«Опт, ка атмосферы , океана», **11**, № 5 (1998)

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ

УДК 535.338.4

Ф.А. Воробьев

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЫ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ МОНОХРОМАТИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

Предлагается метод решения параболического уравнения для нелинейной среды при распространении монохроматической электромагнитной волны. Рассматриваются два случая – отсутствие и наличие ветра в атмосфере. В первом случае принимается справедливым наличие аксиально-симметричного пучка и параболическое уравнение сводится к уравнению Бернулли. Во втором случае (ветер в атмосфере есть) уравнение приводится к интегродифференциальному, которое можно решать методом итераций.

Традиционно все методы решения параболического уравнения рассматривались для линейных сред [1, 2], т.е. когда диэлектрическая проницаемость не зависит от напряженности электромагнитных волн.

В настоящей статье приводится приближенный метод решения параболического уравнения для нелинейных сред. Такая задача очень важна в атмосферной оптике [3–5] и в земной коре [6, 7]. Однако в отличие от оптики атмосферы распространение электромагнитных волн в нелинейной (но однородной) земной коре изучено слабо.

Будем исходить из параболического уравнения для случая аксиально-симметричной задачи. Как показано в монографии [4], модель аксиально-симметричного пучка не всегда справедлива. Так, при наличии ветра, как это следует из расчетов в приближении тонкой линзы, пучок в среде не будет аксиально-симметричным [4]. Тогда мы применяем другой подход, исходя из монографии В.И. Кляцкина [12].

Предположим сначала, что выполняется аксиальная симметрия (нет ветра в атмосфере). Тогда исходное параболическое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \tilde{E}}{\partial r} + 2i\,\tilde{k}_0 \frac{\partial \tilde{E}}{\partial z} + \tilde{k}_0^2\, \tilde{\tilde{\varepsilon}}(r, z)\, \tilde{E} = 0. \qquad (1)$$

Здесь

$$\tilde{k}_0^2 = \langle \varepsilon(r) \rangle\, k_0^2;\;\; k_0 = \frac{w_0}{c};\;\; \tilde{\tilde{\varepsilon}}(r) = \frac{\mathrm{e}(r) - \langle \varepsilon(r) \rangle}{\langle \varepsilon(r) \rangle}.$$

Мы предположили, что для случайно-неоднородной среды диэлектрическая проницаемость

$$\varepsilon(r) = \langle \varepsilon(r) \rangle + \tilde{\varepsilon}(r),$$

где $\langle \varepsilon(r) \rangle$ – среднее постоянное значение диэлектрической проницаемости, а $\tilde{\varepsilon}(r)$ – флуктуирующая часть диэлектрической проницаемости. Но в нелинейной среде можно считать, что

$$\tilde{\tilde{\varepsilon}}(r, z) = \tilde{\tilde{\varepsilon}}_1(r, z) + \tilde{\tilde{\varepsilon}}_2(r, z)\,|\,E\,|^2. \qquad (2)$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \tilde{E}}{\partial r} + 2i\,\tilde{k}_0 \frac{\partial \tilde{E}}{\partial z} + \tilde{k}_0^2\, \tilde{\tilde{\varepsilon}}_1(r, z)\, \tilde{E} + \tilde{k}_0^2\, \tilde{\tilde{\varepsilon}}_2(r, z)\,|\,\tilde{E}\,|^2\, \tilde{E} =$$

$$= 0. \qquad (3)$$

При

$$\tilde{\tilde{\varepsilon}}_1(r, z) = 0 \quad \tilde{\tilde{\varepsilon}}_2(r, z) = \beta_0$$

такое уравнение впервые изучалось А.М. Прохоровым и В.Н. Луговым [8], а при $\tilde{\tilde{\varepsilon}}_1(r, z) = 0$, $\tilde{\tilde{\varepsilon}}_2(r, z) = i\beta_0$ оно применялось для изучения влияния нелинейности активной среды на пространственную структуру электромагнитного поля в резонаторе [9]. В этом случае рассматривалась двухмерная задача.

Далее в уравнении (3) представим скалярное волновое поле в виде

$$\tilde{E}(r, z) = A(r, z) \exp\,[i\Phi(r, z)], \qquad (4)$$

где $A(r, z)$ – амплитуда волны; $\Phi(r, z)$ – фаза волны; причем считается, что $A(r, z)$ и $\Phi(r, z)$ – вещественные величины. Опуская вычисления производных, приведем с учетом (4) исходное уравнение, предварительно разделив реальную и мнимую части. Для вещественной части имеем

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial A}{\partial r} + \varkappa(r, z)\, A + \beta(r, z)\, A^3 = 0, \qquad (5)$$

где

$$\varkappa(r, z) = \tilde{k}_0^2\, \tilde{\tilde{\varepsilon}}_1(r, z) - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)^2 - 2\,\frac{\partial \Phi}{\partial z}\,; \qquad (6)$$

$$\beta(r, z) = \tilde{k}_0^2\, \tilde{\tilde{\varepsilon}}_2(r, z).$$

Для мнимой части получаем уравнение

$$2\,\frac{\partial A}{\partial r}\,\frac{\partial \Phi}{\partial r}+2\,\tilde{k}_0\,\frac{\partial A}{\partial z}+\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\,\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)A=0. \qquad (7)$$

Сначала рассмотрим уравнение (5). Будем его решать, используя такую замену:

$$r=a_0\,\tau^k;\;\; A=b_0\,\tau^c\,M^p\;(\tau>0;\,M>0). \qquad (8)$$

Здесь a_0, b_0, k, c, p – вещественные параметры.

При $p = 1$ такая замена была проведена в [10]. Автор этой статьи обобщил ее на случай произвольных p. Здесь τ – новый аргумент, M – новая функция. Подставляя (8) в (5), приведем последнее к виду

$$\frac{d^2M}{d\tau^2}+\frac{(p-1)}{M}\left(\frac{dM}{d\tau}\right)^2+\frac{(2c+k+1)}{\tau}\,\frac{dM}{d\tau}\,\frac{c\,(c+k)}{p\tau^2}\,M+$$

$$+\frac{a_0^2\,k^2}{p}\,\varkappa(\tau,z)\,\tau^{2(k-1)}\,M+\frac{a_0^2\,k^2\,b_0^2}{p}\,\beta(\tau,z)\,\tau^{2(k+c-1)}\,M^{2p+1}=0. \quad (9)$$

В общем случае решить точно уравнение (9) *не представляется возможным*, поэтому мы будем его решать приближенно. Предположим, что выполняется неравенство

$$\frac{d^2M}{d\tau^2}\ll\frac{(p-1)}{M}\left(\frac{dM}{d\tau}\right)^2. \qquad (10)$$

Решая такое неравенство, нетрудно получить выражение

$$\frac{M^{2-p}}{2-p}\ll C_1\,\tau+C_2, \qquad (11)$$

где C_1, C_2 – постоянные величины, определяемые из граничных условий. Константы C_1 и C_2 можно подобрать так, что может иметь место неравенство (11). Тогда мы получаем квадратное уравнение

$$\left(\frac{dM}{d\tau}\right)^2+\frac{M}{(p-1)}\,\frac{(2c+k+1)}{\tau}\,\frac{dM}{d\tau}+\frac{c(c+k)}{p(p-1)\,\tau^2}\,M^2+$$

$$+\frac{a_0^2\,k^2\,\varkappa(\tau,z)}{p(p-1)}\,\tau^{2(k-1)}M^2+\frac{a_0^2\,k^2\,\mathrm{b}(\tau,z)\,b_0^2}{p(p-1)}\,\tau^{2(k+c-1)}M^{2p+2}=0. \quad (12)$$

Если решить это уравнение как квадратное относительно $dM/d\tau$ и разложить в ряд подкоренное выражение по степеням, то в этом случае уравнение легко сводится к дифференциальному уравнению Бернулли, которое легко интегрируется.

Решая это квадратное уравнение, получаем

$$\frac{dM}{d\tau}=-\frac{M\,(2c+k+1)}{2(p-1)\,\tau}\pm\frac{M}{2}\sqrt{f(\tau,z)-\mathrm{b}(\tau,z)\,g(\mathrm{t},z)\,M^{2p}}\,. \qquad (13)$$

Здесь обозначено

$$f(\tau,z)=\frac{(2c+k+1)^2}{(p-1)^2\,\tau^2}-\frac{4c\,(c+k)}{p(p-1)\,\tau^2}-4\varkappa(\tau,z)\,\frac{a_0^2\,k^2}{p(p-1)}\,\tau^{2(k-1)}; \qquad (14)$$

$$g(\tau,z)=\frac{4a_0^2\,k^2\,b_0^2}{p(p-1)}\,\tau^{2(k+c-1)}. \qquad (15)$$

Предположим, что $a_0 > 0$, $b_0 > 0$, $p > 1$. Тогда неравенство $g(\tau, z) > 0$ будет выполняться всегда. Выражение

$$f(\tau,z)=\frac{(2c+k+1)^2}{(p-1)^2\,\tau^2}-\frac{4c\,(c+k)}{p(p-1)\,\tau^2}-$$

$$-4\,\tilde{k}_0^2\,\tilde{\tilde{\varepsilon}}_1(r,z)\,\frac{a_0^2\,k^2}{p(p-1)}\,\tau^{2(k-1)}+4\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)^2\frac{a_0^2\,k^2}{p(p-1)}\,\tau^{2(k-1)}+$$

$$+2\,\frac{\partial\Phi}{\partial z}\,\frac{a_0^2\,k^2}{p(p-1)}\,\tau^{2(k-1)} \qquad (16)$$

может быть как положительной, так и отрицательной функцией.

Если $f(\tau,z) < 0$, то при $\beta(\tau,z) > 0$, $g(\tau,z) > 0$ подкоренное выражение будет отрицательным и уравнение станет комплексным, что противоречит принятому условию вещественности функции M. Поэтому будем считать, что возможно подобрать такие параметры, при которых $f(\tau, z) > 0$. Подкоренное выражение при целом $p = p_0 > 1$ преобразуем в выражение

$$\sqrt{f(\tau,z)-\beta(\tau,z)\,g(\tau,z)\,M^{2p_0}}=$$

$$=\sqrt{f(\tau,z)}\left[1-\frac{\beta(\tau,z)\,g(\tau,z)}{f(\tau,z)}\,M^{2p_0}\right]^{1/2}. \qquad (17)$$

Полагая при этом

$$\left|\frac{\beta(\tau,z)\,g(\tau,z)}{f(\tau,z)}\,M^{2p_0}\right|\ll 1, \qquad (18)$$

можно (17) разложить в ряд. И тогда имеем

$$\left[1-\frac{\beta(\tau,z)\,g(\tau,z)}{f(\tau,z)}\,M^{2p_0}\right]^{1/2}\approx 1-\frac{\beta(\tau,z)\,g(\tau,z)}{2\,f(\tau,z)}\,M^{2p_0}. \qquad (19)$$

Поэтому с учетом (19) уравнение (13) приводится к уравнению Бернулли:

$$\frac{dM}{d\tau}+\frac{(2c+k+1)}{2(p-1)\,\tau}\,M\mp\frac{M}{2}\sqrt{f(\tau,z)}\,\pm$$

$$\pm\frac{1}{4\sqrt{f(\tau,z)}}\,\beta(\tau,z)\,g(\tau,z)\,M^{2p_0+1}. \qquad (20)$$

Это уравнение легко свести к обыкновенному линейному дифференциальному уравнению первого порядка заменой [11]

$$y = M^{1-n}; \quad n = 2p_0 + 1. \tag{21}$$

Тогда уравнение (21) примет вид

$$\frac{dy}{d\tau} + \frac{(2c+k+1)}{2(p-1)}\frac{(1-n)}{\tau} y \mp \frac{1}{2}(1-n)\sqrt{f(\tau, z)}\, y \pm$$

$$\pm \frac{\beta(\tau, z)\,(1-n)}{4\sqrt{f(\tau, z)}} g(\tau, z) = 0. \tag{22}$$

Решив уравнение (22) с граничным условием

$$y(\tau, z)\big|_{\tau=\tau_0} = y(\tau_0, z), \tag{23}$$

получим следующее выражение:

$$y(\tau, z) = \exp\left[-\int_{\tau_0}^{\tau} C_0(\tau, z)\, d\tau\right]\left\{y(\tau_0, z) - \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau'\, D_0(\tau', z) \times\right.$$

$$\left.\times \exp\left[\int_{\tau_0}^{\tau'} C_0(\tau'', z)\, d\tau''\right]\right\}. \tag{24}$$

Здесь введены обозначения:

$$C_0(\tau, z) = \frac{1}{2}\frac{(1-n)}{\tau(p_0-1)}\{(2c+k+1) \mp (p_0-1)\,\tau\sqrt{f(\tau, z)}\}; \tag{25}$$

$$D_0(\tau, z) = \frac{\mathrm{b}(\tau, z)}{4\sqrt{f(\tau, z)}}(1-n)\, g(\tau, z). \tag{26}$$

Выражение (24) нетрудно переписать в старых переменных

$$A(r, z) = b_0\, \tau^c \exp\left[-\frac{1}{2}\int_{\tau_0}^{\tau} C_0(\tau, z)\, d\tau\right] \times$$

$$\times\left[\{A^{-2}(\tau_0, z)\, b_0^2\, \tau_0^{2c}\} - \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau\, D_0(\tau, z) \times\right.$$

$$\left.\times \exp\left[\int_{\tau_0}^{\tau} d\tau'\, C_0(\tau', z)\right]\right]^{-1/2}, \tag{27}$$

где

$$\tau = [a_0^{-1} r]^{1/k}; \; d\tau = \frac{1}{k} a_0^{-1/k} r^{1/k-1}\, dr.$$

К сожалению, мы не знаем закона, по которому задана фаза волны. Предложим, что фаза задана по параболическому закону

$$\Phi(r, z) = \Phi_0(z) + \frac{r^2}{2a^2}\Phi_1(z), \tag{28}$$

откуда

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{r}{a^2}\Phi_1(z), \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = \frac{1}{a^2}\Phi_1(z).$$

Из уравнения (7) для мнимой части имеем

$$2\frac{\partial A}{\partial r}\frac{r}{a^2}\Phi_1(z) + 2\,\tilde{k}_0\frac{\partial A}{\partial z} + \left[\frac{1}{a^2}\Phi_1(z) + \frac{2}{a^2}\Phi_1(z)\right] A = 0,$$

откуда находим

$$\Phi_1(z) = -\frac{2\,\tilde{k}_0\dfrac{\partial A}{\partial z}}{\dfrac{3}{a^2}A + \dfrac{\partial A}{\partial r}\dfrac{r}{a^2}}. \tag{29}$$

Зная A, $\frac{\partial A}{\partial r}$ и $\frac{\partial A}{\partial z}$, по этой формуле мы находим $\Phi_1(z)$. При $r = 0$

$$\Phi(r, z) = \Phi_0(z).$$

Теперь рассмотрим случай, когда в атмосфере есть ветер и аксиальную симметрию применять нельзя. Рассмотрим параболическое уравнение [12]

$$\Delta_\perp U + 2i\,\tilde{k}\frac{\partial U}{\partial z} + \tilde{k}^2\,\tilde{\tilde{\varepsilon}}(z, \rho)\, U(z, \rho) = 0. \tag{30}$$

Здесь

$$\Delta_\perp U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}; \; \rho = \{x, y\}.$$

Воспользуемся методикой В.И. Кляцкина [12] и запишем это уравнение с граничным условием

$$U(0, \rho) = U_0(\rho) \tag{31}$$

в виде интегродифференциального уравнения

$$U(z, \rho) = U_0(\rho)\exp\left[i\frac{\tilde{k}}{2}\int_0^z dx\, \tilde{\tilde{\varepsilon}}(\xi, \rho)\right] + \frac{i}{2\tilde{k}}\int_0^z d\xi \times$$

$$\times \exp\left[i\frac{\tilde{k}}{2}\int_\xi^z d\eta\, \tilde{\tilde{\varepsilon}}(\eta,\rho)\right]\Delta_\perp U(\xi,\rho). \tag{32}$$

Полагаем, что

$$\tilde{\tilde{\varepsilon}}(z, \rho) = \tilde{\tilde{\varepsilon}}_1(z, \rho) + \tilde{\tilde{\varepsilon}}_2(z, \rho)\,|U(z, \rho)|^2. \tag{33}$$

Подставляя (33) в (32), получаем очень сложное интегродифференциальное уравнение

$$U(z, \rho) = U_0(\rho)\exp\left[i\frac{\tilde{k}}{2}\int_0^z d\xi\, \{\tilde{\tilde{\varepsilon}}_1(\xi, \rho) +\right.$$

$$\left. + \tilde{\tilde{\varepsilon}}_2(\xi, \rho)\,|U(\xi, \rho)|^2\}\right] + \frac{i}{2\tilde{k}}\int_0^z d\xi \times$$

$$\times\exp\left[i\frac{\tilde{k}}{2}\int_\xi^z d\eta\, \{\tilde{\tilde{\varepsilon}}_1(\eta, \rho) + \tilde{\tilde{\varepsilon}}_2(\eta, \rho)\,|U(\eta, \rho)|^2\}\right]\Delta_\perp U(\xi,\rho), \tag{34}$$

и решать его можно только методом итераций. В первом приближении мы имеем

$$U(z, \rho) = U_0(\rho) \exp\left[i\frac{\tilde{k}}{2}\int\limits_0^z d\xi \, \{\tilde{\tilde{\varepsilon}}_1(\xi, \rho) + \right.$$

$$\left. + \tilde{\tilde{\varepsilon}}_2(\xi, \rho) \left| U(0, \rho) \right|^2\} \right] + \frac{i}{2\tilde{k}} \int\limits_0^z \delta\xi \times$$

$$\times \exp\left[i\frac{\tilde{k}}{2}\int\limits_\xi^z d\eta \, \{\tilde{\tilde{\varepsilon}}_1(\eta, \rho) + \tilde{\tilde{\varepsilon}}_2(\eta, \rho) \left| U(0, \rho) \right|^2\} \right] \Delta_\perp U(0,\rho), \quad (35)$$

и так далее...

Следует отметить работу [13], которая стимулировала наши исследования. В ней не рассматриваются случайно-неоднородные среды, а изучается распространение солитона, исходя из обобщенного нелинейного уравнения Шредингера в однородной среде [14, 15].

Данную задачу нетрудно обобщить на случай распространения импульсных волн в проводящей (случайно-неоднородной) нелинейной среде, что очень важно при применении МГД-генераторов к земной коре и лазеров в атмосфере.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Т.В. Меркуловой за помощь в подготовке обзора литературы, а также Ф.Г. Корчагину за поддержку этой работы, а С.Н. Алексеенко – за полезные советы.

1. *Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И.* Введение в статистическую радиофизику. Случайные поля. М.: Наука, 1978. § 38. С. 297.
2. *Виноградова М.В., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. М.: Наука, 1979. Гл. V, IX.
3. *Зуев В.Е., Землянов А.А., Копытин Ю.Д.* Нелинейная оптика атмосферы. М.: Гидрометеоиздат, 1989.
4. *Воробьев В.В.* Тепловое самовоздействие лазерного излучения в атмосфере. М.: Наука, 1987.
5. *Петвиашвили В.И., Похотелов О.А.* Уединенные волны в плазме и атмосфере. М.: Энергоатомиздат, 1989. 199 с.
6. *Шауб Ю.Б.* // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1965. № 6. С. 76–81.
7. *Шауб Ю.Б.* Геофизическая аппаратура. Л.: Недра, 1971. № 46. С. 26–31.
8. *Луговой В.Н., Прохоров А.М.* // УФН. 1973. Т. III. Вып. 2. С. 203–247.
9. *Бергер Н.К., Воробьев Ф.А., Лукьянов Ю.Н., Студеникин Ю.Е.* Влияние нелинейности активной среды на пространственную структуру электромагнитного поля в резонаторе // Тезисы докладов, представленных на II Всесоюзную конференцию по когерентной и нелинейной оптике (г. Ташкент, 10–13 мая 1974 г.). М.: Изд-во МГУ, 1974. С. 115–116.
10. *Китаев А.В.* // УМН. 1994. Т. 49. № 1. С. 77–141.
11. *Матвеев Н.М.* Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Росвузиздат, 1962. 291 с.
12. *Кляцкин В.И.* Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. М.: Наука, 1975. 240 с.
13. *Кирейтов В.Р., Мезенцев В.К.. Смирнов Г.И., Чесноков Ю.И.* // ДАН. 1995. Т. 343. № 3. С. 317–319.
14. *Ньюэлл.* Солитоны в математике и физике. М.: Мир, 1989. 324 с.
15. *Скотт Э.* Волны в активных и нелинейных средах в применении к электронике. М.: Сов. радио, 1977. 368 с.

Институт тектоники и геофизики
Дальневосточное отделение РАН, г. Хабаровск

Поступила в редакцию
26 марта 1997 г.

F.A. Vorob'ev. **Approximate Method for Solution of Parabolic Equation for Nonlinear Medium under Propagation of Electromagnetic Simple Harmonic Wave.**

A method is proposed for solution of parabolic equation for nonlinear medium under propagation of electromagnetic simple harmonic wave. Two cases are treated – an absence and a presence of wind in the atmosphere. In the first case a presence of axially symmetric beam is taken to be true and the parabolic equation reduces to Bernoulli equation. In the second case (the wind is present), it reduced to integro-differential equation solvable by iteration method.