

К.В. Шишаков, В.И. Шмальгаузен

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО УСТРОЙСТВА ДЛЯ СИСТЕМ АТМОСФЕРНОЙ АДАПТИВНОЙ ОПТИКИ

Рассматривается восстановление волнового фронта, искаженного турбулентной атмосферой с помощью полиномов Цернике низших порядков при его измерении датчиками фазы и датчиками локальных наклонов с учетом шумов измерений. Исследуется влияние расположения датчиков, их размеров и шумов на качество восстановления.

Проектирование измерительного устройства является составной частью проектирования адаптивной оптической системы. В работах [1, 2] показано, что его оптимизация неразрывно связана с характеристиками всей системы. Для практических задач иногда целесообразно рассматривать измерительное устройство отдельно, считая, что корректор волнового фронта идеально воспроизводит ограниченный ряд характерных форм фазовых искажений световой волны. На круглых приемных апертурах фазу световой волны, прошедшую слой турбулентной атмосферы, в ряде случаев удобно раскладывать по полиномам Цернике низших порядков [3]. Качество таких измерительных систем можно охарактеризовать среднеквадратической ошибкой восстановления волнового фронта полиномами Цернике при его измерении конкретными датчиками.

Целью настоящей работы является исследование качества восстановления волнового фронта полиномами Цернике при различных расположениях датчиков фазы и датчиков локальных наклонов с учетом их шумов измерений.

Рассмотрим измерение волнового фронта с помощью датчиков фазы. Результатом измерения для них являются значения фазы световой волны в n точках r_k :

$$\varphi(r_k) = \Phi(r_k) + \delta\Phi(r_k), \quad (1)$$

где Φ — точное значение фазы; $\delta\Phi(r_k)$ — шум датчика, имеющий дисперсию σ_1^2 и не коррелирующий с Φ и с $\delta\Phi(r_k)$, $j \neq k$.

Коэффициенты разложения β_i волнового фронта по m полиномам Цернике Z_i определим из минимизации ошибки

$$\Delta_1 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\varphi'(r_k) - \sum_{i=2}^m \beta_i Z_i(r_k) \right)^2, \quad \varphi'(r) = \varphi(r) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi(r_k). \quad (2)$$

Постоянный полином $Z_1(r) = 1$ рассматривать не будем. Тогда

$$\beta_i = \sum_{k=1}^n \gamma_{ik} \varphi(r_k), \quad \gamma_{ik} = \sum_{j=2}^m a_{ij} Z_j(r_k) - \frac{1}{n} \sum_{j=2}^m \sum_{l=1}^n a_{ij} Z_j(r_l), \quad (3)$$

где a_{ij} — элементы матрицы, обратной к матрице с элементами

$$\sum_{k=1}^n Z_i(r_k) Z_j(r_k).$$

Датчики наклонов характеризуют средние значения ξ_i , η_i локальных наклонов волнового фронта по областям субапертур. За результаты измерений таких датчиков можно приближенно принять величины [2]:

$$\xi_k = \frac{1}{S_k} \left(\frac{\partial \Phi(r_k + r)}{\partial x}, 1 \right)_{\Omega_k} + \delta \xi_k, \quad \eta_k = \frac{1}{S_k} \left(\frac{\partial \Phi(r_k + r)}{\partial y}, 1 \right)_{\Omega_k} + \delta \eta_k; \quad (4)$$

или

$$\begin{aligned} \xi_k &= (\Phi(r_k + r), x)_{\Omega_k} / (x, x)_{\Omega_k} + \delta \xi_k; \\ \eta_k &= (\Phi(r_k + r), y)_{\Omega_k} / (y, y)_{\Omega_k} + \delta \eta_k, \quad k = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\mathbf{r} = (x, y)$ – декартовы координаты; N – количество датчиков; круглые скобки $(\cdot)_{\Omega_k}$ обозначают скалярное произведение функций по областям субапертур Ω_k (интеграл от произведения функций); S_k – площадь Ω_k ; $\delta\xi_k, \delta\eta_k$ – шумы измерений с дисперсией σ_2^2 , не коррелирующие друг с другом и с точными значениями наклонов волнового фронта.

По данным датчиков наклонов можно восстановить значения фазы волнового фронта в отдельных точках [4, 5]. Рассмотрим этот вопрос более подробно. Для упрощения вычислений при большом количестве датчиков наклонов, равномерно заполняющих область приемной апертуры Ω , перейдем от (4), (5) к непрерывной модели и будем считать, что измеряются величины

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = X + \delta\xi, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = Y + \delta\eta, \quad (6)$$

где X, Y – измеренные значения наклонов.

Пользуясь аппаратом вариационного исчисления [6], проминимизируем функционал ошибок измерений

$$\Delta_2 = (\delta\xi^2 + \delta\eta^2, 1)_{\Omega}. \quad (7)$$

При этом получим внутреннюю задачу Неймана

$$\nabla^2\Phi = \frac{\partial}{\partial x} X + \frac{\partial}{\partial y} Y; \quad (8)$$

$$\left. \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right|_{\Gamma} = X \cos(\mathbf{n}, x) + Y \cos(\mathbf{n}, y),$$

где Γ – граница Ω , \mathbf{n} – внешняя нормаль к Γ .

Используя сеточные аппроксимации уравнения (8), можно построить различные алгоритмы восстановления фазы в узлах специально выбранной сетки по данным измерений наклонов волнового фронта в отдельных точках. Так, например, для квадратной сетки получаются известные уравнения [4, 5]:

$$-4\Phi_{ij} + \Phi_{i-1,j} + \Phi_{i+1,j} + \Phi_{i,j-1} + \Phi_{i,j+1} = f_{i,j}, \quad (9)$$

где

$$f_{ij} = \frac{h}{2} (X_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + X_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - X_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - X_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + Y_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + Y_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - Y_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - Y_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}),$$

h – шаг сетки; пара (i, j) характеризует расположение узла сетки в декартовых осях координат.

Аналогичные выражения нетрудно записать и для более сложных неравномерных сеток. Здесь необходимо отметить, что для малого количества датчиков наклонов более правильным будет подход, аналогичный описанному в [4] и решающий задачу непосредственно в дискретной постановке. В итоге получаем, что при плотном заполнении приемной апертуры субапертурами датчиков наклонов, можно с некоторой степенью приближения заменять датчики наклонов значениями фазы в узлах покрывающей сетки. При малых размерах субапертур по сравнению с расстояниями между ними необходимо использовать непосредственно выражения (4) или (5).

Качество восстановления волнового фронта полиномами Цернике Z_i будем оценивать функционалом

$$I = \frac{1}{S} \left\langle \left(\Phi(\mathbf{r}) - \sum_{i=2}^m \beta_i Z_i(\mathbf{r}) \right)^2, 1 \right\rangle_{\Omega}, \quad (10)$$

где S – площадь Ω ; угловые скобки обозначают усреднение по ансамблю реализаций.

В рамках колмогоровской модели турбулентной атмосферы фазовые искажения будем характеризовать структурной функцией

$$D_{\Phi}(\rho) = 6,88 \left(\frac{D}{r_0} \right)^{5/3} \rho^{5/3}, \quad (11)$$

где D – диаметр круглой области Ω ; r_0 – радиус корреляции Фрида [3]; ρ – безразмерное расстояние, $\rho \in (0, 1)$.

Рассмотрим сначала качество восстановления волнового фронта измерительным устройством с датчиками фазы. Подставим (3) в (10) и учтем известную связь корреляционной функции со структурной функцией [3]:

$$2 \langle \Phi(r_1) \Phi(r_2) \rangle = -D_\Phi(r_1 - r_2) - \frac{1}{S^2} \int_{\Omega} \int_{\Omega} D_\Phi(\rho_1 - \rho_2) d^2\rho_1 d^2\rho_2 + \frac{1}{S} \int_{\Omega} D_\Phi(r_1 - \rho_1) d^2\rho_1 + \frac{1}{S} \int_{\Omega} D_\Phi(r_2 - \rho_2) d^2\rho_2. \quad (12)$$

Тогда, используя результаты работ [3, 7], получим

$$2 \langle \beta_i \beta_j \rangle = - \sum_{\kappa=1}^n \sum_{l=1}^n \gamma_{ik} \gamma_{jl} D_\Phi(r_\kappa - r_l) + \sigma_1^2 \sum_{\kappa=1}^n \gamma_{ik} \gamma_{j\kappa};$$

$$2 \langle \beta_i(\Phi, Z_i) \rangle = - \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} (Z_i(r), D_\Phi(r - r_j))_{\Omega}; \quad (13)$$

$$\frac{1}{S} \langle (\Phi, \Phi)_{\Omega} \rangle = 1,0239 \left(\frac{D}{r_0} \right)^{5/3}, \quad \frac{1}{S} (Z_i, Z_j)_{\Omega} = \delta_{ij}.$$

Выражения (13) определяют значения функционала (10). Часто бывает удобно выделить шумовую компоненту функционала отдельно. Тогда

$$I = J + \delta J, \quad (14)$$

где J — точное значение функционала; $\delta J = \sigma_1^2 \sum_{i=2}^m \sum_{\kappa=1}^n \gamma_{ik}^2$ — его шум.

Отсюда видно, что величины J и δJ могут стать сравнимы при сильных шумах измерений. Чтобы уменьшить влияние шума, введем систему адаптации к уровню шума. Для этого формально заменим β_i на выражения $\beta'_i = c_i \beta_i$, в которых коэффициенты c_i определим из минимизации функционала (10). Отметим, что даже в отсутствие шума коэффициенты c_i будут в некоторой степени исправлять недостатки алгоритма (3) при неудачном расположении датчиков.

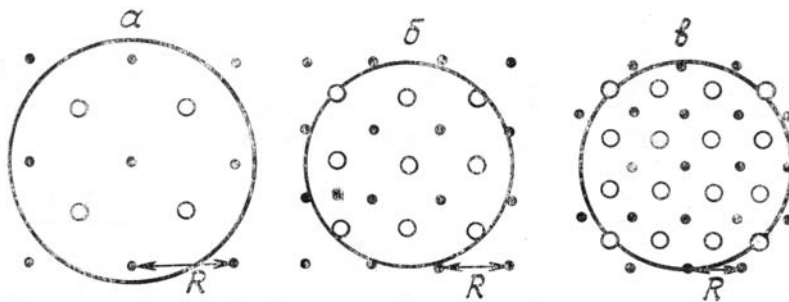


Рис. 1. Расположение датчиков фазы и датчиков наклонов в узлах квадратной сетки

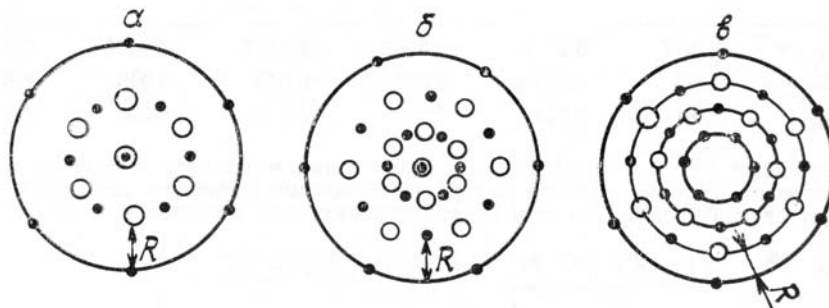


Рис. 2. Расположение датчиков фазы и датчиков наклонов в узлах полярной сетки

Численные расчеты проводились для 10 различных, разумных с физической точки зрения, вариантов расположения датчиков фазы. Первые шесть вариантов приведены на рис. 1, 2. С их помощью можно также описывать плотно упакованные датчики наклонов с последующим восстановлением фазы. Датчики фазы на рисунках обозначены точками, а датчики наклонов — кружочками. Значения параметра $2R/D$ для этих вариантов составили: для рис. 1, *a*, *б*, *в* соответственно 0,9; 0,6; 0,5; для рис. 2, *a*, *б*, *в* — 0,5; 0,33; 0,25. Дополнительно рассматривались еще четыре варианта соответственно с 19, 31, 55, 79 датчиками фазы, расположенными в центре, и по 2, 3, 4, 5 концентрическим окружностям, равноотстоящим друг от друга на расстоянии $2R/D$, соответственно равном 0,5; 0,33; 0,25; 0,2 (рис. 3). Рассматривалось восстановление волнового фронта 6-ю и 10-ю полиномами Цернике низших порядков [3, 7]. Результаты расчета приведены в табл. 1 ($m = 6$) и в табл. 2 ($m = 10$).

$$J' = J(r_0/D)^{5/3}; \quad \delta J' = \delta J / \sigma_1^2; \quad I_{1j} = I(r_0/D)^{5/3},$$

I'_{2j} — соответствует I_{1j} , в котором введена адаптация к уровню шума. Значениям индекса $j = 1, 2, 3$ соответствуют значения параметра $\sigma_1^2(r_0/D)^{5/3} = 0,001; 0,01; 0,1$. Если значения этого параметра превосходят единицу, тогда, как показали численные расчеты, следует ограничиваться восстановлением только средних по апертуре наклонов, так как при этом шум измерений значительно превосходит вклад высших аберраций.

Таблица 1

Номер варианта						
	1	2	3	4	5	6
J'	0,089	0,103	0,090	0,080	0,072	0,068
$\delta J'$	0,445	0,130	0,106	0,276	0,237	0,196
I'_{11}	0,089	0,103	0,090	0,080	0,072	0,069
I'_{12}	0,093	0,104	0,091	0,083	0,074	0,070
I'_{13}	0,133	0,116	0,101	0,108	0,095	0,088
I'_{21}	0,086	0,097	0,085	0,080	0,072	0,069
I'_{22}	0,089	0,098	0,086	0,083	0,074	0,070
I'_{23}	0,117	0,112	0,098	0,105	0,093	0,087

Таблица 2

Номер варианта						
	5	6	7	8	9	10
J'	0,0601	0,0494	0,0529	0,0431	0,0429	0,0402
$\delta J'$	0,589	0,392	0,344	0,216	0,116	0,087
I'_{11}	0,0607	0,0498	0,0533	0,0433	0,0430	0,0402
I'_{12}	0,066	0,053	0,056	0,045	0,044	0,0410
I'_{13}	0,119	0,089	0,087	0,065	0,055	0,0489
I'_{21}	0,0517	0,0470	0,0508	0,0427	0,0416	0,0401
I'_{22}	0,055	0,050	0,054	0,045	0,043	0,0403
I'_{23}	0,081	0,073	0,082	0,063	0,054	0,0486

Полученные результаты могут быть применены и для приближенного анализа восстановления волнового фронта плотно упакованными датчиками локальных наклонов. Шум функционала δJ при этом будет определяться выражением

$$\delta J = \sum_{i=2}^m \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \gamma_{ik} \gamma_{il} \langle \delta \Phi(r_k) \delta \Phi(r_l) \rangle. \quad (15)$$

Значения корреляций $\langle \delta\Phi(r_k)\delta\Phi(r_l) \rangle$ можно приближенно оценить, пользуясь формулой (4). В силу линейности задачи заменим в (4) величины Φ , X , Y их шумами $\delta\Phi$, $\delta\xi$, $\delta\eta$. Обозначим $\alpha_1 = \langle \delta\Phi_{ij}^2 \rangle$; $\alpha_2 = \langle \delta\Phi_{i,j\pm 1}\delta\Phi_{i,j} \rangle = \langle \delta\Phi_{i\pm 1,j}\delta\Phi_{i,j} \rangle$; $\alpha_3 = \langle \delta\Phi_{i\pm 1,j\pm 1}\delta\Phi_{i,j} \rangle$; $\alpha_4 = \langle \delta\Phi_{ij} \cdot \delta\Phi_{i\pm 2,j} \rangle = \langle \delta\Phi_{ij}\delta\Phi_{i,j\pm 2} \rangle$. Пренебрегая другими корреляциями и определяя значения $\langle f_{ij}^2 \rangle$; $\langle f_{ij}f_{i,j-1} \rangle$; $\langle f_{ij}f_{i+1,j-1} \rangle$; $\langle f_{ij}f_{i,j-2} \rangle$, трудно получить систему линейных уравнений, имеющую решение $\alpha_1 = 0,16h^2\sigma_2^2$, $\alpha_2 \approx \alpha_3 \approx 0,04h^2\sigma_2^2$, $\alpha_4 \approx 0$. Отметим, что в общей постановке задача не рассчитывалась, так как ее решение будет определяться конкретным алгоритмом восстановления (8). Для квадратных сеток расположения датчиков наклонов анализ восстановления фазы Φ_{ij} с учетом шумов измерения проведен в работах [4, 5].

Рассмотрим влияние размеров областей субапертур Ω_k на качество восстановления волнового фронта полиномами Цернике. Если диаметры круглых субапертур меньше расстояния между ними, алгоритмы восстановления (8), (9) могут привести к большим погрешностям. Поэтому в этих случаях коэффициенты разложения β_i будем определять следующим образом. Рассмотрим линейную комбинацию результатов измерений

$$\beta_i = \sum_{k=1}^N (A_{ik}\xi_k + B_{ik}\eta_k), \quad (16)$$

в которой неизвестные коэффициенты A_{ik} , B_{ik} найдем из условия минимизации функционала (10) для структурной функции (11) при отсутствии шумов измерений ($\delta\xi_k = \delta\eta_k = 0$). При этом получается система линейных алгебраических уравнений вида

$$\sum_{k=1}^N (A_{ik}d_{ik}^{\xi} + B_{ik}d_{ik}^{\eta}) = C_{li}^{\xi}, \quad i = 2, \dots, m; \quad l = 1, \dots, N, \quad (17)$$

$$\sum_{k=1}^N (A_{ik}d_{ik}^{\eta} + B_{ik}d_{ik}^{\xi}) = C_{li}^{\eta},$$

где

$$d_{ik}^{\xi} = \langle \xi_l \xi_k \rangle; \quad d_{ik}^{\eta} = \langle \eta_l \eta_k \rangle; \quad d_{ik}^{\xi\eta} = d_{kl}^{\eta\xi} = \langle \xi_l \eta_k \rangle;$$

$$C_{li}^{\xi} = \frac{1}{S} \langle \xi_l(\Phi, Z_i)_{\Omega} \rangle; \quad C_{li}^{\eta} = \frac{1}{S} \langle \eta_l(\Phi, Z_i)_{\Omega} \rangle. \quad (18)$$

Тогда значение функционала качества (10) будет определяться прежним выражением (14), в котором

$$J = 1,0239 \left(\frac{D}{r_0} \right)^{5/3} - \sum_{i=2}^m \sum_{k=1}^N (A_{ik}C_{ki}^{\xi} + B_{ik}C_{ki}^{\eta}); \quad (19)$$

$$\delta J = \sigma_{\xi}^2 \sum_{i=2}^m \sum_{k=1}^N (A_{ik}^2 + B_{ik}^2).$$

Нетрудно показать, что дисперсии d_{kk}^{ξ} , d_{kk}^{η} на круглых субапертурах радиуса r_c при отсутствии шумов измерения определяются формулами

$$d_{kk}^{\xi} = d_{kk}^{\eta} = C \left(\frac{D}{r_0} \right)^{5/3} r_c^{-1/3}, \quad (20)$$

в которых коэффициент C для выражений (5) находится в соответствии с результатами работы [7] и равен 1,796. При использовании выражений (4) численные расчеты привели к $C = 1,673$. В дальнейшем будем использовать последнее значение C . Если размеры субапертур значительно меньше расстояния между ними, то для упрощения вычислений можно приближенно заменять в (18) величины ξ_e , η_e значениями наклонов в центрах субапертур $\partial\Phi(r_e)/\partial x$, $\partial\Phi(r_e)/\partial y$. Такие вычисления проводились для круглых субапертур радиуса r_c . Рассматривались прежние пять вариантов расположения датчиков наклонов (рис. 1, 2). Для них параметр $2R/D$ соответственно, составлял: 0,9; 0,6; 0,5; 0,67; 0,5. Шестой вариант был заменен на равномерное расположение 12-ти датчиков локальных наклонов по окружности радиуса $R = 0,4D$. Результаты расчета при восстановлении 6-ти полиномов Цернике приведены в табл. 3, в которой оставлены прежние обозначения. Из таблицы видно, что размер субапертур играет более важную роль по сравнению с количеством датчиков локальных наклонов.

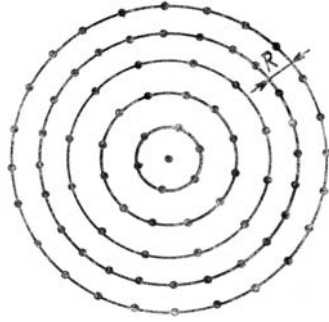


Рис. 3. Расположение датчиков фазы

Для наиболее часто применяемого на практике первого варианта было рассмотрено влияние шумов измерений на получаемые результаты. Так, при $2r_c = 0,45D$, $\sigma_2^2(r_0/D)^{5/3} = 0,001; 0,01; 0,1; 1; 10$ получились следующие значения $I(r_0/D)^{5/3}$: 0,073; 0,076; 0,106; 0,414, 3,5. После введения системы адаптации к уровню шума они уменьшились до 0,073; 0,076; 0,105; 0,314; 0,805.

Таблица 3

	Номер варианта							
	1	1	2	3	4	4	5	6
$\frac{2r_c}{D}$	0,225	0,45	0,15	0,083	0,15	0,3	0,135	0,135
J'	0,126	0,072	0,3	0,068	0,3	0,25	0,1	0,19
$\bar{\sigma}J'$	0,18	0,34	0,16	0,75	0,09	0,08	0,66	0,21

Таким образом, рассмотренная методика и рассчитанные по ней модельные примеры могут оказаться полезными при выборе конструкции измерительного устройства для восстановления волнового фронта полиномами Цернике низших порядков.

1. Татарский В. И. // Известия вузов. Радиофизика. 1981. Т. 24. № 7. С. 861–872.
2. Харди Д. У. Активная оптика. Новая техника управления световым пучком // ТИИЭР. 1978. Т. 66. №6. С. 31.
3. Wang J., Markey J. // JOSA. 1978. V. 68. № 1. P. 78.
4. Fried D. L. // JOSA. 1977. V. 67. P. 370.
5. Southwell W. H. // JOSA. 1980. V. 70. № 8. P. 998.
6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1984.
7. Noll J. // JOSA. 1976. V. 66. № 3. P. 207.

Московский госуниверситет
им. М.В. Ломоносова

Поступило в редакцию
28 сентября 1988 г.

K. V. Shishakov, V. I. Shmalgauzen. **Calculation of Measurement Structure for Adaptive Atmospheric Optical Systems.**

Wave front reconstruction by the Zernike polynomials is considered in adaptive atmospheric optical systems. Measurement noises of local phase detectors and tilt detectors are investigated. Influence of detectors positions, sizes and noises are discussed.