<Оптика атмосферы и океана>, **6**, N 5 (1993)

УДК 535.36

А.Г. Боровой

МЕТОД МНОГОКРАТНЫХ ОТРАЖЕНИЙ В ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ. КРИТИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Показано, что метод многократных отображений фактически является модификацией двухпотокового приближения. Рассмотрена точность метода. Указано на проблематичность использования метода для практических применений.

В 1978 г. Б.А. Савельев опубликовал метод решения уравнения переноса излучения, названный им методом многократных отражений [1]. К настоящему времени им вместе с соавторами опубликовано по этому вопросу еще свыше десятка работ (см. [2-4] и цитируемую там литературу), где в основном метод используется для расчета различных задач. Ниже излагается критический разбор этого метода.

Идея метода

Теория переноса излучения в настоящее время представляет собой фактически один из разделов математической физики, занимающийся решением уравнения переноса излучения. Физический смысл уравнения переноса излучения чрезвычайно прост: это уравнение баланса числа частиц излучения, которые мы для краткости будем называть фотонами, в элементарном объеме. В наиболее простом виде уравнение имеет вид

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}l} = -\alpha I + \int \beta(\mathbf{n}' \to \mathbf{n})\, I(\mathbf{r}, \mathbf{n}')\, \mathrm{d}\mathbf{n}' . \qquad (1)$$

Оно означает, что лучевая интенсивность $I(\mathbf{r}, \mathbf{n})$, т.е. плотность фотонов в точке $\mathbf{r}$ с направлением скорости $\mathbf{n}$ ($|\mathbf{n}| = 1$), убывает вдоль луча $l = \mathbf{r} + \xi\mathbf{n}$ ($\xi > 0$) за счет столкновений с рассеивателями по экспоненциальному закону с коэффициентом экстинкции α. Коэффициенты уравнения обычно берутся в виде

$$\alpha = c\,\sigma , \; \beta(\mathbf{n}' \to \mathbf{n}) = c\,\sigma_\rho\,\rho(\mathbf{n}' \to \mathbf{n}) , \qquad (2)$$

где c - счетная концентрация рассеивателей; σ и σ_ρ – сечения экстинкции и рассеяния на одном рассеивателе; $\rho(\mathbf{n}' \to \mathbf{n})$ – плотность вероятностей для фотона с направлением скорости $\mathbf{n}'$ после столкновения получившего направление $\mathbf{n}$, функция $\rho(\mathbf{n}' \to \mathbf{n})$ называется индикатрисой рассеяния. Последнее слагаемое в уравнении (1) означает, что кроме выбивания фотонов рассеивателями существует и частично компенсирующий это выбивание процесс – образование фотонов, летящих вдоль луча l, за счет рассеяния из других направлений $\mathbf{n}'$.

Теперь допустим, что по каким-то причинам фотоны могут двигаться только вдоль одного направления, например, вдоль оси x в прямом или обратном направлениях. Тогда лучевая интенсивность из функции в пространстве пяти переменных $\mathbf{r}$, $\mathbf{n}$ выродится в две функции: $I_1(x)$ – плотность фотонов, летящих в направлении оси x, и $I_2(x)$ – в противоположном направлении. Уравнение баланса числа частиц (1) вырождается в систему двух уравнений

$$\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}x} = -\alpha' I_1 + \beta' I_2 , \qquad (3)$$

$$\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}(-x)} = -\alpha' I_2 + \beta' I_1 ,$$

где коэффициенты α' и β' являются числами

$$\beta' = c\,\sigma_\rho\,\rho'(\mathbf{n}_0 \to -\mathbf{n}_0)\,,\ \alpha' = \beta' + c\,\sigma_п\,, \tag{4}$$

$\mathbf{n}_0$ – единичный вектор вдоль оси x; $\rho'(\mathbf{n}_0 \to -\mathbf{n}_0) + \rho'(\mathbf{n}_0 \to \mathbf{n}_0) = 1$; $\sigma_п$ – сечение поглощения.

Систему уравнений (3) называют одномерным уравнением переноса излучения. По сравнению с общим уравнением (1) в пространстве пяти переменных, проблема решения которого составляет целый раздел математической физики, одномерное уравнение переноса обладает огромным преимуществом: оно решается элементарно. Но поставим вопрос: существуют ли в природе физические объекты, которые описывались бы одномерным уравнением переноса?

Казалось бы, таким объектом может быть стопа плоскопараллельных пластин, которая преобразует перпендикулярно падающий на нее свет в фотоны, летящие вдоль оси x или в противоположном направлении. Но эта задача может быть решена более строго, на уровне уравнений Максвелла. Как оказалось, интерференция между рассеянными волнами играет и этой задаче существенную роль. Показано, что даже если взять слоистую случайно-неоднородную среду, где можно было бы надеяться, что из-за хаотичности фазы отраженных волн интерференция не будет существенной, и где можно будет пользоваться модельными представлениями об излучении как о совокупности частиц (фотонов), уравнение для интенсивности не совпадает с одномерным уравнением переноса излучения (см., например, [5]).

Вторым физическим объектом могла бы быть стопа шероховатых пластинок или подобная ей рассеивающая среда, состоящая из большого числа малых частиц, например облака. Известно, что здесь интерференция между рассеянными волнами несущественна. В этом случае уравнения Максвелла приводят для интенсивности к уравнению переноса излучения, но уже к его общему виду (1) в пространстве пяти переменных, так как здесь каждый рассеиватель образует фотоны, летящие по всем направлениям.

В задачах с плоской симметрией, например, для однородного слоя при нормальном падении на него излучения, для потоков фотонов

$$I_1' = \int\limits_{\mathbf{nn}_0>0} I(\mathbf{r}, \mathbf{n})(\mathbf{nn}_0)d\mathbf{n}\,,\ I_2' = \int\limits_{\mathbf{nn}_0>0} I(\mathbf{r}, \mathbf{n}(\mathbf{nn}_0)d\mathbf{n} \tag{5}$$

из приближенного интегрирования уравнения (1) можно получить систему двух уравнений, фактически совпадающую с системой (3), где коэффициенты α' и β', разумеется, уже не определяются выражениями (4). Эта система уравнений называется двухпотоковым приближением (см., например, [6, 7]).

Хотя двухпотоковое приближение было использовано для практических оценок еще создателями уравнения переноса излучения (1) сто лет назад, до сих пор оно не получило сколь-нибудь серьезного распространения. Обычно ссылаются на его использование в лакокрасочной промышленности при оценке параметров частиц, образующих краски.

Центральной проблемой двухпотокового приближения является не решение системы уравнений (3), которое элементарно, а определение коэффициентов α' и β' через параметры рассеивающей среды [6, 7]

Рассмотрим еще один физический объект, который мог бы претендовать на роль объекта, описываемого одномерным уравнением переноса. Этот объект – тонкий длинный брусок или цилиндр, состоящий из светорассеивающих частиц, в торец которого падает излучение. В идеале – это одномерная цепочка рассеивателей, нанизанных, например, на ось x. Выходящее с торцов такого цилиндра в направлении оси x излучение будет результатом многократного рассеяния, где каждый акт рассеяния соответствует значениям коэффициентов (4). Но нетрудно показать, что одномерное уравнение (3) здесь не применимо, так как интенсивность рассеянного на каждом рассеивателе излучения будет убывать вдоль оси x как x^{-2}, тогда как система уравнений (3) не описывает такого убывания.

Таким образом, одномерное уравнение переноса излучения (3) имеет физический смысл только как двухпотоковое приближение общего уравнения (1).

Перейдем теперь к идее метода многократных отражений, опираясь на физические представления, изложенные выше.

Авторы [2] претендуют на создание «общего эвристического подхода» и «полуаналитического» метода расчета потоков излучения в рассеивающих средах произвольной формы. Но реально мы имеем алгоритм расчета для рассеивающей среды в форме параллелепипеда, на одну из граней которого перпендикулярно падает плоскопараллельный поток излучения. В депонированной работе [1] опубликован алгоритм расчета для параллелепипеда с произвольным соотношением ребер, а в [4] – частный случай, где поперечные по отношению к падающему потоку ребра равны между собой.

Метод многократных отражений, а точнее, предложенный автором алгоритм, позволяет рассчитать, в принципе, семь чисел: отношение числа фотонов, покидающих рассеивающую среду через каждую из шести граней, к общему числу фотонов, входящих в рассеивающую среду, а также долю поглощенных фотонов, если при акте рассеяния возможно поглощение. В частном случае параллелепипеда с квадратным сечением $L_y = L_z$ и без поглощения в среде метод дает три числа: доли фотонов, вылетающих через заднюю грань I_1; «отраженных» от передней грани I_2 и вылетающих через боковые грани I_3. Эти три числа подчиняются очевидному соотношению

$$I_1 + I_2 + I_3 = 1 . \tag{6}$$

При обосновании своего метода авторы фактически предполагают, что внутри рассеивающей среды величины $I_1(x)$ и $I_2(x)$, имеющие смысл потоков излучения (5) вдоль оси x и в противоположном направлении, описываются двухпотоковым приближением, т.е. системой уравнений (3). Тогда при заданных коэффициентах α', β' и длине параллелепипеда L_x для выходящих из передней I_2 и задней граней I_1 потоков справедливы элементарные формулы решения системы уравнений (3). Нет необходимости воспроизводить здесь эти формулы.

Ясно, что утечка фотонов через боковые грани параллелепипеда эквивалентна некоторому «эффективному» поглощению в среде относительно фотонов, летящих в направлении оси x. Поэтому коэффициенты α' и β' должны существенно зависеть от поперечных размеров параллелепипеда L_y и от формы индикатрисы рассеяния $\rho(\mathbf{n}' \to \mathbf{n})$.

Из нестрогих и неясно изложенных соображений, когда среда мысленно разбивается на систему пластинок и стержней, и для них обсуждаются некоторые соотношения баланса числа частиц, автор [1] приходит к выводу, что коэффициенты α' и β' также находятся из решения уравнений двухпотокового приближения (3), где параметрами являются уже поперечные размеры параллелепипеда L_y и новые коэффициенты α'' и β'', определяемые как некоторые интегралы от индикатрисы рассеяния $\rho(\mathbf{n}' \to \mathbf{n})$. Вся совокупность формул, выражающая коэффициенты α', β', α'' и β'' через поперечные размеры параллелепипеда L_y и индикатрису рассеяния вместе со стандартными формулами решения уравнений двухпотокового приближения (3), и составляет алгоритм метода многократных отражений.

Заметим, что авторы метода часто для получения решений уравнения (3) прибегают к итерационному разложению, имеющему физический смысл многократного отражения фотонов от слоев рассеивающей среды. Этим фактом и объясняется название метода. Но такие решения, разумеется, легко получить и стандартными методами при соответствующих граничных условиях или при соответствующих источниках излучения, расположенных внутри рассеивающей среды, так как система уравнений (3) с точки зрения математики – это тривиальная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Таким образом, метод многократных отражений - это не что иное, как недостаточно обоснованная, с нашей точки зрения, модификация двухпотокового приближения, предложенная авторами для рассеивающей среды в форме параллелепипеда и при нормальном падении на него излучения.

2. Точность метода

Создается впечатление, что авторы метода стремятся применить свои расчеты как можно к большему числу практических задач, мало заботясь об обоснованности метода, оценке его точности и о границах его применимости. Если вопрос о точности и поднимается иногда в их статьях, то обычно демонстрируется очень хорошее согласие с результатами, полученными более строгими методами.

Чтобы частично восполнить этот пробел, мы провели расчеты по алгоритму, изложенному в [4], и сравнили результаты расчетов с данными, полученными методом Монте-Карло (МК) в работе Дэвиса [8]. Заметим, что авторы метода многократных отражений (МО) также часто ссылаются на эту работу и сравнивают результаты его расчетов со своими.

Таблица 1

τ_x		τ_y									
		0,1		1		10		100		500	
		МК	МО	МК	МО	МК	МО	МК	МО	МК	МО
0,1	I_1	92	92	–	–	–	–	–	–	–	–
	I_2	2	2	–	–	–	–	–	–	–	–
	I_3	6	6	–	–	–	–	–	–	–	–
1	I_1	38	44	45	47	62	60	65	66	67	67
	I_2	2	9	13	11	30	26	34	32	33	33
	I_3	60	47	42	42	8	14	1	2	0	0
10	I_1	–	–	0	0	2	2	12	12	13	16
	I_2	–	–	13	14	50	43	81	74	85	81
	I_3	–	–	87	86	48	55	7	14	2	3
100	I_1	–	–	0	0	0	0	1	0	1	0
	I_2	–	–	13	14	50	43	88	77	95	89
	I_3	–	–	87	86	50	57	11	23	4	11
200	I_1	–	–	0	0	0	0	1	0	1	0
	I_2	–	–	13	14	50	43	88	77		89
	I_3	–	–	87	86	50	57	11	23	4	11

Расчеты по формулам метода многократных отражений [4] проведены нами для простейшего случая изотропного рассеяния в среде без поглощения. Вместо геометрических параметров параллелепипеда L_x и $L_y = L_z$ использованы, как обычно, более удобные параметры: продольная τ_X (в направлении падения излучения) и поперечная τ_Y оптические толщи:

$$\tau_x = \alpha L_x, \ \tau_y = \alpha L_y.$$

Величины I_1, I_2, I_3, полученные по формулам метода многократных отражений при различных размерах параллелепипеда, представлены в табл. 1 правыми столбцами (МО). Здесь числа I_1, I_2, I_3, имеющие смысл доли от общего числа фотонов, приведены для наглядности в процентах. Перед занесением в таблицу вычисленные по формулам [4] величины I_1, I_2 и I_3 округлялись с точностью до 1% при соблюдении условия нормировки (6).

Расчеты Дэвиса по методу Монте-Карло этих же величин I_1, I_2 и I_3 представлены им в [8] в виде номограмм. В левых столбцах табл. 1 (МК) мы приводим числа, восстановленные из этих номограмм также с точностью до 1%. В таблице не заполнены те клетки, где было невозможно с достаточной точностью восстановить из номограмм все 3 числа.

Данные Дэвиса можно рассматривать как точные по сравнению с методом многократных отражений. Чтобы визуализировать точность метода многократных отражений, мы вынесли в табл. 2 относительные ошибки метода, которые вычислялись по формуле

$$\eta_i = \frac{|I'_i - I_i|}{I'_i} 100\%,$$

где I'_i – данные метода Монте-Карло и I_i – данные метода многократных отражений.

Из сравнения табл. 1 и 2 можно сделать следующий вывод. Формулы метода многократных отражений дают в среднем точность около 10%, когда числа I_i достаточно велики. Для малых значений потоков I_i, метод многократных отражений дает величины, отличающиеся от точных значений в два-три раза.

Таблица 2

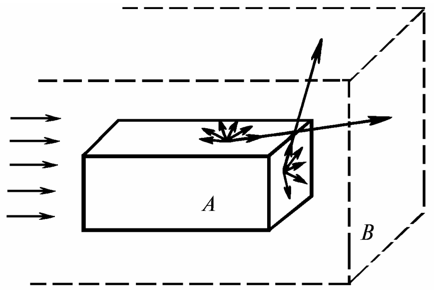
τ_x		τ_y				
		0,1	1	10	100	500
0,1	η_1	0	–	–	–	–
	η_2	0	–	–	–	–
	η_3	0	–	–	–	–
1	η_1	16	4	3	2	0
	η_2	350	15	13	6	0
	η_3	22	0	75	100	0
10	η_1	–	0	0	0	23
	η_2	–	8	14	9	5
	η_3	–	1	15	100	50
100	η_1	–	0	0	100	100
	η_2	–	8	14	12	6
	η_3	–	1	14	109	175
200	η_1	–	0	0	100	100
	η_2	–	1	14	12	6
	η_3	–	1	14	109	175

3. Возможности практического использования

Немаловажным является вопрос о возможностях практического использования метода многократных отражений. На первый взгляд, главным препятствием к практическому использованию метода является форма рассеивающей среды – параллелепипед. Вряд ли возможно построить аналогичный и вместе с тем достаточно простой алгоритм для рассеивающих сред с другой формой.

Существует, однако, и другое, значительно более серьезное препятствие для практического использования метода, а именно: три числа I_1, I_2, и I_3, полученные этим методом, *не имеют никакого практического значения!*

Для доказательства этого утверждения обратимся к рисунку. Рассеивающая среда изображена в виде параллелепипеда *A*. Поставим вопрос: каким измеряемым величинам соответствуют три числа I_1, I_2, и I_3? Поскольку величины I_i – потоки излучения, то измерить их можно детектором, перекрывающим вплотную к рассеивающей среде какую-либо грань. Если размер детектора меньше размеров параллелепипеда, то тот же результат можно получить и сканированием по грани параллелепипеда *A*.



Теперь мысленно охватим параллелепипед *A* значительно большим параллелепипедом *B* и проведем такие же измерения по граням параллелепипеда *B*. Фотоны, покидающие поверхность рассеивающей среды (параллелепипеда *A*), могут вылетать с любой точки поверхности

A в любом направлении. Из рисунка видно, что потоки фотонов через грани параллелепипеда B уже не будут совпадать с прежними числами I_i. Ясно, что метод многократных отражений не может дать никаких оценок для этих новых чисел I_i'', которые будут зависеть от расстояния до рассеивающей среды и от размеров параллелепипеда B.

Трудно придумать ситуацию, где требовались бы измерения потоков вплотную к рассеивающей среде, а не на некотором от нее расстоянии. Например, расчеты многократного рассеяния излучения в рассеивающих средах в форме параллелепипедов методом Монте-Карло выполнялись для оценки пропускания солнечной радиации кучевыми облаками [8, 9]. Причем в |9] рассмотрено также облучение каждого облака соседними облаками. Числа I_i метода многократных отражений неприменимы для таких оценок, так как здесь требуется, как минимум, учитывать расстояние между облаками.

Что же касается отдельного облака, то здесь представляют практический интерес потоки фотонов через плоскости x = const перед рассеивающей средой и после нее. Эти константы, которые можно назвать коэффициентами пропускания k_1, и отражения k_2 удовлетворяют соотношению

$$k_1 + k_2 = 1.$$

Потоки I_i, получаемые методом многократных отражений, имеют весьма косвенное отношение к этим коэффициентам. Возьмем, например, куб рассеивающей среды с оптической толщей $\tau_x = \tau_y = 1$. Согласно табл. 1 42% фотонов покидают этот куб через боковые грани. Метод многократных отражений оставляет полный произвол в распределении 42 % фотонов между коэффициентами пропускания k_1 и отражения k_2.

Таким образом, возможности практического использования метода многократных отражений являются весьма проблематичными.

1. С а в е л ь е в Б . А . Метод многократных отражений и решении задач переноса светового излучения в средах с равномерно распределенными источниками. Перенос светового излучения в трехмерной среде. М., 1978. 52 с. Деп. в ВИНИТИ. N547–78.
2. Г о р я ч е в Б. В . , К а б а н о в М . В . , С а в е л ь е в Б . А . // Оптика атмосферы. 1990. Т. 3. N. 2. С. 142–150.
3. Г о р я ч е в Б. В . , К а б а н о в М . В . , С а в е л ь е в Б . А . // Оптика атмосферы. 1991. Т. 4. N. 8. С. 819–826.
4. Г о р я ч е в Б. В . , К а б а н о в М . В . , М о г и л ь н и ц к и й С . Б . , С а в е л ь е в Б . А . //Оптика атмосферы, 1991. Т. 4. N. 8. С. 827–829.
5. К л я ц к и н В . И . Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1980,336 с.
6. И с и м а р у А . Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. Т. 1. М.: Мир, 1981. 280 с.
7. З е г е Э . П . , И в а н о в А . Г . , К а ц е в И . Л . Перенос изображения в рассеивающей среде. Минск: Наука и техника. 1985. 327 с.
8. D a v i e s R . // Journ. Atmosph. Sciences. 1978. V. 35. N. 9. P. 1712–1725.
9. A i d a M . // Journ. Quant. Spect. Rad. Transfer. 1977 V. 17. N. 3. P. 303–310.

Институт оптики атмосферы СО РАН,
Томск

Поступила в редакцию
10 февраля 1992 г.

A.G. Borovoi. **Method of Multiple Reflections in the Theory of Radiative Transfer. Some Critical Remarks**

It is shown in this paper that the method of multiple reflections is, in fact, a modification of the double-flux approach. Accuracy of the method is analysed. It is pointed out in the paper that practical use of the method is too problematic.