

А.А. Землянов, Ю.Э. Гейнц

Эффективность возбуждения резонансных пространственных конфигураций внутреннего оптического поля сферических микрочастиц фокусированными лазерными пучками

Институт оптики атмосферы СО РАН, г. Томск

Поступила в редакцию 20.04.2000 г.

Рассмотрена задача об эффективности возбуждения диэлектрических сферических микрочастиц лазерными пучками. Выполнены численные исследования резонансного возбуждения оптического поля в микросферах при освещении их фокусированными пучками Гаусса – Эрмита при центральном и боковом падении излучения. Определены конфигурации наиболее оптимальной перекачки энергии лазерного пучка в поле собственных мод микрорезонатора.

Введение

Как известно, прозрачные микрочастицы размерами много больше длины волны воздействующего на них излучения могут рассматриваться как высокодобротные оптические резонаторы. Они представляют определенный интерес при изучении различного рода нелинейно-оптических взаимодействий в малом объеме вещества. Резонансное возбуждение оптического поля в таких системах до сих пор остается важной проблемой, имеющей первостепенную важность, особенно в свете все более широкого практического применения микрорезонаторов как оптических приборов для целей спектроскопии аэрозолей, оптической микроэлектроники [1].

Целый ряд экспериментальных и теоретических исследований, проведенных в последние два десятилетия (их обзор дан в [1]), показал, что при выполнении условий резонанса для волны накачки (так называемый, «входной» резонанс) происходит резкое увеличение эффективности нелинейной связи взаимодействующих волн внутри частицы. Это, в частности, приводит к существенному снижению энергетического порога проявления эффектов вынужденного рассеяния света (ВКР, ВРМБ, вынужденная флуоресценция).

Как следует из теории Ми, при освещении сферической частицы плоской волной необходимым и достаточным условием получения резонансных конфигураций внутреннего оптического поля является выполнение определенного соответствия между значением дифракционного параметра частицы $x_a = 2\pi a_0/\lambda$ (a_0 – радиус частицы; λ – длина волны излучения накачки) и ее показателем преломления m_a . При этом одно из слагаемых в разложении внутреннего электромагнитного поля по системе парциальных волн (пространственных частот) начинает доминировать над остальными, приводя к трансформации пространственной структуры поля и концентрации его в кольцевой зоне вблизи поверхности частицы. Образующиеся в результате этого резонансные колебательные моды, получившие в научной литературе название мод «шепчущей» галереи, характеризуются

высокими значениями добротности ($Q \sim 10^5 \div 10^8$). На практике, однако, обычно имеют дело не с плоскими волнами, а с фокусированными пучками, диаметр фокальной перетяжки которых может быть сравним или даже меньше размера частицы. Пространственная структура оптического поля внутри частицы в этом случае также становится иной, чем для плоской волны.

Внутреннее поле в соответствии с профилем пучка преимущественно локализуется вдоль его направления падения на частицу, принимая максимальное значение на главном диаметре частицы. Более того, падение светового пучка на частицу может быть не центральным, а боковым, что выражается в появлении резкой асимметрии распределения внутреннего поля, прежде всего в азимутальном направлении.

Таким образом, данные особенности могут привести к тому, что даже при выполнении указанных выше необходимых условий резонансы в частицах для острофокусированных пучков наблюдаться не будут. Иллюстрацией этого служит рис. 1, на котором приведено двумерное распределение относительной интенсивности оптического поля (в плоскости yz) внутри водной капли, радиус которой соответствует резонансу TE_{60}^1 моды, при ее освещении гауссовым пучком с полушириной $w_0 = a_0/2$ и различным смещением оси пучка относительно центра частицы по координате y . Из рис. 1 видно, что при центральном падении светового пучка ($y_0 = 0$, рис. 1, б) поле в частице нерезонансное в отличие от случая падения плоской волны при этих же условиях (рис. 1, а). Характерная для резонанса кольцевая структура поля появляется только при смещении пучка к краю частицы (рис. 1, в), и полное соответствие со случаем плоской волны достигается при $y_0 > a_0$ (рис. 1, г). На данное обстоятельство впервые было обращено внимание в экспериментальных работах [2, 3], а соответствующее теоретическое обоснование было дано в [4–6].

В связи с этим, говоря о резонансном возбуждении оптических полей фокусированными пучками, необходимо принимать в расчет кроме параметра дифракции и показателя преломления частицы еще и пространственный профиль

светового пучка, а также геометрию его падения. Теоретическому исследованию влияния данных параметров на эффек-

тивность возбуждения резонансов в сферических частицах и будет посвящена данная статья.

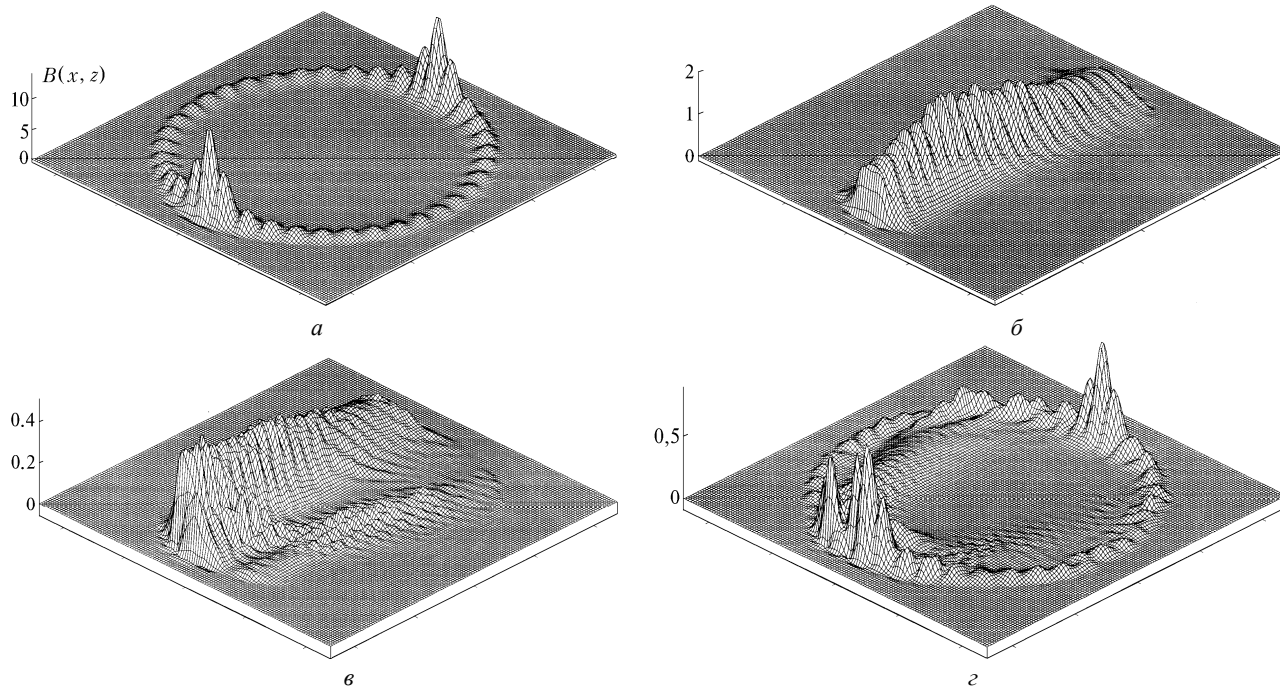


Рис. 1. Пространственное распределение относительной интенсивности оптического поля внутри водной капли ($x_a = 49,8983$) при ее освещении плоской волной (а) с $\lambda = 0,65$ мкм и гауссовым пучком (б–г) с параметром $w_0/a_0 = 0,5$ в зависимости от положения оси пучка относительно центра частицы: $y_0/a_0 = 0$ (б); 0,5 (в); 1,12 (г)

Структура статьи организована следующим образом. В первой части, которая носит обзорный характер, следуя оригинальным работам [4, 9–14], кратко рассмотрены основные принципы описания электромагнитного поля фокусированных пучков Гаусса – Эрмита, а также приводятся выражения для амплитуд сферических составляющих электрического вектора внутреннего оптического поля в сферической частице при ее облучении фокусированными пучками. Вторая часть работы целиком направлена на исследование эффективности возбуждения резонансов внутреннего оптического поля в частице в зависимости от типа и характеристик пучков. Базируясь на выражениях для коэффициентов формы пучка (13), мы получили аналитические выражения для параметра смещения оси пучка и его полуширины, обеспечивающие оптимальные условия при перекачке энергии излучения накачки в поле собственных колебательных мод частицы. Приводятся результаты численных расчетов.

1. Особенности распределения внутреннего оптического поля частиц при их освещении фокусированными гауссовыми пучками

При описании дифракции плоских электромагнитных волн на диэлектрической сфере используется, как известно, классическая теория Ми. В случае же не плоских волн, а ограниченных в пространстве световых пучков с произвольным по сечению распределением интенсивности также можно воспользоваться результатами

данной теории, если предварительно обобщить ее на данный класс пучков. По данной проблеме было проведено достаточно большое число исследований, среди которых следует упомянуть работы [7, 8].

Центральным моментом обобщенной теории Ми является представление электромагнитного поля падающего на частицу светового пучка в виде разложения по парциальным волнам (сферическим гармоникам), подобно тому, как это выполняется для плоской волны. В результате возникает два набора комплексных коэффициентов $(g_n^m)_{TE}$ и $(g_n^m)_{TH}$, описывающих амплитуду и фазу каждой парциальной волны, называемых коэффициентами формы пучка (КФП) для парциальных волн ТЕ- и ТН-поляризации соответственно [8]. Значение данных коэффициентов не зависит от пространственных координат, а определяется только конкретным профилем пучка и геометрией его падения на частицу.

Кратко рассмотрим описание поля фокусированного гауссового пучка в терминологии Дэвиса [9, 10]. Введем систему координат $(x'y'z')$, центр которой расположим в середине фокальной перетяжки пучка с полушириной w_0 (рис. 2). Будем полагать, что линейно поляризованный (вдоль оси x') гауссов пучок распространяется вдоль оси z' .

Вторая система координат (xyz) обычно связывается с центром сферической частицы и используется для проведения разложения по парциальным волнам. Положение начала координатной системы $(x'y'z')$ относительно центра координат (xyz) характеризуется набором координат (x_0, y_0, z_0) . Для упрощения выкладок далее будем

рассматривать случай, когда $x_0 = y_0 = z_0 = 0$. Обобщение на случай произвольных x_0, y_0, z_0 проводится достаточно очевидно, но приводит к громоздким выражениям.

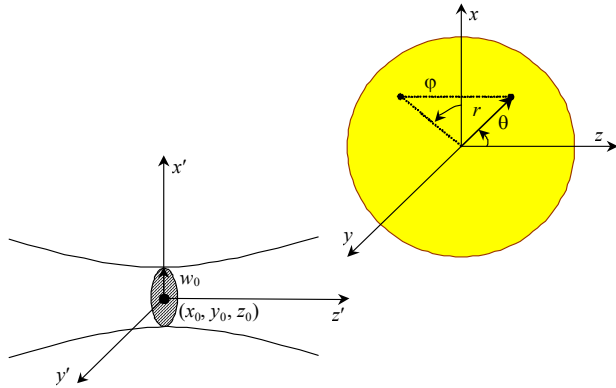


Рис. 2. Схема расположения координатных систем в задаче о дифракции фокусированного светового пучка на сферической частице

Линейно поляризованный лазерный пучок в координатной системе (xyz) будем описывать векторным потенциалом $\mathbf{A} = (A_x, 0, 0)$, где ненулевая компонента A_x дается следующим выражением:

$$A_x = \Psi(x, y, z) \exp(-ikz). \quad (1)$$

Функция $\Psi(x, y, z)$ по определению должна удовлетворять уравнению Гельмгольца:

$$\nabla^2 \mathbf{A}(x, y, z) + k^2 \mathbf{A}(x, y, z) = 0. \quad (2)$$

Очевидно, что подобное описание поля пучка требует проведения дифференцирования по всем координатам. Однако масштаб изменения координат x и y достаточно мал по сравнению с масштабом изменения в продольном направлении z , который связан с дифракционной длиной $l_z = kw_0^2$. Поэтому необходимо ввести безразмерные координаты (ξ, η, ζ) , определяемые как

$$\xi = x/w_0; \quad \eta = y/w_0; \quad \zeta = z/l_z.$$

Тогда, подставляя (1) в (2), получим уравнение для функции $\Psi(\xi, \eta, \zeta)$:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \Psi(\xi, \eta, \zeta) - 2i \frac{\partial \Psi(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} + s^2 \frac{\partial^2 \Psi(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta^2} = 0. \quad (3)$$

В данном уравнении введен малый параметр s , имеющий смысл безразмерного параметра фокусировки пучка:

$$s = w_0/l_z = 1/(kw_0). \quad (4)$$

Для плоской волны ($w_0 \rightarrow \infty$) данный параметр равен нулю, а для реальных пучков обычно $s \sim 10^{-2} \div 10^{-3}$.

Для решения уравнения (3) функция $\Psi(\xi, \eta, \zeta)$ раскладывается в ряд по малому параметру s^2 :

$$\Psi(\xi, \eta, \zeta) = \Psi_0(\xi, \eta, \zeta) + s^2 \Psi_2(\xi, \eta, \zeta) + s^4 \Psi_4(\xi, \eta, \zeta) + \dots \quad (5)$$

Первое слагаемое в (5) описывает решение для фундаментальной моды гауссового пучка TEM_{00} :

$$\Psi_0(\xi, \eta, \zeta) = iQ_\zeta \exp[-iQ_\zeta(\xi^2 + \eta^2)], \quad (6)$$

где $Q_\zeta = (i + 2\zeta)^{-1}$; $|Q_\zeta|$ – безразмерная ширина пучка.

При известной функции Ψ_0 коррекции высоких порядков Ψ_{2n} находятся подстановкой (6) в исходное уравнение (3):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - 2i \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \Psi_{2n+2}(\xi, \eta, \zeta) = - \frac{\partial^2 \Psi_{2n}(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta^2}; \quad n \geq 0. \quad (7)$$

Электрический \mathbf{E} и магнитный \mathbf{H} векторы поля связаны с потенциалом \mathbf{A} очевидными соотношениями

$$\mathbf{E} = \frac{-ic}{k} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - i\omega \mathbf{A}; \quad \mathbf{H} = 1/\mu(\nabla \cdot \mathbf{A}).$$

Форма данной записи позволяет провести условную классификацию пучков. Пучок n -го порядка (по Дэвису) получается из (7) путем отбрасывания всех слагаемых, порядок которых выше s^n . Таким образом, поле пучка 1-го порядка зависит только от Ψ_0 , а пучка 3-го порядка – только от Ψ_0 и Ψ_2 и т.д. Заметим, что ни один из этих пучков, вообще говоря, строго не удовлетворяет уравнениям Максвелла, а только при $n \rightarrow \infty$ или $s \rightarrow 0$.

Следуя стандартной процедуре теории Ми, представим скалярную функцию $\Psi(\xi, \eta, \zeta)$ в виде разложения по парциальным волнам в сферической системе координат [11]:

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{TE}}(r, \theta, \varphi) &= - \frac{-E_0}{kr} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} (g_n^m)_{\text{TE}} \Psi_n(kr) \times \\ &\times P_n^m(\cos \theta) \exp(im\varphi), \\ \Psi_{\text{TH}}(r, \theta, \varphi) &= - \frac{-E_0}{kr} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} (g_n^m)_{\text{TH}} \Psi_n(kr) \times \\ &\times P_n^m(\cos \theta) \exp(im\varphi). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $P_n^m(\cos \theta)$ – присоединенные полиномы Лежандра, а коэффициенты формы $(g_n^m)_{\text{TE}}$, $(g_n^m)_{\text{TH}}$ находятся как двумерные интегралы от радиальных составляющих поля исходного пучка E_r и H_r :

$$\begin{aligned} (g_n^m)_{\text{TE}} &= - \frac{1}{4\pi} (i^{n-1}) \frac{(kr)^2}{\Psi_n(kr)} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} \times \\ &\times \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi P_n^m(\cos \theta) \exp(-im\varphi) \frac{cH_r(r; \theta; \varphi)}{nH_0}, \\ (g_n^m)_{\text{TH}} &= - \frac{1}{4\pi} (i^{n-1}) \frac{(kr)^2}{\Psi_n(kr)} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} \times \\ &\times \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi P_n^m(\cos \theta) \exp(-im\varphi) \frac{cE_r(r; \theta; \varphi)}{nE_0}. \end{aligned} \quad (9)$$

Радиальные компоненты электромагнитного поля связаны с его декартовыми составляющими посредством востного соотношения:

$$E_r = E_x \sin \theta \cos \varphi + E_y \sin \theta \sin \varphi + E_z \cos \theta.$$

Таким образом, например, для пучка 1-го порядка (аппроксимации Дэвиса) при произвольных (x_0, y_0, z_0) согласно выражению (6) получим:

$$\begin{aligned} E_r = & E_0 i Q_\zeta \exp(ikz_0) \exp(-ikr \cos \theta) \times \\ & \times \exp[-(skr \sin \theta)^2 i Q_\zeta] \exp[-i Q_\zeta (\xi_0^2 + \eta_0^2)] \times \\ & \times \exp[2s i Q_\zeta kr \sin \theta (\xi_0 \cos \varphi + \eta_0 \sin \varphi)] \times \\ & \times \{\sin \theta \cos \varphi (1 - 2s^2 kr Q_\zeta \cos \theta) + 2s \xi_0 Q_\zeta \cos \theta\}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\xi_0 = x_0/w_0$; $\eta_0 = y_0/w_0$; $\zeta_0 = z_0/l_z$. Выражение для H имеет аналогичный вид при замене в последней строчке формулы (10) $\cos \varphi \rightarrow \sin \varphi$ и $\xi_0 \rightarrow \eta_0$.

Предполагая, что КФП определены с требуемой точностью, из (1), (8) следуют разложения для сферических составляющих поля исходного светового пучка. Так, например, для электрического поля:

$$\begin{aligned} E_r = & -\frac{iE_0}{(kr)^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n (2n+1) \Psi_n(kr) \sum_{m=-n}^n (g_n^m)_{\text{TH}} \pi_n^{[m]}(\theta) \exp(im\varphi), \\ E_\theta = & -\frac{E_0}{kr} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left\{ \Psi_n(kr) \sum_{m=-n}^n (g_n^m)_{\text{TE}} im \pi_n^{[m]}(\theta) \times \right. \\ & \times \exp(im\varphi) + \Psi'_n(kr) \sum_{m=-n}^n (g_n^m)_{\text{TH}} \tau_n^{[m]}(\theta) \exp(im\varphi) \left. \right\}, \\ E_\varphi = & -\frac{E_0}{kr} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left\{ -\Psi_n(kr) \sum_{m=-n}^n (g_n^m)_{\text{TE}} \tau_n^{[m]}(\theta) \times \right. \\ & \times \exp(im\varphi) + i \Psi'_n(kr) \sum_{m=-n}^n (g_n^m)_{\text{TH}} im \pi_n^{[m]}(\theta) \exp(im\varphi) \left. \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь угловые функции $\pi_n^{[m]}$ и $\tau_n^{[m]}$ определены как

$$\pi_n^{[m]}(\theta) = \frac{1}{\sin \theta} P_n^{[m]}(\cos \theta); \quad \tau_n^{[m]}(\theta) = \frac{d}{d\theta} P_n^{[m]}(\cos \theta).$$

Вычисление КФП $(g_n^m)_{\text{TE}}$, $(g_n^m)_{\text{TH}}$ для конкретного типа пучков представляет собой самостоятельную задачу [8, 12–14]. Исторически первым методом расчета данных коэффициентов был метод прямого интегрирования уравнений (9) с применением квадратурных формул [12]. Позднее был использован метод конечных рядов [8] и методы, основанные на принципе локализации Ван де Хюльста для различных классов пучков [13, 14]. На одном из них - методе интегральной локализованной аппроксимации (integral localized approximation) [14] – следует остановиться подробнее, поскольку он, по нашему мнению, является наиболее гибким и эффективным с точки зрения численных расчетов и будет использован нами в дальнейшем для исследования эффективности возбуждения резонансов.

Следуя расширенной трактовке принципа локализации [5], световой луч, падающий на сферическую частицу с прицельным параметром r , может быть заменен парциальной волной с номером n так, что справедлива трансляция: $kr \rightarrow n + 1/2$; $\theta \rightarrow \pi/2$; $\exp(-ikr \cos \theta) \rightarrow 1$. Тогда, если ввести так называемый оператор локализации \mathfrak{Z} ,

$$\mathfrak{Z}[f(kr; \theta)] = f(n + 1/2; \pi/2), \quad (12)$$

и подействовать им на выражения для радиальных составляющих поля гауссового пучка E_r и H_r , то соответствующие выражения для КФП g_n^m примут вид:

$$\begin{aligned} (g_n^m)_{\text{TE}} = & -\frac{Z_n^m}{2\pi H_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \mathfrak{Z}[H_r(r, \theta, \varphi)] \exp(-im\varphi), \\ (g_n^m)_{\text{TH}} = & -\frac{Z_n^m}{2\pi H_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \mathfrak{Z}[E_r(r, \theta, \varphi)] \exp(-im\varphi), \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$Z_n^0 = i2n(n+1)(2n+1), \quad Z_n^m = [-2i(2n+1)]^{m-1}, \quad m \neq 0.$$

Таким образом, для вычисления наборов КФП необходимо знать выражения для радиальных составляющих поля пучка только в фокальной плоскости $z = 0$.

Из выражений (13) следует, что для плоской волны (линейно поляризованной вдоль оси x), поскольку $E_r = E_x \sin \theta \cos \varphi$ и $H_r = H_y \sin \theta \sin \varphi$, все коэффициенты g_n^m равны нулю, кроме $(g_n^{+1})_{\text{TE}} = \mu(i/2)$ и $(g_n^{+1})_{\text{TH}} = 1/2$. Для гауссова пучка 1-го порядка аппроксимации получим:

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}[E_r(r, \theta, \varphi)] = & E_0 i Q_\zeta \exp(ikz_0) \exp[-i Q_\zeta (\xi_0^2 + \eta_0^2)] \times \\ & \times \exp[-i Q_\zeta s^2 (n + 1/2)^2] \exp[2s(n + 1/2) \times \\ & \times i Q_\zeta (\xi_0 \cos \varphi + \eta_0 \sin \varphi)] \cos \varphi; \\ (g_n^m)_{\text{TH}} = & 1/2 (-i)^{|m|-1} s^{|m|-1} \exp[-(\xi_0^2 + \eta_0^2)] \exp(i(kw_0)^2 \zeta_0) \times \\ & \times \frac{\xi_0 - i\eta_0}{(m-1)!} \{1 - 2iskw_0 \zeta_0 [m - (\xi_0^2 + \eta_0^2)]\}. \end{aligned} \quad (14)$$

При этом справедливы соотношения взаимности между коэффициентами [11]:

$$[g_n^{-m}(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)]_{\text{TH}} = [g_n^m(\xi_0, -\eta_0, \zeta_0)]_{\text{TH}},$$

$$[g_n^{-m}(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)]_{\text{TE}} = -[g_n^m(\xi_0, -\eta_0, \zeta_0)]_{\text{TE}},$$

$$[g_n^m(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)]_{\text{TE}} = (-i)^m [g_n^m(\eta_0, -\xi_0, \zeta_0)]_{\text{TH}}, \quad m \geq 0.$$

Большинство представленных выше результатов относятся к фундаментальной моде гауссового пучка TEM_{00} . В то же время представляется важным рассмотреть принципы теоретического описания более широкого класса пучков Гаусса – Эрмита высоких порядков, обозначаемых в литературе как TEM_{nm} , с произвольным набором индексов n и m . В работах [7, 15] было показано, что электромагнитное поле таких пучков может быть

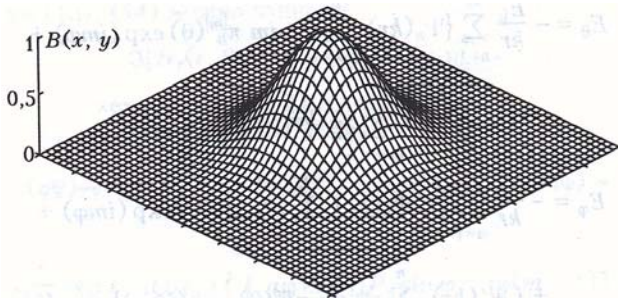
описано на основе поля TEM₀₀-моды путем перекрестного дифференцирования по соответствующим координатам, т.е. в символической записи:

$$\text{TEM}_{nm} = \frac{\partial^n \partial^m [\text{TEM}_{00}]}{\partial \xi^n \partial \eta^m}. \quad (15)$$

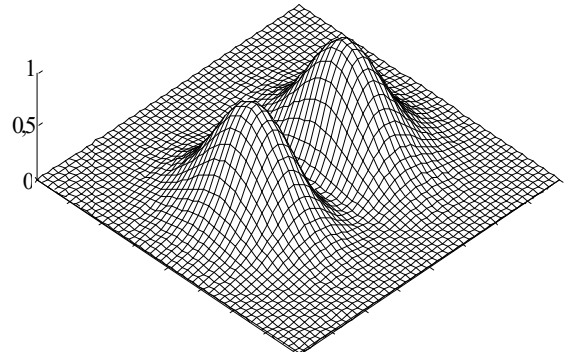
Следуя данной процедуре, например для TEM₁₀^(x)-моды гауссового пучка, поляризованного вдоль оси x , получим:

$$\begin{aligned} E_{\xi}^{10} &= -2iQ_{\zeta} (\xi - \xi_0) E_{\xi}^{00}, \\ E_{\eta}^{10} &= -2Q_{\zeta} s [1 - 2iQ_{\zeta} (\xi - \xi_0)^2] E_{\xi}^{00}; \\ H_{\eta}^{10} &= -2iQ_{\zeta} (\xi - \xi_0) H_{\eta}^{00}, \\ H_{\zeta}^{10} &= -4iQ_{\zeta}^2 (\xi - \xi_0) (\eta - \eta_0) H_{\eta}^{00}. \end{aligned} \quad (16)$$

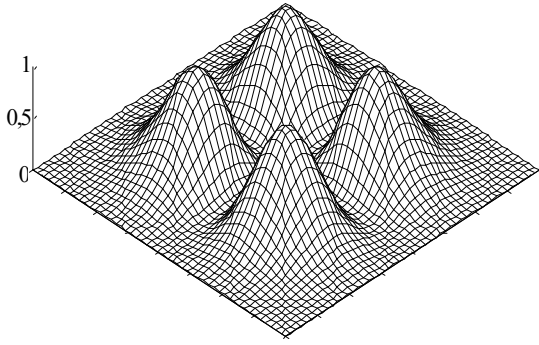
Соответственно для кольцевого пучка с циркулярной поляризацией TEM_{dn}^(hel) = (TEM₁₀^(x) + i TEM₀₁^(x)) / $\sqrt{2}$:



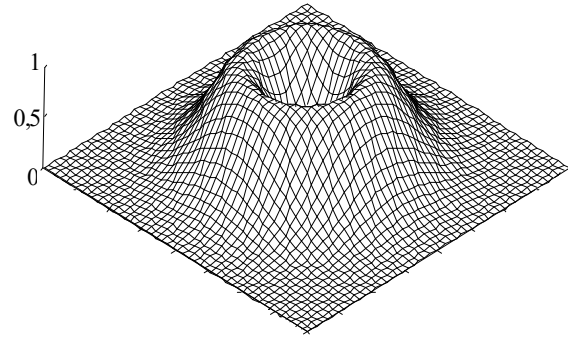
а



б



в



г

Рис. 3. Пространственное распределение нормированной интенсивности (в фокальной плоскости $z = 0$) световых пучков TEM₀₀ (а), TEM₁₀ (б), TEM₁₁ (в) и TEM_{dn}^(hel) (г)

Возвратимся к задаче о рассеянии световой волны на сферической частице. Проведенные выше рассуждения показывают, что для случая падения на частицу ограниченного в пространстве фокусированного пучка сферические составляющие внутреннего электрического поля частицы могут быть записаны следующим образом:

$$E_r = -\frac{iE_0}{(kr)^2} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \Psi_n(kr) \sum_{m=-n}^n c_n^m \pi_n^{|m|}(\theta) \exp(im\varphi),$$

$$E_{\xi}^{dn} = H_{\eta}^{dn} = -\sqrt{2} Q_{\zeta} [i(\xi - \xi_0) - (\eta - \eta_0)] E_{\xi}^{00},$$

$$E_{\zeta}^{dn} = -\sqrt{2} Q_{\zeta} s [1 - 2iQ_{\zeta} (\xi - \xi_0)^2 + 2Q_{\zeta} (\xi - \xi_0) (\eta - \eta_0)] E_{\xi}^{00};$$

$$H_{\zeta}^{dn} = i\sqrt{2} Q_{\zeta} s [2Q_{\zeta} (\xi - \xi_0) (\eta - \eta_0) + 2iQ_{\zeta} (\eta - \eta_0)^2 - 1] H_{\eta}^{00}. \quad (17)$$

В выражениях (16) и (17) составляющие поля фундаментальной моды $E_{x,00}$ и $H_{y,00}$ соответственно равны:

$$E_{\xi}^{00} = H_{\eta}^{00} = E_0 iQ_{\zeta} \exp(ikz_0) \exp\{-iQ_{\zeta} [(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2]\}.$$

На рис. 3 приведено распределение нормированной интенсивности в поперечном сечении ($z = 0$) пучков TEM₀₀, TEM₁₀, TEM₁₁ и TEM_{dn}^(hel). Нормировка проведена на величину, равную интенсивности плоской волны в вакууме ($cE_0^2/8\pi$).

$$\begin{aligned} E_{\theta} = & -\frac{E_0}{kr} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \Psi_n(kr) \sum_{m=-n}^n d_n^m im\pi_n^{|m|}(\theta) \exp(im\varphi) + i\Psi_n'(kr) \times \right. \\ & \left. \times \sum_{m=-n}^n c_n^m \tau_n^{|m|}(\theta) \exp(im\varphi) \right\}; \end{aligned}$$

$$E_{\varphi} = -\frac{E_0}{kr} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -\Psi_n(kr) \sum_{m=-n}^n d_n^m im\tau_n^{|m|}(\theta) \exp(im\varphi) + i\Psi_n'(kr) \times \right.$$

$$\times \sum_{m=-n}^n c_n^m i m \pi_n^{|m|}(\theta) \exp(im\varphi). \quad (18)$$

Как видно данная запись представляет собой обобщенный аналог соответствующего выражения для плоской волны с учетом модификации амплитудных коэффициентов c_n, d_n коэффициентами формы пучка:

$$c_n^m = c_n (g_n^m)_{\text{ТН}}; \quad d_n^m = d_n (g_n^m)_{\text{ТЕ}}.$$

Некоторые примеры численных расчетов относительной интенсивности внутреннего оптического поля в каплях воды при воздействии на них гауссовых пучков представлены на рис. 4, а–е.

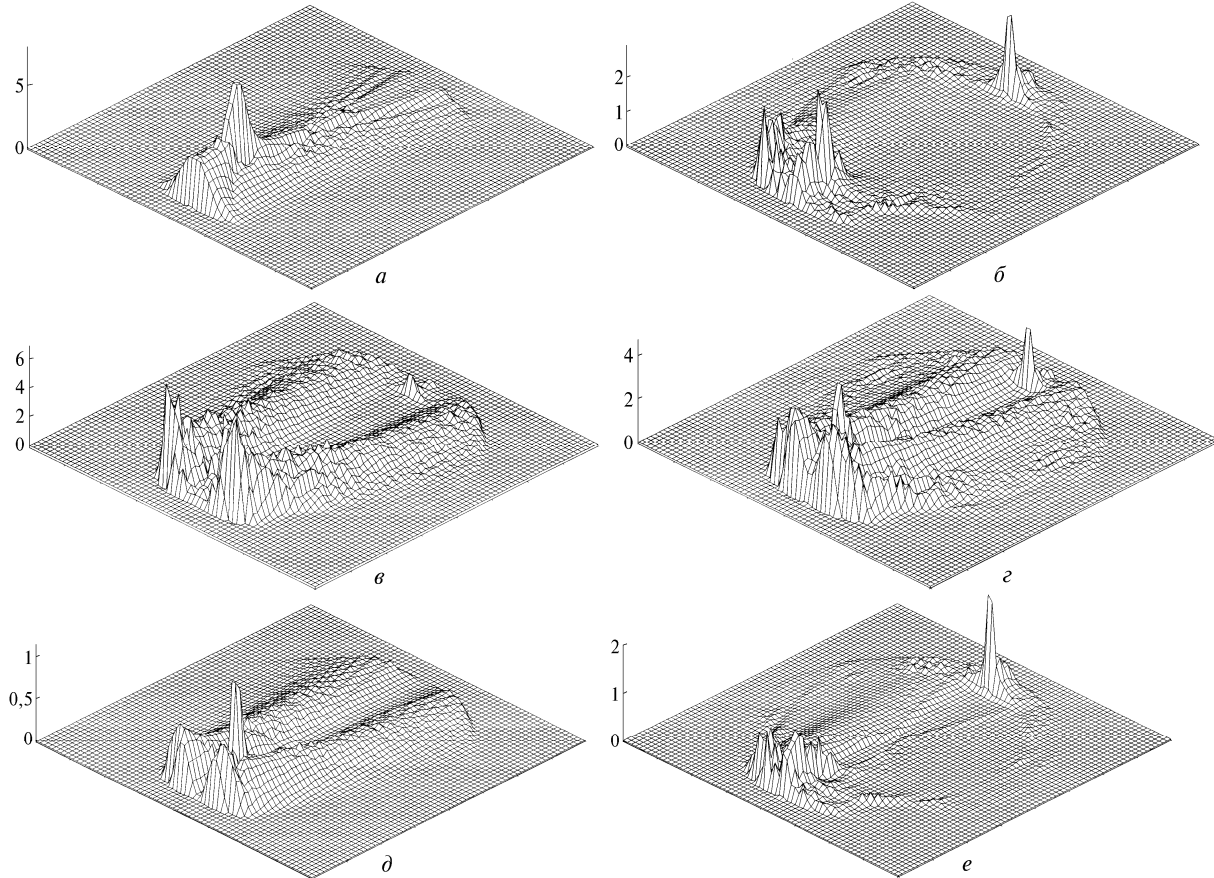


Рис. 4. Распределение фактора неоднородности светового поля B в плоскости YZ внутри водной капли радиусом $a_0 = 10$ мкм при освещении ее фокусированными пучками ($\xi_0 = \zeta_0 = 0$) с $\lambda = 0,532$ мкм: TEM₀₀, $\eta_0 = 0$ (а); TEM₀₀, $\eta_0 = 0,8$ (б); TEM₁₁, $\eta_0 = 0$ (в); TEM₁₁, $\eta_0 = 0,3$ (г); TEM_{dn}^(hel), $\eta_0 = 0$ (д); TEM_{dn}^(hel), $\eta_0 = 0,3$ (е)

2. Эффективность возбуждения резонансов внутреннего поля

Об эффективности возбуждения резонансов в частице будем судить по величине средней за период запасенной энергии внутреннего оптического поля W_i , выражение для которой, как известно, имеет вид

$$W_i = \frac{1}{8\pi} \int_{V_a} \epsilon_a \mathbf{E}_i \mathbf{E}_i^* d\mathbf{r}' = \frac{E_0^2 \epsilon_a}{8\pi} \int_{V_a} B_i(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (19)$$

где интегрирование ведется по объему частицы. Воспользуемся разложениями внутреннего поля по парциальным волнам и для определенности рассмотрим только TE_{nm}-моды. Тогда

$$B_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{E_0^2} [E_\theta(\mathbf{r}) E_\theta^*(\mathbf{r}) + E_\varphi(\mathbf{r}) E_\varphi^*(\mathbf{r})] =$$

$$= \frac{1}{(k_a r)^2} |d_n^m|^2 |\Psi_n(k_a r)|^2 \sum_{m=-n}^n \sum_{m_1=-n}^n (g_n^m)_{\text{ТЕ}} (g_n^{m_1})_{\text{ТЕ}}^* \times \\ \times \exp[i(m-m_1)\varphi] \{m m_1 \pi_n^{|m|}(\theta) \pi_n^{|m_1|}(\theta) + \tau_n^{|m|}(\theta) \tau_n^{|m_1|}(\theta)\}.$$

Проводя интегрирование по сферическим координатам и учитывая взаимную ортогональность угловых функций $\pi_n^{|m|}(\theta), \tau_n^{|m|}(\theta)$ и $\exp(im\varphi)$, для величины запасенной энергии получим

$$W_i = \frac{E_0^2 a_0 \epsilon_a}{8 k_a^2} \frac{2n(n+1)}{2n+1} |d_n^m|^2 \{|\Psi_n(k_a a_0)|^2 + |\Psi_{n+1}(k_a a_0)|^2 - \\ - \frac{2n+1}{k_a a_0} \Psi_n(k_a a_0) \Psi_{n+1}^*(k_a a_0)\} \sum_{m=-n}^n |(g_n^m)_{\text{ТЕ}}|^2 \frac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!}. \quad (20)$$

Аналогично для TH_{nm} -мод

$$W_i = \frac{E_0^2 a_0 \varepsilon_a}{8 k_a^2} \frac{2n(n+1)}{2n+1} |c_n^m|^2 \{ |\Psi_n(k_a a_0)|^2 + |\Psi_{n+1}(k_a a_0)|^2 + \frac{2n+1}{(k_a a_0)^2} |\Psi_n(k_a a_0)|^2 - \frac{2n+3}{k_a a_0} \Psi_n(k_a a_0) \Psi_{n+1}^*(k_a a_0) \} \times \sum_{m=-n}^n |(g_n^m)_{\text{TH}}|^2 \frac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!} \quad (21)$$

Как видно из выражений (20), (21), зависимость величины запасенной световой энергии от типа пучка и геометрии его падения на частицу целиком заключена в факторе

$$K_n = \sum_{m=-n}^n |(g_n^m)|^2 \frac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!} \quad (22)$$

и определяется только суммой ряда по КФП. При падении на сферическую частицу плоской волны ($s \rightarrow 0$) с помощью выражения (13) получим максимальное значение фактора K_n :

$$K_n(s \rightarrow 0) = 1/2 n(n+1). \quad (23)$$

Это говорит о том, что в плоской волне, поскольку ширина ее бесконечна, всегда найдутся лучи для возбуждения в частице соответствующих резонансных конфигураций оптического поля. С другой стороны, если оценивать данный процесс с точки зрения энергзатрат возбуждающего пучка, то, очевидно, что именно вследствие своей бесконечной протяженности плоская волна будет иметь наименьшую эффективность. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать только ограниченные в пространстве световые пучки.

Теоретический анализ проведем при условии $\xi_0 = \zeta_0 = 0$ и произвольных η_0 и w_0 . Предположим, что ось пучка перемещается относительно центра частицы по координате y (см. рис. 2), ширина светового пучка при этом также может изменяться. Для определенности будем исследовать возбуждение только TE_{nm} -резонансных мод в частице.

Рассмотрим сначала случай гауссового пучка на фундаментальной моде TEM_{00} . Согласно выражениям (13), (14) можно записать:

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}[H_r(r, \theta, \varphi)] &\sim \exp(-iQ_\zeta \eta_0^2) \times \\ &\times \exp[2s(n+1/2) iQ_\zeta \eta_0 \sin \varphi] \sin \varphi; \\ (g_n^m)_{\text{TE}} &= -\frac{Z_n^m}{2\pi H_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \mathfrak{I}[H_r(r, \theta, \varphi)] \exp(-im\varphi) \sim \\ &\sim \frac{1}{2i} \exp(-iQ_\zeta \eta_0^2) \left\{ \int_0^{2\pi} d\varphi \exp[iP_\eta \sin \varphi - i\varphi(m-1)] - \right. \\ &\left. - \int_0^{2\pi} d\varphi \exp[iP_\eta \sin \varphi - i\varphi(m+1)] \right\}, \quad (24) \end{aligned}$$

где $P_\eta = 2s(n+1/2) iQ_\zeta \eta_0$.

Замечая, что

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \exp[iP_\eta \sin \varphi - i\varphi(m-1)] = 2\pi(-i)^{m-1} I_{m-1}(iP_\eta),$$

$I_m(z)$ – модифицированная функция Бесселя, перепишем (24) в виде

$$(g_n^m)_{\text{TE}} \sim \exp(-\eta_0^2) [I_{m-1}(R_\eta) + I_{m+1}(R_\eta)]; \quad R_\eta = iP_\eta, \quad (25)$$

Необходимо исследовать правую часть данного выражения на экстремум по переменной η_0 .

Для не очень широких пучков, т. е. когда выполняется условие $\text{Re}\{R_\eta\} > 12$, используем асимптотическое представление для функции $I_m(R_\eta)$ [16]:

$$\begin{aligned} I_m(R_\eta) &\approx \frac{\exp(R_\eta)}{(2\pi R_\eta)^{1/2}} \times \\ &\times \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{m+2} \frac{(-1)^k}{k!(8R_\eta)^k} (4m^2-1)(4m^2-9)\dots[4m^2-(2k-1)] \right\}, \\ \text{Re}\{R_\eta\} &> m. \quad (26) \end{aligned}$$

В выражении (26) от $R_\eta(\eta_0)$ зависит только множитель перед фигурными скобками, который одинаков для обоих слагаемых в (25). Поэтому подставим (26) в (25), отбросив не зависящие от R_η множители, и снова используем представление для R_η :

$$|(g_n^m)_{\text{TE}}|^2 \sim \frac{\exp\{2\eta_0[2s(n+1/2) - \eta_0]\}}{4\pi s(n+1/2)\eta_0}.$$

Несложный анализ показывает, что максимального значения данная функция достигает при величине смещения оси пучка $\eta_0 = s(n+1/2) \equiv (\eta_0)_{00}$, или в абсолютных координатах:

$$\left(\frac{y_0}{a_0}\right)_{00} = \frac{(n+1/2)}{x_a}. \quad (27)$$

Поскольку для высокодобротных оптических резонансов низких порядков всегда выполняется неравенство $n > x_a$, то очевидно, что для наиболее эффективного возбуждения резонансного поля в частице ось пучка должна проходить за ее пределами. Данный результат, несмотря на его парадоксальность с точки зрения геометрической оптики, является прямым следствием рассмотренного выше принципа локализации Ван де Хюльста и свидетельствует о том, что поле резонансных мод формируется не центральной частью светового пучка, а убывающим полем его краевой части, которую образует подмножество геометрических лучей, падающих под скользящими углами к поверхности частицы.

На рис. 5 в относительных координатах приведена зависимость нормированного фактора \bar{K}_n от величины параметра смещения y_0/a_0 оси гауссового пучка (TEM_{00} , $\lambda = 0,65$) для трех резонансных мод в капле воды: TE_{60}^1 ($x_a = 49,8983$), TE_{60}^2 ($x_a = 54,2559$), TE_{60}^3 ($x_a = 53,9390$). Нормировка кривых проведена на значение фактора K_n для плоской волны – выражение (23).

Видно, что максимум данных зависимостей достигается при соответствующих значениях параметра y_0/a_0 , определяемых соотношением (27). При этом чем выше порядок резонансной моды, тем ближе положение оптимального смещения пучка к поверхности частицы.

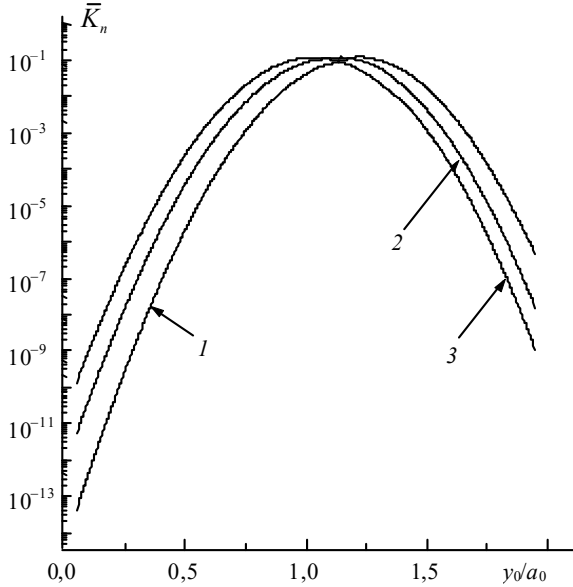


Рис. 5. Зависимость нормированного фактора \bar{K}_n от величины параметра смещения y_0/a_0 оси гауссового пучка (ТЕМ₀₀, $\lambda = 0,65$) для трех резонансных мод в капле воды: ТЕ₆₀¹ (1), ТЕ₆₀² (2) ТЕ₆₀³ (3)

Если рассматривать осевое падение гауссового пучка моды ТЕМ₀₀ на сферическую частицу ($x_0 = y_0 = z_0 = 0$), то, используя (14), получим:

$$|(g_n^m)_{TE}|^2 \sim 1/4[1 - 2s^2(n-1)(n-2)], \quad m = \pm 1.$$

Соответствующая зависимость K_n (y_0/a_0) при различных значениях параметра w_0/a_0 приведена на рис. 6. Таким образом, чем шире пучок (меньше значения s) или, другими словами, чем «ближе» он к плоской волне, тем активнее возбуждение резонансов.

Перейдем к рассмотрению кольцевых пучков ТЕМ_{dn}. Проводя те же вычисления, что и в предыдущем случае, будем иметь:

$$\mathfrak{I}[H_r(r, \theta, \varphi)] \sim \exp(-iQ_\zeta \eta_0^2) \exp[2s(n+1/2) iQ_\zeta \eta_0 \sin \varphi] \sin \varphi \times \\ \times \{is(n+1/2) \cos \varphi - s(n+1/2) \sin \varphi + \eta_0\};$$

$$(g_n^m)_{TE} = -\exp(-\eta_0^2) \{s(n+1/2)(-i)^m I_{m-1}(R_\eta) - s(n+1/2) \times \\ \times (-i)^{m-2} I_{m-2}(R_\eta) + (-i)^{m-2} \eta_0 [I_{m-1}(R_\eta) + I_{m+1}(R_\eta)]\}. \quad (28)$$

Учтем, что при $\text{Re}\{R_\eta\} \gg 1$ согласно асимптотике (26) $I_{m+1}(R_\eta) \gg I_m(R_\eta) \gg I_{m-1}(R_\eta)$.

Тогда

$$|(g_n^m)_{TE}|^2 \sim \exp(-2\eta_0^2) \{\pi(-i)^{m-2} \eta_0 I_{m+1}(R_\eta)\}^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \exp(-2\eta_0^2) \eta_0 \exp[4\eta_0 s(n+1/2)].$$

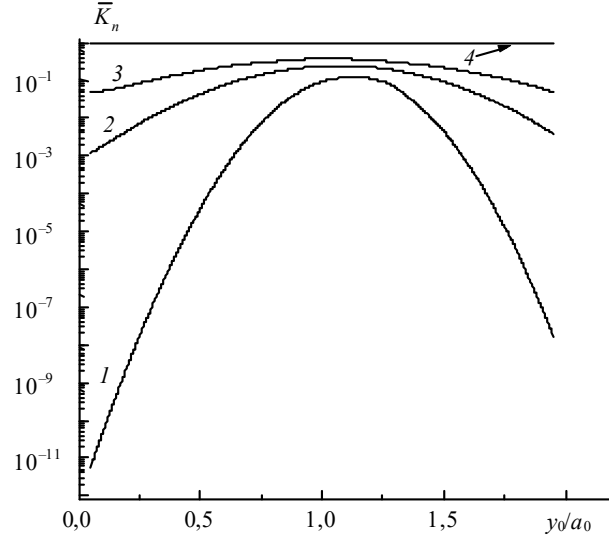


Рис. 6. Зависимость нормированного фактора \bar{K}_n от относительного смещения оси гауссового пучка y_0/a_0 (ТЕМ₀₀, $\lambda = 0,65$) при возбуждении ТЕ₆₀²-моды в капле воды и различной относительной ширине пучка: $w_0/a_0 = 0,3$ (1); 0,6 (2); 0,9 (3); ∞ (4)

Поиск на максимум в данном выражении приводит к $\eta_0 = 0$. Другими словами, для получения наилучших результатов кольцевой пучок должен быть направлен в центр частицы. Интуитивно это в общем-то и понятно, поскольку сама структура распределения интенсивности в поперечном сечении пучка представляет собой кольцо с максимумом, расположенным на расстоянии $\bar{r}_{\max} = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2} = 1/\sqrt{2}$ от центра пучка. Поэтому, направляя пучок в центр частицы и выбирая его радиус w_0 так, чтобы максимум интенсивности кольцевой зоны находился на расстоянии $(y_0/a_0)_{00} = \bar{r}_{\max}$, следует ожидать наиболее оптимального возбуждения резонансов.

Этот же результат можно получить строго из выражения (28) при условии $\eta_0 = 0$. Действительно, в этом случае единственными ненулевыми коэффициентами формы пучка будут:

$$(g_n^m)_{TE} \approx s(n+1/2) \exp[-s^2(n+1/2)^2] \times \\ \times \left\{ i \int_0^{2\pi} d\varphi (\cos \varphi \sin \varphi) \exp(-im\varphi) - \int_0^{2\pi} d\varphi \sin^2 \varphi \exp(-im\varphi) \right\} = \\ = \pi s(n+1/2) \exp[-s^2(n+1/2)^2], \quad m = \pm 2, 0. \quad (29)$$

Варьируя ширину пучка w_0 , получим максимальные значения КФП (29) при соотношении

$$(w_0/a_0)_{dn} = \sqrt{2} (n+1/2)/x_a. \quad (30)$$

Световые пучки с поперечной структурой электромагнитного поля, соответствующей модам ТЕМ₀₁ и ТЕМ₁₁, также характеризуются нулевым значением интенсивности на оси пучка (см. рис. 3, б). Следовательно, поиск максимума в коэффициентах (g_n^m) целесообразно проводить только по переменной $w_0(\eta_0 = 0)$.

Аналогично выражению (28) для TEM_{01} -моды получим:

$$\mathfrak{I}[H_r(r, \theta, \varphi)] \sim s(n + 1/2) \exp[-s^2(n + 1/2)^2] \sin^2 \varphi;$$

$$(g_n^m)_{TE} \approx \pi s(n + 1/2) \exp[-s^2(n + 1/2)^2], \quad m = \pm 2, 0. \quad (31)$$

Максимум в (31) достигается при $(w_0/a_0)_{01} = \sqrt{2} (n + 1/2)/x_a$.

Соответственно, для TEM_{11} -моды

$$\mathfrak{I}[H_r(r, \theta, \varphi)] \sim s^2(n + 1/2)^2 \exp[-s^2(n + 1/2)^2] \cos \varphi \sin^2 \varphi;$$

$$(g_n^m)_{TE} \approx (\pi/2)s^2(n + 1/2)^2 \exp[-s^2(n + 1/2)^2],$$

$$m = \pm 1, \pm 3;$$

$$(w_0/a_0)_{11} = (n + 1/2)/x_a. \quad (32)$$

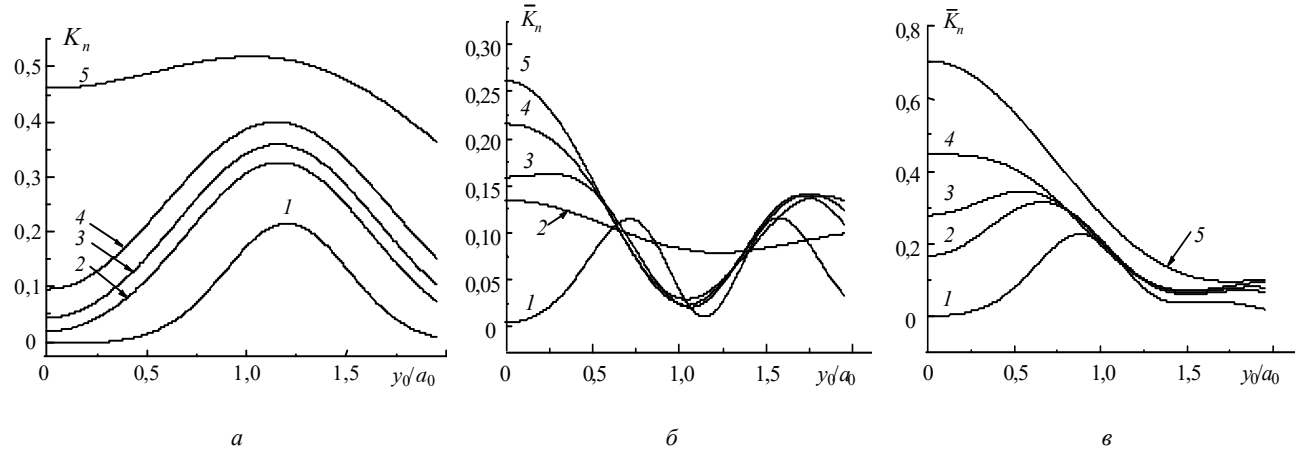


Рис. 7. Коэффициент \bar{K}_n в зависимости от относительного смещения y_0/a_0 оси пучков TEM_{00} (а), TEM_{11} (б) и TEM_{dn} (в) мод относительно центра водной капли при различных значениях относительной ширины пучка: $w_0/a_0 = 0,6$ (1); 0,9 (2); 1 (3); 1,24 (4); 2 (5)

На рис. 7 приведены значения нормированного коэффициента \bar{K}_n , отражающего, как уже упоминалось выше, эффективность возбуждения резонансов в сферической частице, в зависимости от относительного смещения оси пучков нескольких пространственных конфигураций и при различных параметрах (w_0/a_0). Расчеты проведены для капли воды с радиусом, соответствующим резонансу TE_{100}^1 -моды ($x_a = 80,99428$).

Сравнение различных графиков на данном рисунке показывает, что во всех случаях изменение ширины пучка требует тщательного выбора координаты его падения на частицу. Исключение составляет только фундаментальная гауссова мода TEM_{00} . Здесь при любых w_0 максимум коэффициента K_n наблюдается при одном и том же значении смещения пучка, определяемого по формуле (27). Рис. 8 наглядно иллюстрирует данный вывод, показывая зависимость координаты оптимального смещения оси световых пучков (y_0/a_0) от их характерной ширины.

Максимально возможные значения коэффициента \bar{K}_n для резонансной TE_{100}^1 -моды, которые могут быть достигнуты для различных типов пучков, в зависимости от их ширины приведены на рис. 9.

Из рис. 9 следует, что наилучшие условия для возбуждения TE_{nm} -резонансов в сферических частицах реализуются при освещении их TEM_{01} -модой гауссового пучка. Данная мода характеризуется тем, что $\sim 90\%$ всей энергии пучка сосредоточено в двух узких максимумах (см. рис. 2) с полушириной $d_b \approx 0,42 w_0$, которые лежат в плоскости yz , где как раз преимущественно и сконцентрирована энергия TE_{nm} -резонансных мод. Это обуславливает наилучшую связь светового поля пучка с полем резонансных мод частицы и, соответственно, высокие значения коэффициента $\bar{K}_n \approx 0,9$, близкие к идеализированному случаю падения на частицу плоской волны.

Электромагнитное поле кольцевого пучка TEM_{dn} также сконцентрировано в достаточно узкой зоне, но равномерно распределено по углу φ . Следовательно, часть энергии пучка используется неэффективно, возбуждая в дополнение к TE_{nm} -модам еще и парциальные

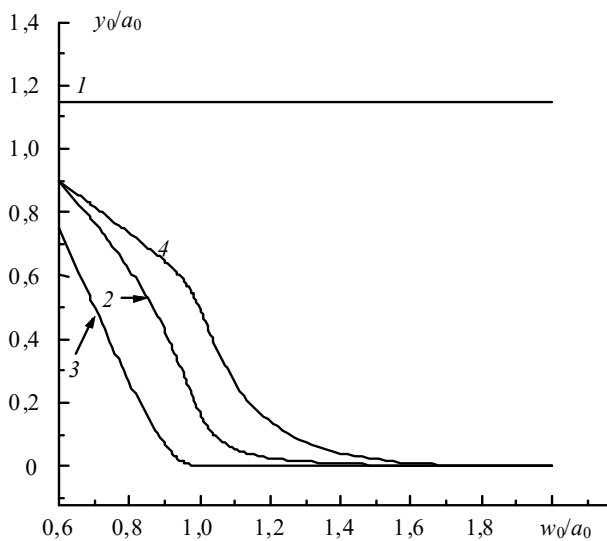


Рис. 8. Зависимость координаты оптимального смещения оси световых пучков y_0/a_0 от их характерной ширины w_0/a_0 : TEM_{00} (1), TEM_{01} (2), TEM_{11} (3), TEM_{dn} (4)

волны с другой поляризацией (ТН). В силу этой же причины низкая эффективность возбуждения резонансов реализуется для TE_{11} -пучков: $\bar{K}_n \approx 0,26$ при $w_0/a_0 = 1,24$.

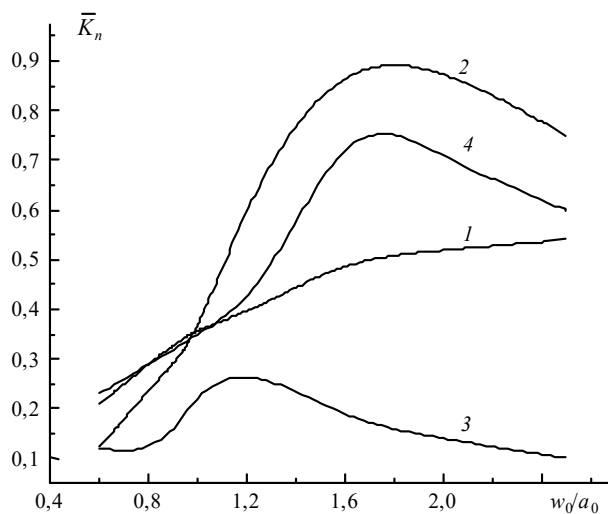


Рис. 9. Максимально возможные значения коэффициента \bar{K}_n для TE_{100}^1 резонансной моды, которые могут быть достигнуты для различных типов пучков, в зависимости от их ширины w_0/a_0 : TE_{00} (1), TE_{01} (2), TE_{11} (3), TE_{dn} (4)

Фундаментальная мода гауссова пучка TE_{00} , хотя и имеет один максимум, но он достаточно широк ($d_b \approx 0,84 w_0$), что приводит к снижению эффективности перекачки световой энергии во внутреннее поле частицы. И только достаточно широкие пучки могут конкурировать с модами TE_{01} и TE_{dn} (см. рис. 7).

Yu.E. Geints, A.A. Zemlyanov. Excitation efficiency of resonant spatial configurations of the internal optical field in spherical microparticles by focused laser beams.

The problem of excitation efficiency of dielectric microresonators (spherical particles) by laser beams is considered. The numerical investigations of resonant excitation of internal optical field in microspheres by focused high-order Hermite-Gaussian beams at both on-center and off-center illuminations are carried out. The most optimal configurations for laser beam energy coupling into cavity eigenmodes are derived depending on the beam spatial profile.

Заключение

Таким образом, резюмируя проведенные исследования, следует отметить, что для получения наиболее эффективного возбуждения электромагнитных резонансных мод в сферических частицах геометрию их облучения фокусированными световыми пучками необходимо выбирать в соответствии с пространственным профилем конкретного пучка и поляризацией возбуждаемой резонансной моды. В любом случае положение максимумов пространственного распределения поля накачки должно быть за пределами частицы на расстоянии, которое определяется принципом локализации Ван де Хюльста (выражение (27)) и однозначно связано с величиной параметра дифракции частицы и номером возбуждаемой резонансной моды.

1. Гейнц Ю.Э., Землянов А.А., Зуев В.Е., Кабанов А.М., Погодаев В.А. Нелинейная оптика атмосферного аэрозоля. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. 260 с.
2. Baer T. // Opt. Lett. 1987. V. 12. P. 392.
3. Zhang J.-Z., Leach D.H., Chang R.K. // Opt. Lett. 1988. V. 13. P. 270.
4. Lock J.A. // Appl. Opt. 1995. V. 34. P. 559.
5. Barton J.P., Alexander D.R., and Schaub S.A. // J. Appl. Phys. 1989. V. 65. P. 2900.
6. Khaled E. E. M., Hill S.C., Barber P.W. // Appl. Opt. 1994. V. 33. P. 524.
7. Kim J.S., Lee S.S. // JOSA B. 1983. V. 73. P. 303.
8. Gouesbet G., Maheu B., Grehan G. // JOSA A. 1988. V. 5. P. 1427.
9. Davis L.W. // Phys. Rev. A. 1979. V. 19. P. 1177.
10. Gouesbet G., Lock J.A., Grehan G. // Appl. Opt. 1995. V. 34. P. 2133.
11. Lock J.A., Gouesbet G. // JOSA A. 1994. V. 11. P. 2516.
12. Gouesbet G., Letellier C., Ren K.F. et al. // Appl. Opt. 1996. V. 35. P. 1537.
13. Gouesbet G., Grehan G., Maheu B. // JOSA A. 1990. V. 7. P. 998.
14. Ren K.F., Gouesbet G., Grehan G. // Appl. Opt. 1998. V. 37. P. 4218.
15. Barton J. // Appl. Opt. 1997. V. 36. P. 1303.
16. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979.