

В.К. Аргучинцев

НЕГИДРОСТАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕЗО- И МИКРОКЛИМАТА

Иркутский государственный университет

Поступила в редакцию 3.03.99 г.

Принята к печати 15.03.99 г.

Предлагается негидростатическая модель с учетом сжимаемости воздуха и воды. Численный алгоритм решения задачи строится на основе метода расщепления по физическим процессам и геометрическим переменным. Модель может быть использована для изучения и прогноза мезо- и микроклиматических условий при наличии антропогенных воздействий.

В качестве основы математического моделирования мезо- и микроклимата примем уравнения геофизической гидродинамики, выражающие основные законы сохранения энергии, импульса и массы стратифицированных сплошных сред.

Предлагается негидростатическая модель с учетом сжимаемости воздуха и воды, которая является более универсальной с точки зрения описания процессов с характерными горизонтальными масштабами менее 100 км. Общая идеология заключается в едином теоретическом подходе к изучению атмосферы и гидросферы.

В систему дифференциальных уравнений нестационарной трехмерной нелинейной модели включаются:

уравнение движения –

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \mathbf{g} + D\mathbf{v}, \tag{1}$$

уравнение неразрывности –

$$\frac{dt}{dt} + \rho \text{div } \mathbf{w} = 0, \tag{2}$$

уравнение притока тепла –

$$\frac{dT}{dt} - \frac{\alpha T}{c_p \rho} \frac{dp}{dt} = DT + M_T, \tag{3}$$

уравнение переноса влаги (солености) –

$$\frac{dq}{dt} = Dq + M_q, \tag{4}$$

уравнение состояния, записанное в общем виде, –

$$\rho = \rho(p, T, q), \tag{5}$$

где

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z};$$

$$D\psi = \frac{\partial}{\partial x} k_{x\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k_{y\psi} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} k_{z\psi} \frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

Здесь ψ – любая из функций рассматриваемой задачи; t – время; u, v – горизонтальные и w – вертикальная компоненты вектора \mathbf{v} скорости движения среды вдоль осей декартовой прямоугольной системы координат (x, y, z) , x, y – горизонтальные координаты, а ось z направлена вертикально вверх; ρ – плотность среды; p – давление; T – температура; $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости вращения Земли, направленный параллельно оси Земли к Северному полюсу; $k_{x\psi}, k_{y\psi}, k_{z\psi}$ – коэффициенты турбулентного обмена по горизонтали и вертикали, предполагаемые известными функциями координат и времени; \mathbf{g} – сила тяжести; c_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении; $\alpha = -\rho^{-1} \partial \rho / \partial T$ – коэффициент термического расширения; q – массовая доля водяного пара для воздуха, а для воды – солёность; M_T – скорость изменения количества тепла за счет лучистого теплообмена и фазовых переходов (высвобождение скрытой теплоты); M_q – интенсивность источников или стоков субстанции.

Уравнение (5) для воздуха может быть записано в виде

$$p = R\rho T, \tag{6}$$

где R – газовая постоянная сухого воздуха. Для воды используется эмпирическое уравнение состояния, связывающее плотность, температуру, давление и солёность.

Распространение тепла в почве опишем уравнением теплопроводности, учитывающим многослойность почвы с различными теплофизическими свойствами:

$$\frac{\partial T^*}{\partial t} = \frac{1}{c\rho^*} \frac{\partial}{\partial z} \lambda \frac{\partial T^*}{\partial z}, \tag{7}$$

где $T^*, \rho^*, \lambda, c^*$ – соответственно температура, плотность, коэффициент теплопроводности и удельная теплоемкость почвы.

Преобразуя уравнения (2)–(3) с помощью уравнения состояния, получим эволюционные уравнения для T и p . Для описания мезопроцессов в атмосфере эти уравнения будут иметь вид

$$\frac{dT}{dt} = (1 - \kappa) T \text{div } \mathbf{v} + \kappa DT + \kappa M_T, \tag{8}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \text{div}(p\mathbf{v}) = (1 - \kappa) p \text{div } \mathbf{v} + R\kappa\rho DT + R\kappa\rho M_T, \tag{9}$$

где $\kappa = c_p/c_v$, c_v – удельная теплоемкость при постоянном объеме. Для воды эти уравнения имеют более сложный вид. В дальнейшем рассматривается система уравнений (1), (4), (6)–(9).

Краевые условия по горизонтали задаются в виде потоков количества движения (импульса), тепла, влаги и массы. На верхней и нижней границах ставятся условия первого рода.

Из-за отсутствия необходимой информации о гидрометеорологических полях начальные условия заменяются значениями фоновых (крупномасштабных) величин или находятся из решения соответствующих стационарных задач.

В соответствии с предлагаемым методом решения, используя уравнение неразрывности (2), уравнения (1), (4), (8), (9) приведем к симметризованной форме:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + BU = -\frac{1}{\pi} \frac{\partial p}{\partial x} + 2(\omega_z V - \omega_y W) + DU; \quad (10)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + BV = -\frac{1}{\pi} \frac{\partial p}{\partial y} + 2(\omega_x W - \omega_z U) + DV; \quad (11)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + BW = -\frac{1}{\pi} \frac{\partial p}{\partial z} - \pi g + 2(\omega_y U - \omega_x V) + DW; \quad (12)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + BT = (1,5 - \kappa) T \operatorname{div} \mathbf{v} + \kappa DT + \kappa M_T; \quad (13)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + Bp = (0,5 - \kappa) p \operatorname{div} \mathbf{v} + R_{\kappa p} DT + R_{\kappa p} M_T; \quad (14)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + Bq = 0,5 q \operatorname{div} \mathbf{v} + Dq + M_q, \quad (15)$$

где

$$B\psi = \frac{1}{2} [\mathbf{v} \operatorname{grad} \psi + \operatorname{div} (\psi \mathbf{v})];$$

$$\pi = \sqrt{g}; \quad U = \pi u; \quad V = \pi v; \quad W = \pi w.$$

Уравнения модели интегрируются в декартовой прямоугольной системе координат с применением метода фиктивных областей. Введение таких областей позволяет проводить расчеты с произвольной функцией, описывающей рельеф суши и дна водоемов.

Сложность решения рассматриваемой системы уравнений обусловлена наличием физических процессов с различными характерными временными масштабами. Поэтому численный алгоритм решения задачи (6), (10)–(15) строится на основе метода расщепления по физическим процессам [1].

Решение задачи на каждом временном шаге осуществляется в три основных этапа: 1) перенос субстанций вдоль траекторий и турбулентный обмен; 2) процесс согласования гидрометеорологических полей; 3) расчет радиационных и фазовых притоков тепла. Такой подход позволяет в принципе использовать разные шаги по времени на каждом этапе.

На первом этапе для каждой искомой функции рассматривается эволюционное уравнение вида

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + L\psi = 0,$$

$$\text{где } L = \sum_{m=1}^3 L_m.$$

Редукция сложных задач к более простым возможна в тех случаях, когда исходный положительно полуопределенный оператор задачи представим в виде суммы положительно полуопределенных простейших операторов.

Аппроксимация по времени строится на основе метода покомпонентного расщепления по геометрическим переменным [1], который состоит в разложении сеточного оператора $L^h \geq 0$ на более простые операторы $L_m^h \geq 0$. Операторы $L_m^h \geq 0$ аппроксимируем со вторым порядком точности по координатам.

Введем неравномерную сетку с основными узловыми точками $x_i = i\Delta x$ ($i = 0, 1, \dots, I+1$); $y_j = j\Delta y$ ($j = 0, 1, \dots, J+1$); $z_k = k\Delta z_k$ ($k = 0, 1, \dots, K+1$); $t_n = n\Delta t$ ($n = 0, 1, \dots$) и шагами сетки Δx , Δy , Δz_k , Δt .

Будем также использовать вспомогательные точки $x_{i+1/2}$, $y_{j+1/2}$, $z_{k+1/2}$, расположенные в серединах основных интервалов. Обозначим:

$$\Psi_{i,j,k}^n = \Psi(x_i, y_j, z_k, t_n); \quad \Delta_k = (\Delta z_{k+1} + \Delta z_k)/2;$$

$$u_{i+1/2,j,k} = (u_{i+1,j,k} + u_{i,j,k})/2;$$

$$v_{i,j+1/2,k} = (v_{i,j+1,k} + v_{i,j,k})/2;$$

$$w_{i,j,k+1/2} = (w_{i,j,k+1} + w_{i,j,k})/2 \quad (k = 1, 2, \dots, K).$$

Приведем разностные аналоги операторов:

$$(L_1^h \Psi)_{i,j,k} = \frac{u_{i+1/2,j,k} \Psi_{i+1,j,k} - u_{i-1/2,j,k} \Psi_{i-1,j,k}}{2\Delta x} -$$

$$-\frac{1}{\Delta x^2} [k_{x_{i+1/2,j,k}} (\Psi_{i+1,j,k} - \Psi_{i,j,k}) - k_{x_{i-1/2,j,k}} (\Psi_{i,j,k} - \Psi_{i-1,j,k})],$$

$$(L_2^h \Psi)_{i,j,k} = \frac{v_{i,j+1/2,k} \Psi_{i,j+1,k} - v_{i,j-1/2,k} \Psi_{i,j-1,k}}{2\Delta y} -$$

$$-\frac{1}{\Delta y^2} [k_{y_{i,j+1/2,k}} (\Psi_{i,j+1,k} - \Psi_{i,j,k}) - k_{y_{i,j-1/2,k}} (\Psi_{i,j,k} - \Psi_{i,j-1,k})],$$

$$(L_3^h \Psi)_{i,j,k} = \frac{w_{i,j,k+1/2}^n \Psi_{i,j,k+1} - w_{i,j,k-1/2}^n \Psi_{i,j,k-1}}{2\Delta_k} - k_{z_{i,j,k+1/2}} \frac{\Psi_{i,j,k+1} - \Psi_{i,j,k}}{\Delta z_{k+1} \Delta_k} +$$

$$+ k_{z_{i,j,k-1/2}} \frac{\Psi_{i,j,k} - \Psi_{i,j,k-1}}{\Delta z_k \Delta_k}.$$

Используя на каждом дробном шаге $[t_n, t_{n+1}]$ схему Кранка–Николсона, получаем алгоритм расщепления

$$\frac{\Psi^{n+m/3} - \Psi^{n+(m-1)/3}}{\Delta t} + L_m^h \frac{\Psi^{n+m/3} + \Psi^{n+(m-1)/3}}{2} = 0, \quad m = 1, 2, 3.$$

Для повышения точности расчетов используется двуциклическая перестановка этапов расщепления.

На втором этапе система уравнений имеет следующий вид:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{1}{\pi} \frac{\partial p}{\partial x} + 2(\omega_z V - \omega_y W),$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{1}{\pi} \frac{\partial p}{\partial y} + 2(\omega_x W - \omega_z U),$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{1}{\Pi} \frac{\partial p}{\partial z} - pg + 2(\omega_y U - \omega_x V),$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = (1,5 - \kappa) T \operatorname{div} \mathbf{v},$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = (0,5 - \kappa) p \operatorname{div} \mathbf{v},$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = 0,5 q \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

Заметим, что если на этом этапе использовать явные разностные схемы, то условие устойчивости накладывает существенное ограничение на шаг по времени ($\Delta t = 0,1$ с при шаге по вертикали 30 м в пограничном слое атмосферы). Поэтому для фильтрации звуковых волн воспользуемся неявной разностной аппроксимацией первого порядка точности по времени – схемой «естественного фильтра»:

$$\frac{U_{i,j,k}^{n+2} - U_{i,j,k}^{n+1}}{\Delta t} = -\frac{p_{i+1/2,j,k}^{n+2} - p_{i-1/2,j,k}^{n+2}}{\Pi_{i,j,k}^n \Delta x} + 2(\omega_z V_{i,j,k}^{n+2} - \omega_y W_{i,j,k}^{n+2}); \quad (16)$$

$$\frac{V_{i,j,k}^{n+2} - V_{i,j,k}^{n+1}}{\Delta t} = -\frac{p_{i,j,k+1/2}^{n+2} - p_{i,j,k-1/2}^{n+2}}{\Pi_{i,j,k}^n \Delta y} + 2(\omega_x W_{i,j,k}^{n+2} - \omega_z U_{i,j,k}^{n+2}); \quad (17)$$

$$\frac{W_{i,j,k}^{n+2} - W_{i,j,k}^{n+1}}{\Delta t} = -\frac{p_{i,j,k+1/2}^{n+2} - p_{i,j,k-1/2}^{n+2}}{\Pi_{i,j,k}^n \Delta k} - \frac{g}{R} \frac{p_{i,j,k}^{n+2}}{\Pi_{i,j,k}^n T_{i,j,k}^n} + 2(\omega_y U_{i,j,k}^{n+2} - \omega_x V_{i,j,k}^{n+2}); \quad (18)$$

$$(p_{i,j,k}^{n+2} - p_{i,j,k}^{n+1})/\Delta t = (0,5 - \kappa) p_{i,j,k}^n d_{i,j,k}^{n+2}, \quad (19)$$

$$(T_{i,j,k}^{n+2} - T_{i,j,k}^{n+1})/\Delta t = (1,5 - \kappa) T_{i,j,k}^n d_{i,j,k}^{n+2},$$

$$(q_{i,j,k}^{n+2} - q_{i,j,k}^{n+1})/\Delta t = 0,5 q_{i,j,k}^n d_{i,j,k}^{n+2},$$

где

$$d_{i,j,k}^{n+2} = \frac{U_{i+1/2,j,k}^{n+2}/\Pi_{i+1/2,j,k}^n - U_{i-1/2,j,k}^{n+2}/\Pi_{i-1/2,j,k}^n}{\Delta x} + \frac{V_{i,j,k+1/2}^{n+2}/\Pi_{i,j,k+1/2}^n - V_{i,j,k-1/2}^{n+2}/\Pi_{i,j,k-1/2}^n}{\Delta y} + \frac{W_{i,j,k+1/2}^{n+2}/\Pi_{i,j,k+1/2}^n - W_{i,j,k-1/2}^{n+2}/\Pi_{i,j,k-1/2}^n}{\Delta k}.$$

Подставляя компоненты скорости из (16)–(18) в (19), получаем уравнение для давления, которое решаем методом покомпонентного расщепления по координатам. После решения уравнения для давления рассчитываются U , V , W , T и q . При реализации алгоритма используется немонотонная прогонка [2].

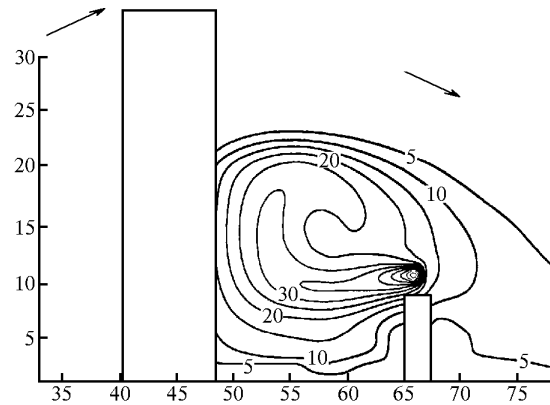
Построенные конечно-разностные схемы абсолютно устойчивы, имеют первый порядок аппроксимации по времени и второй – по координатам.

V.K. Arguchintsev. Nongidrostatic Model Meso- and Microclimate.

Nongidrostatic model is offered accounting for air and water compression. The numerical algorithm of the task decision is constructed on the basis of the method of splitting over physical processes and geometrical variable. The model can be used for study both forecast meso- and microclimatic conditions in the presence of anthropogenous influences.

Найденные на основе гидротермодинамической модели скорости движения и турбулентные характеристики используются для расчета переноса газовых и аэрозольных примесей [3].

Для иллюстрации возможностей модели приведем результаты численного моделирования влияния структуры воздушного потока на распространение загрязнения в районе городской застройки. Расчеты проводились при следующих значениях параметров: шаги по вертикали и горизонтали 2 м; шаг по времени выбирался с учетом выполнения критерия Куранта для наибольшей скорости невозмущенного потока – 10 м/с. На рисунке приводятся изолинии концентрации примеси в процентах по отношению к наибольшей концентрации в точке выброса над невысоким зданием. Если источник расположен в зоне разрежения, то примесь попадает в подветренную область за высоким зданием и распространяется в направлении, противоположном невозмущенному потоку. Уменьшение концентрации примеси возможно лишь при существенном увеличении высоты трубы, что практически неосуществимо.



Влияние структуры воздушного потока на распространение примеси в районе городской застройки.

Подобные результаты получены при моделировании распространения загрязнения на подветренном склоне, когда факел примеси задерживается подветренным вихрем или прижимается к земле нисходящим потоком при расположении источника выброса ниже вихревой зоны.

Предлагаемая модель может быть использована для изучения и прогноза мезо- и микроклиматических условий при наличии антропогенных воздействий.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект N 98-05-64021 и гранта Минобразования РФ, № 97-0-13.3-12.

1. Марчук Г.И. Численное решение задач динамики атмосферы и океана. Л.: Гидрометеоздат, 1974. 303 с.
2. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 592 с.
3. Аргучинцев В.К. Численное моделирование распространения аэрозолей в пограничном слое атмосферы // Оптика атмосферы и океана. 1994. Т. 7. N 8. С. 1106–1111.