow} \equiv J^{\downarrow}\,/\,n^{\downarrow} \ge 0\,;\quad \mu^{\uparrow} \equiv J^{\uparrow}\,/\,n^{\uparrow} \le 0\,.$$

Введем моменты излучения в горизонтальной плоскости

$$\mu_{\perp c}(r) \equiv \int_0^{2\pi}\int_{-1}^1 \mu\,\Phi\,\sin\vartheta\,\cos\varphi\,d\mu\,d\varphi = \pi\int_{-1}^1 \mu\,\sin\vartheta\,\Phi_c^1\,d\mu = \frac{4}{5}\pi\Phi_{c2}^1\,;$$

$$\mu_{\perp s}(r) \equiv \int_0^{2p}\int_{-1}^1 \mu\,\Phi\,\sin\vartheta\,\sin\varphi\,d\mu\,d\varphi = \pi\int_{-1}^1 \mu\,\sin\vartheta\,\Phi_s^1\,d\mu = \frac{4}{5}\pi\Phi_{s2}^1\,;$$

для нисходящего излучения

$$\mu_{\perp c}^{\downarrow} \equiv \int_0^{2\pi}\int_0^1 \mu\,\Phi\,\sin\vartheta\,\cos\varphi\,d\mu\,d\varphi = \pi\int_0^1 \mu\,\sin\vartheta\,\Phi_c^1\,d\mu =$$

$$= \pi \left\{ \frac{1}{4} \Phi^1_{c1} + \frac{2}{5} \Phi^1_{c2} + \sum_{k=3}^{\infty} \Phi^1_{c\,k}\, \beta^1_{2n} \left[\frac{k}{2k+1} \delta_{k+1,\,2n} + \frac{k+1}{2k+1} \delta_{k-1,\,2n} \right] \right\};$$

$$\mu^{\downarrow}_{\perp c} \equiv \int_0^{2\pi} \int_0^1 \mu\, \Phi \sin\vartheta \, \sin\varphi \, d\mu \, d\varphi = \pi \int_0^1 \mu \sin\vartheta \, \Phi^1_s \, d\mu =$$

$$= \pi \left\{ \frac{1}{4} \Phi^1_{s1} + \frac{2}{5} \Phi^1_{s2} + \sum_{k=3}^{\infty} \Phi^1_{s\,k}\, b^1_{2n} \left[\frac{k}{2k+1} \delta_{k+1,\,2n} + \frac{k+1}{2k+1} \delta_{k-1,\,2n} \right] \right\};$$

для восходящего излучения

$$\mu^{\uparrow}_{\perp c}(r) \equiv \int_0^{2\pi} \int_{-1}^0 \mu\, \Phi \sin\vartheta \, \cos\varphi \, d\mu \, d\varphi = \pi \int_{-1}^0 \mu \sin\vartheta \, \Phi^1_c \, d\mu =$$

$$= -\pi \left\{ \frac{1}{4} \Phi^1_{c1} - \frac{2}{5} \Phi^1_{c2} + \sum_{k=3}^{\infty} \Phi^1_{c\,k}\, \beta^1_{2n} \left[\frac{k}{2k+1} \delta_{k+1,\,2n} + \frac{k+1}{2k+1} \delta_{k-1,\,2n} \right] \right\};$$

$$\mu^{\downarrow}_{\perp c} \equiv \int_0^{2\pi} \int_{-1}^0 \mu\, \Phi \sin\vartheta \, \sin\varphi \, d\mu \, d\varphi = \pi \int_{-1}^0 \mu \sin\vartheta \, \Phi^1_s \, d\mu =$$

$$= -\pi \left\{ \frac{1}{4} \Phi^1_{s1} - \frac{2}{5} \Phi^1_{s2} + \sum_{k=3}^{\infty} \Phi^1_{s\,k}\, \beta^1_{2n} \left[\frac{k}{2k+1} \delta_{k+1,\,2n} + \frac{k+1}{2k+1} \delta_{k-1,\,2n} \right] \right\}.$$

Угловую анизотропию горизонтальных потоков излучения вдоль осей x и y описываем <средними косинусами>:

$$\mu_x(r) \equiv \mu_{\perp c}(r) \,/\, G_x(r) = \frac{3}{5} \Phi^1_{c2} \,/\, \Phi^1_{c1} \,; \quad \mu_y(r) \equiv \mu_{\perp s}(r) \,/\, G_y(r) = \frac{3}{5} \Phi^1_{s2} \,/\, \Phi^1_{s1} \,;$$

$$\mu^{\downarrow}_x \equiv \mu^{\downarrow}_{\perp c} \,/\, G^{\downarrow}_x \,; \quad \mu^{\downarrow}_y \equiv \mu^{\downarrow}_{\perp s} \,/\, G^{\downarrow}_y \,; \quad \mu^{\uparrow}_x \equiv \mu^{\uparrow}_{\perp c} \,/\, G^{\uparrow}_x \,; \quad \mu^{\uparrow}_y \equiv \mu^{\uparrow}_{\perp s} \,/\, G^{\uparrow}_y$$

и <средними синусами>:

$$s_x(r) \equiv G_x(r) \,/\, n(r) = \frac{1}{3} \Phi^1_{c1} \,/\, \Phi^0_{c0} \,; \; s_y(r) \equiv G_y(r) \,/\, n(r) = \frac{1}{3} \Phi^1_{s1} \,/\, \Phi^0_{c0} \,;$$

$$s^{\downarrow}_x \equiv G^{\downarrow}_x \,/\, n^{\downarrow} \,; \; s^{\downarrow}_y \equiv G^{\downarrow}_y \,/\, n^{\downarrow} \,; \; s^{\uparrow}_x \equiv G^{\uparrow}_x \,/\, n^{\uparrow} \,; \; s^{\uparrow}_y \equiv G^{\uparrow}_y \,/\, n^{\uparrow} \,.$$

Вводим параметры, определяющие соотношения между вертикальными и горизонтальными потоками:

$$c_x(r) \equiv G_x(r) \,/\, J(r) = \Phi^1_{c1} \,/\, \Phi^0_{c1} \,; \; c_y(r) \equiv G_y(r) \,/\, J(r) = \Phi^1_{s1} \,/\, \Phi^0_{c1} \,;$$

$$c^{\downarrow}_x \equiv G^{\downarrow}_x \,/\, J^{\downarrow} \,; \; c^{\uparrow}_x \equiv G^{\uparrow}_x \,/\, J^{\uparrow} \,; c^{\downarrow}_y \equiv G^{\downarrow}_y \,/\, J^{\downarrow} \,; \; c^{\uparrow}_y \equiv G^{\uparrow}_y \,/\, J^{\uparrow} \,.$$

Азимутальные гармоники параметров излучения

Для замыкания математических моделей расчета плотностей и потоков вводятся вторые азимутальные гармоники коэффициентов диффузии в горизонтальной плоскости – параметры излучения:

$$D_{\perp c2}(r) \equiv K_{\perp c2} \,/\, n = \frac{4}{5} \Phi^2_{c2} \,/\, \Phi^0_{c0} \,; \; D_{\perp s2}(r) \equiv K_{\perp s2} \,/\, n = \frac{4}{5} \Phi^2_{s2} \,/\, \Phi^0_{c0} \,;$$

$$D^{\downarrow}_{\perp c2}(r) \equiv K^{\downarrow}_{\perp c2} \,/\, n^{\downarrow} \,; \; D^{\uparrow}_{\perp c2} \equiv K^{\uparrow}_{\perp c2} \,/\, n^{\uparrow} \,; \; D^{\downarrow}_{\perp s2} \equiv K^{\downarrow}_{\perp s2} \,/\, n^{\downarrow} \,; \; D^{\uparrow}_{\perp s2}(r) \equiv K^{\uparrow}_{\perp s2} \,/\, n^{\uparrow} \,.$$

Вторые азимутальные гармоники K-интеграла в горизонтальной плоскости представляются через азимутальные и сферические гармоники интенсивности:

$$K_{\perp c2} \equiv \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} \sin^2\vartheta\ \Phi(r, \mu, \varphi)\cos 2\varphi\, d\mu\, d\varphi = \pi \int_{-1}^{1} \sin^2\vartheta\ \Phi_c^2(r, \mu)\, d\mu = \frac{16}{5}\pi\, \Phi_{c2}^2\ ;$$

$$K_{\perp s2} \equiv \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} \sin^2\vartheta\ \Phi(r, \mu, \varphi)\sin 2\varphi\, d\mu\, d\varphi = \pi \int_{-1}^{1} \sin^2\vartheta\ \Phi_s^2(r, \mu)\, d\mu = \frac{16}{5}\pi\, \Phi_{s2}^2\ ;$$

$$K_{\perp c2}^{\downarrow} \equiv \int_0^{2\pi}\int_0^{1} \sin^2\vartheta\ \Phi \cos 2\varphi\, d\mu\, d\varphi = \pi \int_0^{1} \sin^2\vartheta\ \Phi_c^2\, d\mu = \frac{8}{5}\pi\, \Phi_{c2}^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, \Phi_{c,\,2n+1}^2\ ;$$

$$K_{\perp c2}^{\uparrow} \equiv \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{0} \sin^2\vartheta\ \Phi \cos 2\varphi\, d\mu\, d\varphi = \pi \int_{-1}^{0} \sin^2\vartheta\ \Phi_c^2\, d\mu = \frac{8}{5}\pi\, \Phi_{c2}^2 - \pi \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, \Phi_{c,\,2n+1}^2\ ;$$

$$b_n \equiv \frac{1}{3}\int_0^1 P_{2n+1}^2(\mu)\, P_2^2(\mu)\, d\mu = (-1)^{n+1}\frac{(2\,n+3)!!}{2^n\,(2\,n-1)(n+2)(n-1)!}\ ,\ \ n \ge 2\ .$$

Выражения для интегралов $K_{\perp s2}^{\downarrow}$, $K_{\perp s2}^{\uparrow}$ совпадают с представлениями $K_{\perp c2}^{\downarrow}$, $K_{\perp c2}^{\uparrow}$, если индекс $< c>$ заменить на $< s>$ и $\cos 2\varphi$ заменить на $\sin 2\varphi$.

Характеристики обратного рассеяния

Для замыкания математических моделей расчета нисходящих и восходящих плотностей, вертикальных и горизонтальных потоков излучения вводим характеристики обратного рассеяния, которые зависят от свойств задней полусферы индикатрисы рассеяния.

Из условия нормировки индикатрисы рассеяния (3) вытекает равенство

$$\gamma_0(r, \mu) \equiv \int_{-1}^{1} \gamma^0(r, \mu, \mu')\, d\mu' = \gamma_0^+(r, \mu) + \gamma_0^-(r, \mu) = 2\ ;$$

$$\gamma_0^+(r, \mu) \equiv \int_0^{1} \gamma^0(r, \mu, \mu')\, d\mu' = 1 + \frac{1}{2}\omega_1\,\mu + \sum_{m=1}^{\infty} \omega_{2m+1}\, P_{2m+1}\, t_{2m+1}^0\ ;$$

$$\gamma_0^-(r, \mu) \equiv \int_{-1}^{0} \gamma^0(r, \mu, \mu')\, d\mu' = 1 - \frac{1}{2}\omega_1\,\mu - \sum_{m=1}^{\infty} \omega_{2m+1}\, P_{2m+1}\, t_{2m+1}^0\ .$$

Как и в случае одномерного плоского слоя, вводим характеристики обратного рассеяния

$$\gamma_0^{\downarrow}(r) \equiv \Gamma_0^{\downarrow}(r)\,/\,n^{\downarrow}(r) = 1 - \frac{\omega_1(r)}{2}\,\mu^{\downarrow}(r) - M^{\downarrow}(r)\ ;$$

$$\gamma_0^{\uparrow}(r) \equiv \Gamma_0^{\uparrow}(r)\,/\,n^{\uparrow}(r) = 1 + \frac{\omega_1(r)}{2}\,\mu^{\uparrow}(r) + M^{\uparrow}(r)\ ,$$

где

$$\Gamma_0^{\downarrow}(r) \equiv 2\pi \int_0^1 \Phi_c^0(r, \mu)\, d\mu \int_{-1}^{0} \gamma^0(r, \mu, \mu')\, d\mu' = 2\pi \int_0^1 \Phi_c^0(r, \mu)\, \gamma_0^-(r, \mu)\, d\mu\ ;$$

$$\Gamma_0^{\uparrow}(r) \equiv 2\pi \int_{-1}^0 \Phi_c^0(r, \mu)\, d\mu \int_0^{1} \gamma^0(r, \mu, \mu')\, d\mu' = 2\pi \int_{-1}^0 \Phi_c^0(r, \mu)\, \gamma_0^+(r, \mu)\, d\mu\ ;$$

$$M^{\downarrow}(r) \equiv \sum_{m=1}^{\infty} \omega_{2m+1}\, t^0_{2m+1} \int_0^1 \Phi^0_c\, P_{2m+1}\, d\mu \,/ \int_0^1 \Phi^0_c\, d\mu\,,$$

$$M^{\uparrow}(r) \equiv \sum_{m=1}^{\infty} \omega_{2m+1}\, t^0_{2m+1} \int_{-1}^0 \Phi^0_c\, P_{2m+1}\, d\mu \,/ \int_{-1}^0 \Phi^0_c\, d\mu\,.$$

С помощью моментов нулевой азимутальной гармоники индикатрисы рассеяния, связанных соотношением

$$\gamma_1(r,\mu) \equiv \int_{-1}^{1} \mu'\, \gamma^0(r,\mu,\mu')\, d\mu' = \gamma_1^+(r,\mu) + \gamma_1^-(r,\mu) = \frac{2}{3}\,\omega_1(r)\,\mu\,,$$

$$\gamma_1^+(r,\mu) \equiv \int_{0}^{1} \mu'\, \gamma^0(r,\mu,\mu')\, d\mu' = \frac{1}{2} + \frac{\omega_1(r)}{3}\,\mu + \sum_{m=1}^{\infty} \omega_{2m}(r)\, P_{2m}(\mu)\, \beta_{2m}\,,$$

$$\gamma_1^-(r,\mu) \equiv \int_{-1}^{0} \mu'\, \gamma^0(r,\mu,\mu')\, d\mu' = -\frac{1}{2} + \frac{\omega_1(r)}{3}\,\mu - \sum_{m=1}^{\infty} \omega_{2m}(r)\, P_{2m}(\mu)\, \beta_{2m}\,,$$

вводим характеристики обратного рассеяния

$$\gamma_1^{\downarrow}(r) \equiv \Gamma_1^{\downarrow}(r) \,/\, n^{\downarrow}(r) = -\frac{1}{2} + \frac{\omega_1}{3}\,\mu^{\downarrow} - \frac{\omega_2}{16}\,(3\,D^{\downarrow} - 1) - N_2^{\downarrow}\,;$$

$$\gamma_1^{\uparrow}(r) \equiv \Gamma_1^{\uparrow}(r) \,/\, n^{\uparrow}(r) = \frac{1}{2} + \frac{\omega_1}{3}\,\mu^{\uparrow} + \frac{\omega_2}{16}\,(3\,D^{\uparrow} - 1) + N_2^{\uparrow}\,,$$

где моменты интенсивности излучения, зависящие от индикатрисы рассеяния,

$$\Gamma_1^{\downarrow}(r) \equiv 2\pi \int_0^1 \Phi^0_c(r,\mu)\, d\mu \int_{-1}^{0} \mu'\, \gamma^0(r,\mu,\mu')\, d\mu' = 2\pi \int_0^1 \gamma_1^-(r,\mu)\, \Phi^0_c(r,\mu)\, d\mu\,;$$

$$\Gamma_1^{\uparrow}(r) \equiv 2\pi \int_{-1}^0 \Phi^0_c(r,\mu)\, d\mu \int_{0}^{1} \mu'\, \gamma^0(r,\mu,\mu')\, d\mu' = 2\pi \int_{-1}^0 \gamma_1^+(r,\mu)\, \Phi^0_c(r,\mu)\, d\mu\,;$$

$$N_2^{\downarrow}(r) \equiv \sum_{m=2}^{\infty} \omega_{2m}\, \beta_{2m} \int_0^1 \Phi^0_c\, P_{2m}\, d\mu \,/ \int_0^1 \Phi^0_c\, d\mu\,;$$

$$N_2^{\uparrow}(r) \equiv \sum_{m=2}^{\infty} \omega_{2m}\, \beta_{2m} \int_{-1}^0 \Phi^0_c\, P_{2m}\, d\mu \,/ \int_{-1}^0 \Phi^0_c\, d\mu\,.$$

С помощью моментов первой азимутальной гармоники индикатрисы рассеяния, связанных соотношением

$$\gamma_2(r,\mu) \equiv \int_{-1}^{1} \sin\vartheta'\, \gamma^1(r,\mu,\mu')\, d\mu' = \gamma_2^+(r,\mu) + \gamma_2^-(r,\mu) = \frac{4}{3}\,\omega_1(r)\,\sin\vartheta\,,$$

$$\gamma_2^+(r,\mu) \equiv \int_{0}^{1} \sin\vartheta'\, \gamma^1(r,\mu,\mu')\, d\mu' = \frac{2}{3}\,\omega_1\,\sin\vartheta + 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2\,m-1)!}{(2\,m+1)!}\,\omega_{2m}\,\beta^1_{2m}\,P^1_{2m}\,,$$

$$\gamma_2^-(r,\mu) \equiv \int_{-1}^{0} \sin\vartheta'\, \gamma^1(r,\mu,\mu')\, d\mu' = \frac{2}{3}\,\omega_1\,\sin\vartheta - 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2\,m-1)!}{(2\,m+1)!}\,\omega_{2m}\,\beta^1_{2m}\,P^1_{2m}\,,$$

введем характеристики обратного рассеяния

$$\gamma^{\downarrow}_{2c}(r) \equiv \Gamma^{\downarrow}_{2c} \,/\, G^{\downarrow}_{x} = \frac{2}{3}\,\omega_1 - L^{\downarrow}_{c}\,;\;\; \gamma^{\uparrow}_{2c}(r) \equiv \Gamma^{\uparrow}_{2c} \,/\, G^{\uparrow}_{x} = \frac{2}{3}\,\omega_1 + L^{\uparrow}_{c}\,;$$

$$\gamma^{\downarrow}_{2s}(r) \equiv \Gamma^{\downarrow}_{2s} \,/\, G^{\downarrow}_{y} = \frac{2}{3}\,\omega_1 - L^{\downarrow}_{s}\,;\;\; \gamma^{\uparrow}_{2s}(r) \equiv \Gamma^{\uparrow}_{2s} \,/\, G^{\uparrow}_{y} = \frac{2}{3}\,\omega_1 + L^{\uparrow}_{s}\,.$$

Моменты интенсивности излучения, зависящие от индикатрисы рассеяния, определяются по формулам:

$$\Gamma^{\downarrow}_{2c} \equiv \pi \int_0^1 \Phi^1_c(r, \mu)\, d\mu \int_{-1}^0 \sin\vartheta'\, \gamma^1(r, \mu, \mu')\, d\mu' = \pi \int_0^1 \gamma^-_2(r, \mu)\, \Phi^1_c(r, \mu)\, d\mu\,,$$

$$\Gamma^{\uparrow}_{2c} \equiv \pi \int_{-1}^0 \Phi^1_c(r, \mu)\, d\mu \int_0^1 \sin\vartheta'\, \gamma^1(r, \mu, \mu')\, d\mu' = \pi \int_{-1}^0 \gamma^+_2(r, \mu)\, \Phi^1_c(r, \mu)\, d\mu\,,$$

$$\Gamma^{\downarrow}_{2c} \equiv \pi \int_0^1 \Phi^1_s(r, \mu)\, d\mu \int_{-1}^0 \sin\vartheta'\, \gamma^1(r, \mu, \mu')\, d\mu' = \pi \int_0^1 \gamma^-_2(r, \mu)\, \Phi^1_s(r, \mu)\, d\mu\,,$$

$$\Gamma^{\uparrow}_{2c} \equiv \pi \int_{-1}^0 \Phi^1_s(r, \mu)\, d\mu \int_0^1 \sin\vartheta'\, \gamma^1(r, \mu, \mu')\, d\mu' = \pi \int_{-1}^0 \gamma^+_2(r, \mu)\, \Phi^1_s(r, \mu)\, d\mu\,;$$

$$L^{\downarrow}_c(r) \equiv \sum_{m=1}^{\infty} v_{2m} \int_0^1 \Phi^1_c\, P^1_{2m}\, d\mu \,/ \int_0^1 \Phi^1_c \sin\vartheta\, d\mu\,,$$

$$L^{\uparrow}_c(r) \equiv \sum_{m=1}^{\infty} v_{2m} \int_{-1}^0 \Phi^1_c\, P^1_{2m}\, d\mu \,/ \int_{-1}^0 \Phi^1_c \sin\vartheta\, d\mu\,,$$

$$L^{\downarrow}_s(r) \equiv \sum_{m=1}^{\infty} v_{2m} \int_0^1 \Phi^1_s\, P^1_{2m}\, d\mu \,/ \int_0^1 \Phi^1_s \sin\vartheta\, d\mu\,,$$

$$L^{\uparrow}_s(r) \equiv \sum_{m=1}^{\infty} v_{2m} \int_{-1}^0 \Phi^1_s\, P^1_{2m}\, d\mu \,/ \int_{-1}^0 \Phi^1_s \sin\vartheta\, d\mu\,;$$

$$v_{2m} \equiv 2[(2\,m-1)!\,/\,(2\,m+1)!]\;\omega_{2m}(r)\;\beta^1_{2m}\,.$$

Уравнения для азимутальных гармоник

С помощью разложений Φ(4), (5) и γ(7) интеграл столкновений (2) представляется в виде ряда Фурье:

$$B(r, \mu, \varphi) = \frac{\sigma_s(r)}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{k} \frac{1+\delta_{m0}}{2\,k+1}\, \frac{(k+m)!}{(k-m)!}\, \gamma^m_k(r)\, [\Phi^m_{c\,k}(r)\, C^m_k(\mu, \varphi) + (1-\delta_{m0})\,(1-\delta_{k0})\, \Phi^m_{s\,k}(r)\, S^m_k(\mu, \varphi)] =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} B^m_c(r, \mu) \cos m\varphi + B^m_s(r, \mu) \sin m\varphi \tag{12}$$

с азимутальными гармониками

$$B^m_c(r, \mu) = \frac{\sigma_s(r)}{4}\, \delta_m \int_{-1}^{1} \Phi^m_c(r, \mu')\, \gamma^m(r, \mu, \mu')\, d\mu' = \frac{\sigma_s(r)}{2}\, \delta_m \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{2\,k+1}\, \frac{(k+m)!}{(k-m)!}\, \gamma^m_k(r)\, \Phi^m_{c\,k}(r)\, P^m_k(\mu)\,, \tag{13}$$

$$B^m_s(r, \mu) = (1-\delta_{m0})\, \delta_m\, \frac{\sigma_s(r)}{4} \int_{-1}^{1} \Phi^m_s(r, \mu')\, \gamma^m(r, \mu, \mu')\, d\mu' =$$

$$= (1-\delta_{m0})\,\frac{\sigma_s(r)}{2}\,\delta_m \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{2\,k+1}\,\frac{(k+m)!}{(k-m)!}\,\gamma_k^m(r)\,\Phi_{s\,k}^m(r)\,P_k^m(\mu)\,. \qquad (14)$$

Подставив разложения Φ(5), B(12) и F(10) в уравнение (1), с помощью формул преобразования произведения тригонометрических функций в сумму приходим к равенству (см. (27) в [9])

$$\mu\frac{\partial\Phi_c^0}{\partial z}+\sin\vartheta\left[\cos\varphi\,\frac{\partial\Phi_c^0}{\partial x}+\sin\varphi\,\frac{\partial\Phi_c^0}{\partial y}\right]+\sigma_t\,\Phi_c^0+\sum_{m=1}^{\infty}\cos m\varphi\left[\mu\,\frac{\partial\Phi_c^m}{\partial z}+\sigma_t\,\Phi_c^m\right]+\sum_{m=1}^{\infty}\sin m\varphi\left[\mu\,\frac{\partial\Phi_s^m}{\partial z}+\sigma_t\,\Phi_s^m\right]+$$

$$+\frac{\sin\vartheta}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\partial\Phi_c^m}{\partial x}\,[\cos(m-1)\,\varphi+\cos(m+1)\,\varphi]+\frac{\partial\Phi_c^m}{\partial y}\,[\sin(m+1)\,\varphi-\sin(m-1)\,\varphi]+$$

$$+\frac{\sin\vartheta}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\partial\Phi_s^m}{\partial x}\,[\sin(m-1)\,\varphi+\sin(m+1)\,\varphi]+\frac{\partial\Phi_s^m}{\partial y}\,[\cos(m-1)\,\varphi-\cos(m+1)\,\varphi]=$$

$$= B_c^0+\sum_{m=1}^{\infty}B_c^m\cos m\varphi+B_s^m\sin m\varphi+F_c^0+\sum_{m=1}^{\infty}F_c^m\cos m\varphi+F_s^m\sin m\varphi\,. \qquad (15)$$

Построение уравнений для азимутальных гармоник можно осуществить одним из двух эквивалентных способов: либо проинтегрировать уравнение (15) по азимуту $\varphi\in[0,\,2\pi]$ с весами $\cos m\varphi$ и $\sin m\varphi$, используя условия ортогональности тригонометрических функций, либо приравнять выражения при одинаковых тригонометрических функциях, содержащих азимут. В результате получим систему уравнений, которую можно записать в обобщенной форме [9]:

$$\mu\,\frac{\partial\Phi_c^m}{\partial z}+\sigma_t\,\Phi_c^m+\frac{\sin\vartheta}{2}\left[\frac{\partial\Phi_c^{m+1}}{\partial x}+(1-\delta_{m0})\,(1+\delta_{m1})\,\frac{\partial\Phi_c^{m-1}}{\partial x}+\frac{\partial\Phi_s^{m+1}}{\partial y}-(1-\delta_{m0})\,(1-\delta_{m1})\,\frac{\partial\Phi_s^{m-1}}{\partial y}\right]=B_c^m+F_c^m,$$

$$m\ge 0\,; \qquad (16)$$

$$\mu\,\frac{\partial\Phi_s^m}{\partial z}+\sigma_t\,\Phi_s^m+\frac{\sin\vartheta}{2}\left[\frac{\partial\Phi_s^{m+1}}{\partial x}+(1-\delta_{m1})\,\frac{\partial\Phi_s^{m-1}}{\partial x}-\frac{\partial\Phi_c^{m+1}}{\partial y}+(1+\delta_{m1})\,\frac{\partial\Phi_c^{m-1}}{\partial y}\right]=B_s^m+F_s^m\,,$$

$$m\ge 1\,. \qquad (17)$$

В отличие от одномерной плоской задачи [5] система уравнений (16) – (17) для азимутальных гармоник решения трехмерной задачи (1) не расщепляется.

Уравнения для сферических гармоник

Уравнения для сферических гармоник интенсивности излучения в трехмерном плоском слое можно построить двумя способами.

В первом способе в исходное уравнение (1) подставляются разложения Φ(4), B(12), F(10) по сферическим функциям. Полученное равенство (см. (37) в [9]) сначала умножаем на $C_j^i(\mu,\varphi)$, $0\le i\le j$ и интегрируем на сфере Ω. Затем то же равенство умножаем на $S_j^i(\mu,\,\varphi)$, $1\le i\le j$ и интегрируем на сфере Ω. Используя явные выражения интегралов со сферическими функциями (см. Приложение в [9]), находим систему уравнений для сферических гармоник [9]:

$$\delta_m\left\{(1-\delta_{j0})\,(1-\delta_{jm})\,a_j^m\,\frac{\partial\Phi_{c,j-1}^m}{\partial z}+b_j^m\,\frac{\partial\Phi_{c,j+1}^m}{\partial z}+\left[\sigma_t-\sigma_s\,h_j^m\,\gamma_j^m\right]\Phi_{cj}^m\right\}+$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\delta_m\left[c_j^m\,\frac{\partial\Phi_{c,j+1}^{m+1}}{\partial x}-(1-\delta_{j0})\,(1-\delta_{j1})\,(1-\delta_{jm})\,(1-\delta_{j,\,m+1})\,d_j^m\,\frac{\partial\Phi_{c,j-1}^{m+1}}{\partial x}\right]+\right.$$

$$+ (1-\delta_{m0})(1-\delta_{j0})(1+\delta_{m1})\left[g_{j-1}\frac{\partial \Phi^{m-1}_{c,j-1}}{\partial x} - g_{j+1}\frac{\partial \mathrm{F}^{m-1}_{c,j+1}}{\partial x}\right]\Bigg\} +$$

$$+\frac{1}{2}\Bigg\{\delta_m\left[c^m_j \frac{\partial \Phi^{m+1}_{s,j+1}}{\partial y} - (1-\delta_{j0})(1-\delta_{j1})(1-\delta_{jm})(1-\delta_{j,m+1})\, d^m_j \frac{\partial \Phi^{m+1}_{s,j-1}}{\partial y}\right] -$$

$$-(1-\delta_{m0})(1-\delta_{m1})(1-\delta_{j0})(1-\delta_{j1})\left[g_{j-1}\frac{\partial \Phi^{m-1}_{s,j-1}}{\partial y} - g_{j+1}\frac{\partial \Phi^{m-1}_{s,j+1}}{\partial y}\right]\Bigg\} = \delta_m F^m_{cj},$$

$$0 \le m \le j\,; \qquad (18)$$

$$(1-\delta_{j1})(1-\delta_{jm})\, a^m_j \frac{\partial \Phi^m_{s,j-1}}{\partial z} + b^m_j \frac{\partial \Phi^m_{s,j+1}}{\partial z} + \left[\sigma_t - \sigma_s h^m_j \gamma^m_j\right]\Phi^m_{sj} +$$

$$+\frac{1}{2}\Bigg\{ c^m_j \frac{\partial \Phi^{m+1}_{s,j+1}}{\partial x} - (1-\delta_{j1})(1-\delta_{jm})(1-\delta_{j,m+1})\, d^m_j \frac{\partial \Phi^{m+1}_{s,j-1}}{\partial x} +$$

$$+ (1-\delta_{m1})\left[(1-\delta_{j1})\, g_{j-1}\frac{\partial \Phi^{m-1}_{s,j-1}}{\partial x} - g_{j+1}\frac{\partial \Phi^{m-1}_{s,j+1}}{\partial x}\right]\Bigg\} +$$

$$+\frac{1}{2}\Bigg\{(1+\delta_{m1})\left[g_{j-1}\frac{\partial \Phi^{m-1}_{c,j-1}}{\partial y} - g_{j+1}\frac{\partial \Phi^{m-1}_{c,j+1}}{\partial y}\right] - c^m_j \frac{\partial \Phi^{m+1}_{c,j+1}}{\partial y} +$$

$$+ (1-\delta_{j1})(1-\delta_{jm})(1-\delta_{j,m+1})\, d^m_j \frac{\partial \Phi^{m+1}_{c,j-1}}{\partial y}\Bigg\} = F^m_{sj}, \quad 1 \le m \le j\,, \qquad (19)$$

где введены обозначения для коэффициентов:

$$a^m_j = \frac{j-m}{2j-1}\,,\ b^m_j = \frac{j+m+1}{2j+3}\,,\ g_j = \frac{1}{2j+1}\,,\ h^m_j = \frac{1+\mathrm{d}_{m0}}{2\,(2j+1)}\frac{(j+m)!}{(j-m)!}\,,$$

$$c^m_j = \frac{(j+m+1)\,(j+m+2)}{(2j+3)}\,;\ d^m_j = \frac{(j-m-1)\,(j-m)}{(2j-1)}\,.$$

Во втором способе в уравнения (16) – (17) для азимутальных гармоник интенсивности излучения подставляем разложения Φ^m_c, Φ^m_s(6), B^m_c(13), B^m_s(14), F^m_c, F^m_s(11) по присоединенным функциям Лежандра. С помощью рекуррентных соотношений (см. (45) – (47) [9]) освобождаемся от множителей μ и $\sin\vartheta$, одновременно приводя присоединенные функции Лежандра к одному верхнему индексу, равному m. Полученные равенства (см. (48), (49) [9]) интегрируем по μ на отрезке [–1, 1] с весом $P^m_j(\mu)$, используя свойства ортогональности присоединенных функций Лежандра с одинаковым верхним индексом, и в результате приходим к (18) – (19).

Система уравнений (18), (19) является системой уравнений для сферических гармоник решения задачи (1) наиболее общего вида. Из нее можно получить различные модификации, учитывающие азимутальную симметрию, неоднородность по одной или обеим горизонтальным координатам x, y, а также любые приближения низких порядков (например, P_1- или P_2-приближения).

Точные модели расчета плотности и потоков излучения

Сформулируем точные замкнутые математические модели [11], описывающие пространственные распределения плотности $n(r)$ и потоков $J(r)$, $G_x(r)$, $G_y(r)$ излучения в трехмерных плоских рассеивающих и поглощающих слоях, исходя из четырех точных уравнений системы (16) – (17) для азимутальных гармоник решения общей краевой задачи теории переноса (1).

Проинтегрируем по μ на интервале [–1,1] с весом, равным 1, уравнение (16) при $m = 0$:

$$\mu \frac{\partial \Phi_c^0}{\partial z} + \sigma_t \Phi_c^0 + \frac{\sin\vartheta}{2}\left[\frac{\partial \Phi_c^1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_s^1}{\partial y}\right] = B_c^0 + F_c^0 \tag{20}$$

и получим первое точное уравнение

$$\frac{\partial J}{\partial z} + (\sigma_t - \sigma_s \omega_0)\, n + \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} = 4\pi F_{c0}^0 . \tag{21}$$

То же уравнение (16) интегрируем по μ на интервале $[-1,1]$ с весом, равным μ, и находим второе точное уравнение

$$\frac{\partial [D n]}{\partial z} + \left[\sigma_t - \frac{\sigma_s \omega_1}{3}\right] J + \frac{\partial[\mu_x G_x]}{\partial x} + \frac{\partial[\mu_y G_y]}{\partial y} = \frac{4\pi}{3} F_{c1}^0 \tag{22}$$

с параметрами излучения $D(r)$, $\mu_x(r)$, $\mu_y(r)$. Уравнение (16) при $m = 1$

$$\mu \frac{\partial \Phi_c^1}{\partial z} + \sigma_t \Phi_c^1 + \sin\vartheta \left\{\frac{\partial \Phi_c^0}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \Phi_c^2}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_s^2}{\partial y}\right]\right\} = B_c^1 + F_c^1 \tag{23}$$

проинтегрируем по $\mu\in[-1, 1]$ с весом $\sin\vartheta$ и придем к третьему точному уравнению

$$\frac{\partial[\mu_x G_x]}{\partial z} + \left(\sigma_t - \frac{1}{3}\sigma_s \omega_1\right) G_x + \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial[(D_\perp + D_{\perp c2})\, n]}{\partial x} + \frac{\partial[D_{\perp s2}\, n]}{\partial y}\right\} = \frac{4\pi}{3} F_{c1}^1 \tag{24}$$

с параметрами излучения μ_x, $D_\perp$, $D_{\perp c2}$, $D_{\perp s2}$. Аналогичные действия предпринимаем с уравнением (17) при $m = 1$:

$$\mu \frac{\partial \Phi_s^1}{\partial z} + \sigma_t \Phi_s^1 + \sin\vartheta \left\{\frac{\partial \Phi_c^0}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \Phi_s^2}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_c^2}{\partial y}\right]\right\} = B_s^1 + F_s^1 \tag{25}$$

и получаем четвертое точное уравнение

$$\frac{\partial[\mu_y G_y]}{\partial z} + \left(\sigma_t - \frac{1}{3}\sigma_s \omega_1\right) G_y + \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial[D_{\perp s2}\, n]}{\partial x} + \frac{\partial[(D_\perp - D_{\perp c2})\, n]}{\partial y}\right\} = \frac{4\pi}{3} F_{s1}^1 \tag{26}$$

с параметрами излучения μ_y, $D_\perp$, $D_{\perp c2}$, $D_{\perp s2}$.

Если в уравнение (21) подставить выражения радиационных характеристик через сферические гармоники, то придем к точному уравнению (18) метода сферических гармоник с индексами $m = 0$, $j = 0$:

$$\frac{1}{3}\frac{\partial \Phi_{c1}^0}{\partial z} + \left(\sigma_t - \sigma_s \gamma_0^0\right) \Phi_{c0}^0 + \frac{1}{3}\frac{\partial \Phi_{c1}^1}{\partial x} + \frac{1}{3}\frac{\partial \Phi_{s1}^1}{\partial y} = F_c^0 .$$

Уравнение (22) с учетом представления коэффициента вертикальной диффузии D через сферические гармоники эквивалентно точному уравнению (18) с индексами $m = 0, j = 1$:

$$\tfrac{2}{5}\frac{\partial \Phi_{c2}^0}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_{c0}^0}{\partial z} + \left(\sigma_t - \frac{1}{3}\sigma_s \gamma_1^0\right) \Phi_{c1}^0 + \frac{3}{5}\frac{\partial \Phi_{c2}^1}{\partial x} + \frac{3}{5}\frac{\partial \Phi_{s2}^1}{\partial y} = F_{c1}^0 .$$

Если в (24) подставить представления радиационных характеристик μ_x, G_x, n, $D_\perp$, $D_{\perp\perp c2}$, $D_{\perp s2}$ через сферические гармоники, то придем к уравнению

$$\frac{3}{5}\frac{\partial \Phi_{c2}^1}{\partial z} + \left(\sigma_t - \frac{1}{3}\sigma_s \omega_1\right) \Phi_{c1}^1 + \frac{\partial \Phi_{c0}^0}{\partial x} - \frac{1}{5}\frac{\partial \Phi_{c2}^0}{\partial x} + \frac{6}{5}\frac{\partial \Phi_{c2}^2}{\partial x} + \frac{6}{5}\frac{\partial \mathrm{F}_{s2}^2}{\partial y} = F_{c1}^1 ,$$

которое совпадает с уравнением (18) метода сферических гармоник при $m = 1$, $j = 1$. Если в (26) подставить выражения радиационных характеристик μ_y, G_y, n, $D_\perp$, $D_{\perp c2}$, $D_{\perp s2}$ через сферические гармоники, то установим, что уравнение (26) эквивалентно уравнению (19) метода сферических гармоник при $m = 1, j = 1$:

$$\frac{3}{5}\frac{\partial \Phi_{s2}^{1}}{\partial z} + \left(\sigma_t - \frac{1}{3}\sigma_s\,\omega_1\right)\Phi_{s1}^{1} + \frac{\partial \Phi_{c0}^{0}}{\partial y} - \frac{1}{5}\frac{\partial \mathrm{F}_{c2}^{0}}{\partial y} + \frac{6}{5}\frac{\partial \Phi_{s2}^{2}}{\partial x} - \frac{6}{5}\frac{\partial \Phi_{c2}^{2}}{\partial y} = F_{s1}^{1}\,.$$

Система четырех уравнений (21), (22), (24), (26) с параметрами излучения μ_x, μ_y, D, $D_\perp$, $D_{\perp c2}$, $D_{\perp s2}$ является точной замкнутой математической моделью расчета плотности n и потоков J, G_x, G_y излучения в неоднородном плоском трехмерном слое, построенной строго методом сферических гармоник.

Между сферическими (интегральными по всем углам) радиационными характеристиками имеют место точные связи:

$$J = \bar{\mu}\,n\,, \quad G_x = c_x J = s_x n\,, \quad G_y = c_y J = s_y n\,, \tag{27}$$

содержащие радиационные параметры: $\bar{\mu}$, c_x, c_y – <средние косинусы> по осям z, x, y соответственно и s_x, s_y – <средние синусы> по осям x, y. С помощью соотношений (27) в системе уравнений (21), (22), (24), (26) можно менять набор искомых функций и нелинейных параметров задачи, учитывая требования конкретных прикладных проблем.

Из уравнения (21) вытекает представление плотности излучения через потоки ($\sigma_a \equiv \sigma_t - \sigma_s$):

$$n = -\frac{1}{\sigma_a}\left[\frac{\partial J}{\partial z} + \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} - 4\pi\,F_{c0}^{0}\right], \tag{28}$$

с помощью которого уравнения (22), (24), (26) сводятся к системе трех дифференциальных уравнений второго порядка со смешанными производными для определения потоков J, G_x, G_y:

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{D}{\sigma_a}\frac{\partial J}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{D}{\sigma_a}\frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{D}{\sigma_a}\frac{\partial G_y}{\partial y} - \frac{\partial[\mu_x G_x]}{\partial x} - \frac{\partial[\mu_y G_y]}{\partial y} - \left(\sigma_t - \frac{\sigma_s\,\omega_1}{3}\right)J = -4\pi\left[\frac{1}{3}F_{c1}^{0} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{D}{\sigma_a}F_{c0}^{0}\right]; \tag{29}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{D_\perp + D_{\perp c2}}{\mathrm{s}_a}\frac{\partial J}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{D_\perp + D_{\perp c2}}{\mathrm{s}_a}\frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{D_\perp + D_{\perp c2}}{\sigma_a}\frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{D_{\perp s2}}{\sigma_a}\frac{\partial J}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{D_{\perp s2}}{\sigma_a}\frac{\partial G_x}{\partial x} +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{D_{\perp s2}}{\sigma_a}\frac{\partial G_y}{\partial y} - \frac{\partial[\mu_x G_x]}{\partial z} - \left(\sigma_t - \frac{\sigma_s\,\omega_1}{3}\right)G_x = -4\pi\left[\frac{1}{3}F_{c1}^{1} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{D_\perp + D_{\perp c2}}{\sigma_a}F_{c0}^{0} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{D_{\perp s2}}{\sigma_a}F_{c0}^{0}\right]; \tag{30}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{D_{\perp s2}}{\sigma_a}\frac{\partial J}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{D_{\perp s2}}{\sigma_a}\frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{D_{\perp s2}}{\sigma_a}\frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{D_\perp - D_{\perp c2}}{\sigma_a}\frac{\partial J}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{D_\perp - D_{\perp c2}}{\sigma_a}\frac{\partial G_x}{\partial x} +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{D_\perp - D_{\perp c2}}{\sigma_a}\frac{\partial G_y}{\partial y} - \frac{\partial[\mu_y G_y]}{\partial z} - \left(\sigma_t - \frac{\sigma_s\,\omega_1}{3}\right)G_y = -4\pi\left[\frac{1}{3}F_{s1}^{1} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{D_{\perp s2}}{\sigma_a}F_{c0}^{0} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{D_\perp - D_{\perp c2}}{\sigma_a}F_{c0}^{0}\right]. \tag{31}$$

Система уравнений (29) – (31) типа диффузии – это точная нелинейная математическая модель расчета потоков излучения.

Точные модели расчета полусферических плотностей, вертикальных и горизонтальных потоков излучения

Построение моделей [11] базируется на трех точных уравнениях (20), (23), (25) для азимутальных гармоник интенсивности излучения, когда азимутальные гармоники интеграла столкновений (13), (14) и источника (11) представлены разложениями по присоединенным функциям Лежандра.

Обратим внимание на следующие обстоятельства. Во-первых, система уравнений (20), (23), (25) не является замкнутой, поскольку система уравнений (16) – (17) для азимутальных гармоник интенсивности излучения является бесконечной. Во-вторых, разложения интегральных по углам полусферических радиационных характеристик $n^{\downarrow}$, $n^{\uparrow}$, $J^{\downarrow}$, $J^{\uparrow}$, $G_x^{\downarrow}$, $G_x^{\uparrow}$,$G_y^{\downarrow}$, $G_y^{\uparrow}$ по присоединенным функциям Лежандра представляют собой суммы бесконечных рядов. В-третьих, плотности $n^{\downarrow}$, $n^{\uparrow}$ и вертикальные потоки $J^{\downarrow}$, $J^{\uparrow}$ полностью определяются через нулевую азимутальную гармонику Φ_c^0, горизонтальные потоки вдоль оси x $G_x^{\downarrow}$, $G_x^{\uparrow}$ – через первую азимутальную гармонику Φ_c^1, а горизонтальные потоки вдоль оси y $G_y^{\downarrow}$, $G_y^{\uparrow}$ – через азимутальную гармонику Φ_s^1. В-четвертых, радиационные характеристики связаны рядом точных и приближенных соотношений, которые позволяют формулировать разные расчетные модели. В-пятых, вопрос о замыкании системы точных уравнений для расчета перечисленных выше полусферических радиационных характеристик разрешается неоднозначно: приходится вводить нелинейные параметры, зависящие от интенсивности излучения. Предпочтительнее, чтобы эти параметры описывали процесс переноса излучения в среде и имели наглядную интерпретацию.

Проинтегрируем уравнение (29) по μ на отрезках [0,1] и [–1,0] с весом, равным 1. С помощью определений радиационных характеристик и параметров излучения через азимутальные гармоники вычислим явно интегралы и получим первую пару точных уравнений:

$$\frac{\partial J^{\downarrow}}{\partial z}+\left[\sigma_t-\sigma_s+\frac{\sigma_s}{2}\gamma_0^{\downarrow}\right]n^{\downarrow}-\frac{\sigma_s}{2}\gamma_0^{\uparrow}n^{\uparrow}+\frac{\partial G_x^{\downarrow}}{\partial x}+\frac{\partial G_y^{\downarrow}}{\partial y}=2\pi Q_0^{\downarrow}, \tag{32}$$

$$\frac{\partial J^{\downarrow}}{\partial z}+\left[\sigma_t-\sigma_s+\frac{\sigma_s}{2}\gamma_0^{\downarrow}\right]n^{\downarrow}-\frac{\sigma_s}{2}\gamma_0^{\downarrow}n^{\downarrow}+\frac{\partial G_x^{\uparrow}}{\partial x}+\frac{\partial G_y^{\uparrow}}{\partial y}=2\pi Q_0^{\uparrow} \tag{33}$$

с параметрами $\gamma_0^{\downarrow}$, $\gamma_0^{\uparrow}$ и источниками

$$Q_0^{\downarrow}\equiv\int_0^1 F_c^0(r,\mu)\,d\mu=F_{c0}^0+\frac{1}{2}F_{c1}^0+\sum_{m=1}^{\infty}t_{2m+1}^0F_{c,2m+1}^0,$$

$$Q_0^{\uparrow}\equiv\int_{-1}^0 F_c^0(r,\mu)\,d\mu=F_{c0}^0-\frac{1}{2}F_{c1}^0-\sum_{m=1}^{\infty}t_{2m+1}^0F_{c,2m+1}^0.$$

Проинтегрируем уравнение (20) по μ на отрезках [0, 1] и [–1, 0] с весом μ. После несложных преобразований найдем вторую пару точных уравнений:

$$\frac{\partial[D^{\downarrow}n^{\downarrow}]}{\partial z}+\left(\sigma_t-\frac{\sigma_s\omega_1}{3}\right)J^{\downarrow}+\frac{\sigma_s}{2}\gamma_1^{\downarrow}n^{\downarrow}-\frac{\sigma_s}{2}\gamma_1^{\uparrow}n^{\uparrow}+\frac{\partial[\mu_x^{\downarrow}G_x^{\downarrow}]}{\partial x}+\frac{\partial[\mu_y^{\uparrow}G_y^{\uparrow}]}{\partial y}=2\pi Q_1^{\uparrow}; \tag{34}$$

$$\frac{\partial[D^{\uparrow}n^{\uparrow}]}{\partial z}+\left(\sigma_t-\frac{\sigma_s\omega_1}{3}\right)J^{\uparrow}-\frac{\sigma_s}{2}\gamma_1^{\downarrow}n^{\downarrow}+\frac{\sigma_s}{2}\gamma_1^{\uparrow}n^{\uparrow}+\frac{\partial[\mu_x^{\uparrow}G_x^{\uparrow}]}{\partial x}+\frac{\partial[\mu_y^{\uparrow}G_y^{\uparrow}]}{\partial y}=2\pi Q_1^{\uparrow} \tag{35}$$

с параметрами и источниками

$$Q_1^{\downarrow}(r)\equiv\int_0^1\mu F_c^0(r,\mu)\,d\mu=\frac{1}{2}F_{c0}^0+\frac{1}{3}F_{c1}^0+\sum_{m=1}^{\infty}\beta_{2m}F_{c,2m}^0,$$

$$Q_1^{\uparrow}(r)\equiv\int_{-1}^0\mu F_c^0(r,\mu)\,d\mu=-\frac{1}{2}F_{c0}^0+\frac{1}{3}F_{c1}^0-\sum_{m=1}^{\infty}\beta_{2m}F_{c,2m}^0.$$

Проинтегрируем уравнение (23) по μ на отрезках [0, 1] и [–1, 0] с весом $\sin\vartheta$ и получим третью пару точных уравнений:

$$\frac{\partial[\mu_x^{\downarrow}\, G_x^{\downarrow}]}{\partial z} + \left\{\sigma_t - \frac{\sigma_s}{2}\left[\frac{4}{3}\,\omega_1 - \gamma_{2c}^{\downarrow}\right]\right\} G_x^{\downarrow} - \frac{\sigma_s}{2}\gamma_{2c}^{\uparrow}\, G_x^{\uparrow} + \frac{1}{2}\frac{\partial[(D_{\perp}^{\downarrow} + D_{\perp c2}^{\downarrow})\, n^{\ddot{I}}]}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial[D_{\perp s2}^{\downarrow}\, n^{\downarrow}]}{\partial y} = \pi\, Q_{2c}^{\downarrow}\,, \qquad (36)$$

$$\frac{\partial[\mu_x^{\uparrow}\, G_x^{\uparrow}]}{\partial z} + \left\{\sigma_t - \frac{\sigma_s}{2}\left[\frac{4}{3}\,\omega_1 - \gamma_{2c}^{\uparrow}\right]\right\} G_x^{\uparrow} - \frac{\sigma_s}{2}\gamma_{2c}^{\downarrow}\, G_x^{\downarrow} + \frac{1}{2}\frac{\partial[(D_{\perp}^{\uparrow} + D_{\perp c2}^{\uparrow})\, n^{-}]}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial[D_{\perp s2}^{\uparrow}\, n^{-}]}{\partial y} = \pi\, Q_{2c}^{\uparrow} \qquad (37)$$

с параметрами и источниками

$$Q_{2c}^{\downarrow}(r) \equiv \int_0^1 \sin\vartheta\, F_c^1(r,\,\mu)\, d\mu = \frac{2}{3}F_{c1}^1 + \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m} F_{c,\,2m}^1\,,$$

$$Q_{2c}^{\uparrow}(r) \equiv \int_{-1}^0 \sin\vartheta\, F_c^1(r,\,\mu)\, d\mu = \frac{2}{3}F_{c1}^1 - \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m} F_{c,\,2m}^1\,.$$

Проинтегрируем уравнение (25) по μ на отрезках [0, 1] и [–1, 0] с весом $\sin\vartheta$ и в результате несложных преобразований придем к четвертой паре точных уравнений:

$$\frac{\partial[\mu_y^{\downarrow}\, G_y^{\downarrow}]}{\partial z} + \left\{\sigma_t - \frac{\sigma_s}{2}\left[\frac{4}{3}\,\omega_1 - \gamma_{2s}^{\downarrow}\right]\right\} G_y^{\downarrow} - \frac{\sigma_s}{2}\gamma_{2s}^{\uparrow}\, G_y^{\uparrow} + \frac{1}{2}\frac{\partial[D_{\perp s2}^{\downarrow}\, n^{\downarrow}]}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial[(D_{\perp}^{\downarrow} - D_{\perp c2}^{\downarrow})\, n^{\downarrow}]}{\partial y} = \pi\, Q_{2s}^{\downarrow}\,; \qquad (38)$$

$$\frac{\partial[\mu_y^{\uparrow}\, G_y^{\uparrow}]}{\partial z} + \left\{\sigma_t - \frac{\sigma_s}{2}\left[\frac{4}{3}\,\omega_1 - \gamma_{2s}^{\uparrow}\right]\right\} G_y^{\uparrow} - \frac{\sigma_s}{2}\gamma_{2s}^{\downarrow}\, G_y^{\downarrow} + \frac{1}{2}\frac{\partial[D_{\perp s2}^{\uparrow}\, n^{\uparrow}]}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial[(D_{\perp}^{\uparrow} - D_{\perp c2}^{\uparrow})\, n^{\uparrow}]}{\partial y} = \pi\, Q_{2s}^{\uparrow} \qquad (39)$$

с параметрами и источниками

$$Q_{2s}^{\downarrow}(r) \equiv \int_0^1 \sin\vartheta\, F_s^1(r,\,\mu)\, d\mu = \frac{2}{3}F_{s1}^1 + \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m}^1 F_{s,\,2m}^1\,,$$

$$Q_{2s}^{\uparrow}(r) \equiv \int_{-1}^0 \sin\vartheta\, F_s^1(r,\,\mu)\, d\mu = \frac{2}{3}F_{s1}^1 - \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m}^1 F_{s,\,2m}^1\,.$$

С помощью точных соотношений между полусферическими радиационными характеристиками:

$$J^{\downarrow} = \mu^{\downarrow}\, n^{\downarrow}\,, \qquad J^{\uparrow} = \mu^{\uparrow}\, n^{\uparrow}\,;$$

$$G_x^{\downarrow} = c_x^{\downarrow}\, J^{\downarrow} = (\mu^{\downarrow}\, c_x^{\downarrow})\, n^{\downarrow} = s_x^{\downarrow}\, n^{\downarrow}\,; \qquad G_y^{\downarrow} = c_y^{\downarrow}\, J^{\downarrow} = (\mu^{\downarrow}\, c_y^{\downarrow})\, n^{\downarrow} = s_y^{\downarrow}\, n^{\downarrow}\,;$$

$$G_x^{\uparrow} = c_x^{\uparrow}\, J^{\uparrow} = (\mu^{\uparrow}\, c_x^{\uparrow})\, n^{\uparrow} = s_x^{\uparrow}\, n^{\uparrow}\,; \qquad G_y^{\uparrow} = c_y^{\uparrow}\, J^{\uparrow} = (\mu^{\uparrow}\, c_y^{\uparrow})\, n^{\uparrow} = s_y^{\uparrow}\, n^{\uparrow}$$

и точных выражений характеристик обратного рассеяния через моменты можно получать представления пар уравнений (32) – (33); (34) – (35); (36) – (37); (38) – (39) с разными наборами искомых функций и нелинейных коэффициентов – параметров математических моделей.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Для формулировки математических моделей расчета полусферических радиационных характеристик и параметров излучения, а также граничных условий получены явные выражения интегралов на отрезке [0, 1] от произведения присоединенных функций Лежандра.

Если $n \neq k$ и при этом k – нечетное, n – четное, т.е. $k + n$ или $|k - n|$ – нечетные, то

$$a_{nk}^m \equiv \int_0^1 P_n^m(\mu)\, P_k^m(\mu)\, d\mu = (-1)^{\frac{n+k+1}{2}} \frac{(k+m)!\,(n+m)!}{2^{n+k-1}\,(n-k)\,(n+k+1)\, b_{nk}^m}\,, \qquad (\Pi)$$

$$b^m_{nk}=\begin{cases}\left[\left(\frac{n}{2}\right)!\left(\frac{k-1}{2}\right)!\right]^2, & \text{если } m=0\,;\\ \left(\frac{n+m}{2}\right)!\left(\frac{n-m}{2}\right)!\left(\frac{k+m-1}{2}\right)!\left(\frac{k-m-1}{2}\right)!, & \text{если } m - \text{четное}\,;\\ \left(\frac{k+m}{2}\right)!\left(\frac{k-m}{2}\right)!\left(\frac{n+m-1}{2}\right)!\left(\frac{n-m-1}{2}\right)!, & \text{если } m - \text{нечетное}\,.\end{cases}$$

Если $n \neq k$, но k, n– четные или k, n – оба нечетные, т. е. $k + n$ или $|k - n|$ – четные, то

$$\int_0^1 P^m_n(\mu)\, P^m_k(\mu)\, d\mu = 0\,.$$

Если $n = k$, то формулой (П) пользоваться нельзя, следует брать

$$a^m_{nn} = \int_0^1 [P^m_n(\mu)]^2\, d\mu = \frac{1}{2\,n+1}\,\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\,, \quad m \geq 1\,;$$

$$a^0_{nn} = \int_0^1 [P_n(\mu)]^2\, d\mu = \frac{1}{2\,n+1}\,, \quad \text{если } m = 0\,.$$

Если $m = 0$, $n = 0$, k – нечетное, то

$$a^0_{0k} = \int_0^1 P_k(\mu)\, d\mu = \frac{(-1)^{\frac{k+3}{2}}\,(k-1)!}{2^{k-1}\,(k+1)\left[\left(\frac{k-1}{2}\right)!\right]^2}\,;$$

при k четном

$$\int_0^1 P_k(\mu)\, d\mu = 0\,.$$

При $m = 0$ можно получить другое выражение для интеграла

$$a^0_{2n,\,2k+1} = \int_0^1 P_{2n}(\mu)\, P_{2k+1}(\mu) d\mu = \frac{(-1)^{n+k+1}\,(2\,k+1)!!\,(2\,n-1)!!}{2^{n+k+1}\,(2\,n-2\,k-1)\,(n+k+1)\,n!\,k!}\,,$$

если воспользоваться равенствами

$$(2\,n)! = 2^n\,(2\,n-1)!!\,n!\,,\ \ (2\,k+1)! = 2^k\,(2\,k+1)!!\,k!\,.$$

Запишем обобщенное выражение для явного значения интеграла

$$\int_0^1 P^m_1(\mu)\, P^m_r(\mu)\, d\mu = \delta_{1r}\, a^m_{11} + \delta_{1,\,2n}\, \delta_{r,\,2k+1}\, a^m_{2n,\,2k+1} + \delta_{r,\,2n}\, \delta_{1,\,2k+1}\, a^m_{2n,\,2k+1}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-05-08542).

1. Сушкевич Т. А., Стрелков С. А., Иолтуховский А. А. Метод характеристик в задачах атмосферной оптики. М.: Наука, 1990. 296 с.
2. Ленобль Ж. Перенос радиации в рассеивающих и поглощающих атмосферах. Л.: Гидрометеоиздат, 1990. 263 с.
3. Кейз К., Цвайфель П. Линейная теория переноса. М.: Мир, 1972. 384 с.
4. Зеге Э. П., Иванов А. П., Кацев И. Л. Перенос изображения в рассеивающей среде. Минск: Наука и техника, 1985. 327 с.

5. Сушкевич Т.А., Максакова С.В., Игнатьева Е.И. Обобщенная модель расчета плотности и потоков солнечного излучения. М., 1993. 32 с. (Препринт / ИПМ РАН, N 9).
6. Сушкевич Т.А., Максакова С.В., Игнатьева Е.И. Линейные и нелинейные модели расчета плотности и потоков солнечного излучения. М., 1993. 32 с. (Препринт / ИПМ РАН, N 23).
7. Сушкевич Т.А., Максакова С.В., Игнатьева Е.И. О граничных условиях в моделях расчета плотности и потоков солнечного излучения. М., 1993. 32 с. (Препринт / ИПМ РАН, N 31).
8. Сушкевич Т.А., Игнатьева Е.И., Максакова С.В. // Оптика атмосферы и океана. 1994. Т. 7. N 6. С. 56 – 73.
9. Сушкевич Т.А., Игнатьева Е.И., Максакова С.В. Математические модели азимутальных и сферических гармоник решения краевых задач теории переноса для трехмерных плоских слоев. М., 1994. 32 с. (Препринт / ИПМ РАН, N 43).
10. Сушкевич Т.А., Игнатьева Е.И., Максакова С.В. Представления радиационных характеристик и параметров излучения в природных средах через азимутальные и сферические гармоники. М., 1994. 32 с. (Препринт / ИПМ РАН, N 58).
11. Сушкевич Т.А., Игнатьева Е.И., Максакова С.В. Точные и приближенные линейные и нелинейные модели расчета плотности и потоков излучения в трехмерном плоском слое. М., 1994. 32 с. (Препринт / ИПМ РАН, N 59).

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН,
Москва

Поступила в редакцию
6 октября 1994 г.

T.A. Sushkevich, E.I. Ignatijeva, S.V. Maksakova. **The Spherical Harmonics Method: Exact Three-Dimensional Models to Compute the Optical Irradiances Densities and Fluxes in Natural Media.**

The exact mathematical models for computing the optical irradiance spherical and semi-spherical densities and fluxes in natural media were stated for the investigation of the spectrum-energy characteristics of the Earth radiation field. The radiation transfer in the three-dimensional slab with the horizontal-inhomogeneous and uniform source functions and reflecting boundaries was considered. The models were constructed by the spherical harmonics method. The physically meaningful radiation parameters were added to enclose the mathematical models.