«Оптика атмосферы и океана», **19**, № 5 (2006)

АППАРАТУРА И МЕТОДЫ ОПТИЧЕСКОЙ ДИАГНОСТИ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ

УДК 551.551.8

А.И. Бородулин, Б.М. Десятков

Исследование простейших решений полуэмпирического уравнения турбулентной диффузии, замкнутых с привлечением методов замыкания второго порядка

НИИ аэробиологии ГНЦ ВБ «Вектор», пос. Кольцово Новосибирской обл.

Поступила в редакцию 27.11.2005 г.

С использованием метода замыкания второго порядка получен ряд точных решений одномерного уравнения турбулентной диффузии. Произведено сравнение полученных результатов с решениями полуэмпирического уравнения, замкнутыми с привлечением простейшей градиентной гипотезы. Осуществлен анализ полученных результатов.

Полуэмпирическое уравнение турбулентной диффузии широко используется для описания процесса распространения атмосферных примесей [1]:

$$\frac{\partial \overline{C}}{\partial t} + \overline{U}_i \frac{\partial \overline{C}}{\partial x_i} + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} = \overline{Q}, \qquad (1)$$

где $\overline{C}$ – математическое ожидание концентрации примеси; $\overline{U}_i$ – математическое ожидание i-й компоненты скорости ветра; q_i является i-й компонентой турбулентного потока примеси; $\overline{Q}$ – член, описывающий источники примеси. Черта сверху обозначает процедуру усреднения по статистическому ансамблю, а повторяющиеся индексы – суммирование.

Уравнение (1) демонстрирует общее свойство всех усредненных уравнений механики турбулентной среды – оно не является замкнутым, поскольку в него входят неизвестные величины q_i. По аналогии с процессом броуновской диффузии замыкание уравнения (1) обычно производят с привлечением полуэмпирической градиентной гипотезы

$$q_i = -K_{ij} \frac{\partial \overline{C}}{\partial x_j}. \qquad (2)$$

Таким образом, вместо трех неизвестных компонент турбулентного потока в общем случае необходимо знать шесть неизвестных величин K_{ij}, которые принято называть коэффициентами турбулентной диффузии. Задание этих величин представляет собой далеко не легкую задачу. Спектр этих проблем, например, рассматривается в [1, 2]. Известны попытки строгого обоснования градиентной гипотезы (2) (см. [3]). В [4] с использованием рекурсивного метода [3] экспериментально обоснован подход, позволяющий производить оценку коэффициентов турбулентной диффузии, и обоснована их пропорциональность соответствующим компонентам тензора вязких напряжений Рейнольдса. Однако при практическом использовании полуэмпирического уравнения объективное задание коэффициентов турбулентной диффузии, вероятно, является самым уязвимым местом полуэмпирического подхода.

Методы замыкания второго порядка связаны с решением уравнений для потоков примеси [5, 6]. Эти уравнения также не являются замкнутыми и содержат ряд неизвестных величин, которые исключают из полученных уравнений с помощью простейших гипотез, основанных на анализе размерности, на тензорной структуре выражений и других физических соображениях. Замкнутые таким образом уравнения содержат константы, значения которых можно оценить экспериментально.

В работе с привлечением метода замыкания второго порядка получен ряд точных решений одномерного уравнения турбулентной диффузии, обсуждаются полученные результаты.

Уравнения для турбулентных потоков q_i выводятся из уравнения неразрывности среды путем умножения его членов на неусредненные значения компонент скорости ветра U_i [6] и последующего усреднения по статистическому ансамблю. После проведения выкладок с использованием уравнения Навье–Стокса получаем:

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} + \overline{U}_j \frac{\partial q_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{\hat{U}_i \hat{U}_j \hat{C}} + \frac{\delta_{ij}}{\rho}\overline{\hat{p}\hat{C}}) + \overline{\hat{U}_i \hat{U}_j} \frac{\partial \overline{C}}{\partial x_j} +$$

$$+ q_j \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho}\overline{\hat{p}\frac{\partial \hat{C}}{\partial x_i}} - \nu\,\overline{\hat{C}\Delta\hat{U}_i} = 0, \qquad (3)$$

где $\hat{U}_i$, $\hat{C}$ и $\hat{p}$ – пульсации компонент скорости ветра, концентрации и давления соответственно; ρ – плотность воздуха; ν – его кинематическая вязкость; δ_{ij} – символ Кронекера; Δ – оператор Лапласа.

Первый член в (3) описывает изменение турбулентного потока во времени. Второй является адвективным, а третий – диффузионным. Следующие два — члены генерации потока усредненными характеристиками. Предпоследний член описывает генерацию потока корреляциями пульсаций давления с градиентами пульсаций концентрации. И последний член отражает наличие вязкой диссипации. В данном уравнении замыканию подлежат третий, предпоследний и последний члены.

Обычно замыкание (3) производят следующим образом. Тензорная величина $\nu\overline{\hat{C}\Delta\hat{U}_i}$ имеет нечетное число индексов, поэтому при зеркальном отражении она должна менять свой знак на противоположный. Предположение о локальной изотропности турбулентности должно приводить к неизменности этого тензора при зеркальном отражении. Следовательно, член, отвечающий за вязкую диссипацию, в предположении о локальной изотропности турбулентности равен нулю.

Для аппроксимации диффузионного члена обычно применяют градиентное выражение вида [6]:

$$-C_1\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{b^2}{\varepsilon}\left(\overline{\hat{U}_k\hat{U}_j}\frac{\partial q_i}{\partial x_k}+\overline{\hat{U}_k\hat{U}_i}\frac{\partial q_j}{\partial x_k}\right),$$

где b^2 и ε — кинетическая энергия турбулентности и скорость ее диссипации соответственно. Их отношение представляет собой некоторый масштаб скорости. Константа C_1 оценивается значением порядка 0,11 [6].

И наконец, для оставшегося незамкнутого члена используется аппроксимация [6]:

$$C_2 q_j\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j}-C_3\frac{\varepsilon}{b^2}q_i.$$

По данным разных авторов [5, 6], значения эмпирических констант $C_2 = 0{,}33 \div 0{,}5$ и $C_3 = 3{,}0 \div 3{,}2$.

Таким образом, уравнения для компонент турбулентного потока примеси принимают вид

$$\frac{\partial q_i}{\partial t}+\overline{U}_j\frac{\partial q_i}{\partial x_j}-C_1\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{b^2}{\varepsilon}\left(\overline{\hat{U}_k\hat{U}_j}\frac{\partial q_i}{\partial x_k}+\overline{\hat{U}_k\hat{U}_i}\frac{\partial q_j}{\partial x_k}\right)+$$
$$+(1-C_2)q_j\frac{\partial\overline{U}_i}{\partial x_j}+C_3\frac{\varepsilon}{b^2}q_i-\overline{\hat{U}_i\hat{U}_j}\frac{\partial\overline{C}}{\partial x_j}=0. \qquad (4)$$

Известно, что в замыкающих выражениях более корректно вместо отношения b^2 и ε использовать временной масштаб в виде отношения дисперсии пульсаций концентрации σ_c^2 к скорости ее диссипации ε_c [6]. Если ввести отношение двух указанных масштабов $R = \varepsilon\sigma_c^2(b^2\varepsilon_c)^{-1}$, то в (4) C_1 необходимо поделить на R, а C_3 умножить на это же значение.

При аппроксимации диффузионного члена в уравнении для дисперсии пульсаций концентрации примеси получается следующее выражение для коэффициентов турбулентной диффузии [6]:

$$K_{ij}=C_4\frac{b^2}{\varepsilon}\overline{\hat{U}_i\hat{U}_j}. \qquad (5)$$

Полагая временной масштаб малым и пренебрегая в (4) членами второго порядка малости, получим соотношение (5) с коэффициентом пропорциональности $C_4 = R/C_3$. По некоторым литературным данным $C_4 = 0{,}13$ [6]. Отсюда следует оценка $R \approx 0{,}4$. Таким образом, замыкание полуэмпирического уравнения турбулентной диффузии с помощью (2) и системы уравнений (4) дает практически одинаковые результаты при малых значениях характерного временного масштаба пульсаций концентрации (скорости). В то же время условием применимости полуэмпирического уравнения является требование, чтобы времена распространения примеси были много больше рассматривавшихся временных масштабов [4].

Перейдем к рассмотрению следующих простейших одномерных случаев диффузии. Пользуясь масштабами времени, длины, концентрации и потока:

$$t_0=\frac{b^2}{\varepsilon};\quad x_0=\overline{U}t_0;\quad C_0;\quad q_0=\overline{U}C_0,$$

получим систему уравнений

$$\begin{gathered}\frac{\partial\overline{C}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\overline{C}+q_x)=0;\\ \frac{\partial q_x}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(I^2\overline{C}+q_x)-2C_1I^2\frac{\partial^2 q_x}{\partial x^2}+C_3q_x=0,\end{gathered} \qquad (6)$$

где для обезразмеренных величин сохранены прежние обозначения, а $I = \sigma_u/\overline{U}$ — интенсивность турбулентности (σ_u — стандартное отклонение пульсаций скорости ветра).

В случае стационарного точечного источника примеси система (6) не имеет членов с производными по времени. Расположим источник примеси в точке с координатами $x = 0$. Член источника зададим в виде $\overline{Q} = Q_0\delta(x)$, где $Q_0 = \text{const}$. Объединяя уравнения (6), получим

$$2C_1I^2\frac{\partial^2 q_x}{\partial x^2}-\left(1-I^2\right)\frac{\partial q_x}{\partial x}-C_3q_x=I^2Q_0\delta(x). \qquad (7)$$

В (7) последний член описывает процесс «распада» потока примеси и поэтому для q_x возможна постановка нулевых граничных условий на бесконечности: $\overline{C}(\pm\infty) = q_x(\pm\infty) = 0$. Решение задачи (7) можно получить, используя непрерывность потока примеси в точке $x = 0$ (см. [7]):

$$\begin{gathered}q_x=-\frac{Q_0}{\left[(1-I^2)^2+8C_1C_3I^2\right]^{1/2}}\begin{cases}\exp(-\alpha_1x), & x>0\\ \exp(+\alpha_2x), & x<0\end{cases};\\ \alpha_{1,2}=\left[\left(\frac{1-I^2}{4C_1I^2}\right)^2+\frac{C_3}{2C_1I^2}\right]^{1/2}\mp\frac{1-I^2}{4C_1I^2}.\end{gathered} \qquad (8)$$

Из уравнения (7) также следует, что $\overline{C}(x) = -q_x(x)$. Решение полуэмпирического уравнения (1), замкнутого с помощью градиентной гипотезы (2), имеет вид [7]:

$$\overline{C}(x)=Q_0\begin{cases}1, & x>0\\ \exp(C_3I^{-2}x), & x<0\end{cases}. \qquad (9)$$

Заметим, что в полуэмпирическом уравнении (1) распад примеси отсутствует и поэтому концентрация примеси при $x > 0$, как видно из (9), равна константе.

Таким образом, решения для стационарного источника примеси, полученные с помощью рассматривавшихся методов замыкания, имеют принципиальные отличия при $x > 0$. При $x < 0$ и $C_1C_3 < 1/2$ решение системы уравнений (6) убывает быстрее, чем решение полуэмпирического уравнения, замкнутого с помощью градиентной гипотезы (2).

В случае мгновенного точечного источника удобно сделать замену переменных $z = x - t$ и $\tau = t$. Для получения решения отбросим в (6) диффузионный член, имеющий третий порядок малости относительно упомянутых выше временных масштабов. В результате получается система

$$\frac{\partial \overline{C}}{\partial \tau} + \frac{\partial q_x}{\partial z} = 0,$$
$$\frac{\partial q_x}{\partial \tau} + C_3 q_x + I^2 \frac{\partial \overline{C}}{\partial z} = 0. \tag{10}$$

Заданному источнику соответствует следующая система начальных и граничных условий:

$$\overline{C}(\pm\infty, \tau) = q_x(\pm\infty, \tau) = 0,$$
$$\overline{C}(z = 0) = \delta(z);\;\; q_x(z, 0) = 0.$$

Решение задачи может быть получено методом преобразования Лапласа по времени. Для этого продифференцируем второе уравнение по z и подставим в полученное выражение первое уравнение системы (10). Тогда

$$\frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial \tau^2} + C_3 \frac{\partial \overline{C}}{\partial \tau} - I^2 \frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial z^2} = 0. \tag{11}$$

С учетом равенства, которое вытекает из первого уравнения системы и начальных условий $\left.\frac{\partial \overline{C}}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = -\left.\frac{\partial q_x}{\partial z}\right|_{\tau=0} = 0$, получаем

$$\overline{C}(z,\tau) = \exp\left(-\frac{C_3\tau}{2}\right)\left\{\frac{1}{2}\delta(z + I\tau) + \frac{1}{2}\delta(z - I\tau) + \right.$$
$$\left. + \frac{C_3}{4I}\left[I_0\left(\frac{C_3}{2}M\right) + \frac{\tau}{M} I_1\left(\frac{C_3}{M}\right)\right]\right\};\;\; M = \left(\tau^2 - \frac{z^2}{I^2}\right)^{1/2};$$
$$q_x(z,\tau) = \exp\left(-\frac{C_3\tau}{2}\right)\left[\frac{1}{2}\delta(z + I\tau) - \frac{1}{2}\delta(z - I\tau) + \right.$$
$$\left. + \frac{C_3}{4I}\frac{z}{M} I_1\left(\frac{C_3}{2}M\right)\right];\;\; I^2\tau^2 - z^2 > 0, \tag{12}$$

где I_0 и I_1 — функции Бесселя мнимого аргумента.

Найденные решения являются решениями телеграфного уравнения, полученного Мониным [1], и в отличие от полуэмпирического уравнения, замкнутого с помощью (2), описывает распространение примеси с конечной скоростью. То есть облако примеси, испущенное источником, имеет четко выраженные границы, двигающиеся в преобразованной системе координат со скоростью $\pm I$. Знак плюс относится к правой границе облака, а минус — к левой. Введенная Мониным при выводе телеграфного уравнения частота изменений направления движения частиц примеси составляет $a = C_3/2$, а их средняя абсолютная скорость $W = I$ (см. [1]). Решение уравнения (1), замкнутого с помощью (2), хорошо известно и в данном случае имеет вид [1]:

$$\overline{C}(z,\tau) = \left(\frac{C_3}{4\pi I^2 \tau}\right)^{-1/2} \exp\left(-\frac{C_3 z^2}{4 I^2 \tau}\right). \tag{13}$$

Поток примеси в соответствии с (2) будет равен

$$q_x(z,\tau) = \frac{z}{2\tau}\overline{C}(z,\tau).$$

Подробное сравнение решений (12) и (13) для различных значений a и W проводится в [1].

Представляет интерес анализ формального решения одномерного уравнения для потока примеси. Для этого рассмотрим систему уравнений (6) с начальными и граничными условиями, поставленными для системы (10). Исключив адвективные члены заменой переменных $z = x - t$ и $\tau = t$, после замены $q_x = q\exp(-C_3\tau)$ получим уравнение

$$\frac{\partial q}{\partial \tau} - 2C_1 I^2 \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} + I^2 \frac{\partial^2 \overline{C}(z,\tau)}{\partial z} \exp(C_3\tau) = 0. \tag{14}$$

Решение (14) можно выписать через функцию Грина [8]:

$$q(z,\tau) =$$
$$= -I^2 \int_0^{\tau}\int_{-\infty}^{+\infty} G(z-\xi; \tau-\tau_0)\exp\left[C_3(\tau-\tau_0)\right]\frac{\partial \overline{C}(\xi,\tau_0)}{\partial \xi} d\xi\, d\tau_0;$$
$$G(z-\xi;\tau-\tau_0) =$$
$$= \left[8\pi C_1 I(\tau-\tau_0)\right]^{-1/2}\exp\left[-\frac{(z-\xi)^2}{8C_1 I(\tau-\tau_0)}\right]. \tag{15}$$

Анализ выражения (15) показывает, что турбулентный поток примеси в точке z в момент времени τ определяется значениями концентрации примеси, взятыми во всех точках оси координат во все предыдущие моменты времени. То есть при замыкании с помощью методов второго порядка поток примеси, в отличие от выражения (2), уже не является локально определенной величиной. Такая нелокальность будет проявляться при малых временах распространения или при больших значениях рассматривавшегося выше временного масштаба.

Функция Грина с экспоненциальным множителем в (15) является импульсной характеристикой некоторого пространственно-временного фильтра, обеспечивающего преобразование математического ожидания концентрации примеси в ее турбулентный поток. Аналогичное по виду выражение, но с помощью других подходов, было получено Волощуком [9]. Ряд работ, посвященных нелокальности турбулентных потоков примеси, опубликован в [10]. Однако уровень развития нелокальных методов замыкания еще далек от практического использования.

Таким образом, рассмотрение простейших решений полуэмпирического уравнения турбулентной диффузии (1) с привлечением методов замыкания второго порядка показывает, что такой подход обеспечивает физически более содержательное описание процесса распространения атмосферных примесей по сравнению с традиционными методами замыкания, основанными на градиентной гипотезе (2).

Методы замыкания второго порядка при временах распространения, много больше характерных временных масштабов, дают практически одинаковые результаты по сравнению с решениями, полученными с помощью градиентной гипотезы (2).

Наличие в уравнениях для турбулентных потоков члена диффузионного вида приводит в общем случае к нелокальной зависимости турбулентных потоков от концентрации. Такая нелокальность пренебрежимо мала при ограничениях, упомянутых в предыдущем абзаце. Преобразование математического ожидания в значения турбулентных потоков осуществляется в результате пространственно-временной фильтрации. На это указывает интеграл типа свертки в (15).

Решение полуэмпирического уравнения (1) с замыканием с помощью градиентной гипотезы (2) обладает тем свойством, что через сколь угодно малый момент времени после срабатывания источника на сколь угодно большом расстоянии от него будут наблюдаться весьма малые, но конечные значения концентрации примеси. Это противоречит очевидному факту, что скорость движения частиц примеси не может быть бесконечной. Поэтому полученное решение с конечной скоростью движения границ облака примеси также имеет практическое значение.

Следовательно, изучение фундаментальных основ и применение методов замыкания второго порядка является актуальной и практически важной задачей, особенно в связи с предполагаемой нелокальностью процесса турбулентного обмена и с развитием подходов описания турбулентной диффузии с конечной скоростью распространения.

1. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. М.: Наука, 1965. Ч. 1. 720 с.
2. *Пененко В.В., Алоян А.Е.* Модели и методы для задач охраны окружающей среды. Новосибирск: Наука, 1985. 256 с.
3. *Галкин Л.М., Корнейчук А.И.* Прямой метод вычисления компонент тензора коэффициентов турбулентной диффузии // Динамика эколого-экономических систем. Новосибирск: Наука, 1982. С. 18–31.
4. *Бородулин А.И., Майстренко Г.А., Чалдин Б.М.* Статистическое описание процесса турбулентной диффузии аэрозолей в атмосфере. Метод и приложения. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1992. 124 с.
5. *Теверовский Е.Н., Дмитриев Е.С.* Перенос аэрозольных частиц турбулентными потоками. М.: Энергоатомиздат, 1988. 160 с.
6. *Роди В.* Модели турбулентности окружающей среды // Методы расчета турбулентных течений. М.: Мир, 1984. С. 227–321.
7. *Марчук Г.И.* Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982. 320 с.
8. *Тихонов А.М., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.
9. *Волощук В.М.* К вопросу о нелокальной параметризации турбулентных потоков // Метеорол. и гидрол. 1980. № 7. С. 11–19.
10. *Новицкий М.А.* Уравнения для моментов концентрации при нелокальной параметризации турбулентных потоков // Тр. ИЭМ. 1984. Вып. 29(103). С. 50–65.

A.I. Borodulin, B.M. Desyatkov. **A study of the simplest solutions of the semiempirical turbulent diffusion equation closed using the second order closure methods.**

A number of exact solutions of the one-dimensional turbulent diffusion equation have been obtained using the second order closure method. Obtained results have been compared with the semiempirical equation solutions closed with the help of the simplest gradient hypothesis. Analysis of obtained results has been performed.