

В.П. Лукин

ЭФФЕКТИВНОСТЬ КОРРЕКЦИИ ОБЩИХ НАКЛОНОВ И ДЕФОКУСИРОВКИ ВОЛНОВОГО ФРОНТА

Оценивается эффективность коррекции флуктуации углов прихода и дефокусировки фазы волнового фронта, прошедшего слой турбулентной среды. В качестве датчика волнового фронта используется измеритель моментов распределения интенсивности поля в фокальной плоскости линзы. Анализируется влияние временного запаздывания фазовой коррекции, обусловленного конечностью полосы частот адаптивной системы в целом.

В этой статье будут рассмотрены возможности управления наименьшими модами разложения флуктуаций фазы волнового фронта: общими наклонами волнового фронта и его дефокусировкой. Тот факт, что мы уделяем внимание коррекции наименьших мод разложения флуктуаций фазы, обусловлен прежде всего тем, что технически управление этими модами осуществляется наиболее просто. Поэтому естественно, что исследуются прежде всего эффективность таких наиболее технически простых методов коррекции, а также вопросы влияния временного запаздывания на качество коррекции случайных наклонов волнового фронта.

Совместная коррекция наклонов и дефокусировки волнового фронта

Примерная схема [1] оптического эксперимента представлена на рисунке. Ее задача — формирование изображения удаленного объекта с помощью основного зеркала и адаптивного элемента (АЭ), устраняющего aberrации принимаемого волнового фронта. Скорректированное изображение фиксируется фоторегистратором (ФР). Другим назначением данной схемы является адаптивная фокусировка излучения лазера (ОКГ) на находящийся за слоем среды объект.

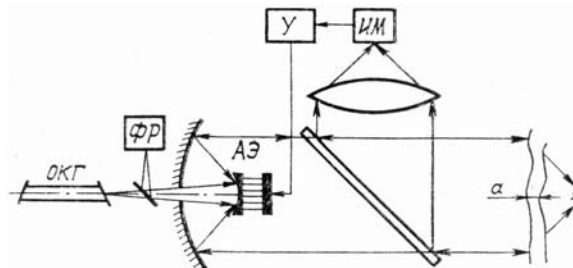


Схема оптического эксперимента: ОКГ — источник оптического излучения; ФР — фоторегистратор; АЭ — адаптивный элемент; ИМ — измеритель моментов распределения интенсивности; У — усилитель для управления адаптивным элементом; *a* — слой турбулентной атмосферы

В качестве датчика волнового фронта, обеспечивающего управление адаптивным оптическим элементом, используется измеритель моментов (ИМ) распределения интенсивности оптического поля и фокальной плоскости. Измеритель моментов регистрирует следующие функционалы:

$$M_x = \frac{\iint d^2r x I(F, \mathbf{r})}{\iint d^2r I(F, \mathbf{r})}, \quad M_y = \frac{\iint d^2r y I(F, \mathbf{r})}{\iint d^2r I(F, \mathbf{r})}, \tag{1}$$

$$M_{xx} = \frac{\iint d^2r x^2 I(F, \mathbf{r})}{\iint d^2r I(F, \mathbf{r})}, \quad M_{yy} = \frac{\iint d^2r y^2 I(F, \mathbf{r})}{\iint d^2r I(F, \mathbf{r})}$$

от распределения интенсивности поля в фокальной плоскости

$$I(F, \mathbf{r}) = \frac{\kappa^2}{4\pi^2 F^2} \iint d^2R d^2\rho A(\mathbf{R} + \rho/2) A^*(\mathbf{R} - \rho/2) \cdot \exp[\chi(0, \mathbf{R} + \rho/2) + \chi(0, \mathbf{R} - \rho/2)] \exp\{iS(0, \mathbf{R} + \rho/2) - iS(0, \mathbf{R} - \rho/2)\} \exp\left(-i\frac{\kappa}{F} \mathbf{r}\rho\right). \tag{2}$$

Подставив (2) в функционалы (1) и воспользовавшись определением обобщенной функции

$$\delta(\boldsymbol{\rho}) = \frac{\kappa^2}{4\pi^2 F^2} \iint d^2 r \exp\left(-i \frac{\kappa}{F} \mathbf{r} \boldsymbol{\rho}\right), \quad (3)$$

а также результатом дифференцирования (3)

$$\frac{\partial}{\partial x} \delta(\boldsymbol{\rho}) = \left(i \frac{\kappa}{F}\right) \frac{\kappa^2}{4\pi^2 F^2} \iint d^2 r r_x \exp\left(-i \frac{\kappa}{F} \mathbf{r} \boldsymbol{\rho}\right); \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \delta(\boldsymbol{\rho}) = \left(i \frac{\kappa}{F}\right) \frac{\kappa^2}{4\pi^2 F^2} \iint d^2 r r_y \exp\left(-i \frac{\kappa}{F} \mathbf{r} \boldsymbol{\rho}\right), \quad (5)$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}(r_x, r_y)$, получаем

$$\iint d^2 r I(F, \mathbf{r}) = \iint d^2 \rho A^2(\boldsymbol{\rho}) \exp(2\chi(0, \boldsymbol{\rho})); \quad (6)$$

$$\iint d^2 r x I(F, \mathbf{r}) = \left(\frac{F}{\kappa}\right) \iint d^2 \rho A^2(\boldsymbol{\rho}) \cdot \exp(2\chi(0, \boldsymbol{\rho})) \frac{\partial}{\partial x} S(0, \boldsymbol{\rho}); \quad (7)$$

$$\iint d^2 r y I(F, \mathbf{r}) = \left(\frac{F}{\kappa}\right) \iint d^2 \rho A^2(\boldsymbol{\rho}) \cdot \exp(2\chi(0, \boldsymbol{\rho})) \frac{\partial}{\partial y} S(0, \boldsymbol{\rho}); \quad (8)$$

$$\iint d^2 r x^2 I(F, \mathbf{r}) = \left(\frac{F}{\kappa}\right)^2 \iint d^2 \rho A^2(\boldsymbol{\rho}) \cdot \exp(2\chi(0, \boldsymbol{\rho})) \frac{\partial^2}{\partial x^2} S(0, \boldsymbol{\rho}); \quad (9)$$

$$\iint d^2 r y^2 I(F, \mathbf{r}) = \left(\frac{F}{\kappa}\right)^2 \iint d^2 \rho A^2(\boldsymbol{\rho}) \cdot \exp(2\chi(0, \boldsymbol{\rho})) \frac{\partial^2}{\partial y^2} S(0, \boldsymbol{\rho}). \quad (10)$$

В левых частях равенств (6)–(10) интегрирование выполняется в пределах фокального пятна, формируемого линзой (см. рисунок), а в правых частях — по входной апертуре $A(\boldsymbol{\rho})$ оптической системы, формирующей изображение. Здесь $\chi(0, \boldsymbol{\rho})$ и $S(0, \boldsymbol{\rho})$ — флуктуации уровня и фазы оптической волны на входной апертуре, F и R — фокусное расстояние и радиус оптической системы (эквивалентной линзы).

Воспользуемся представлением фазы $S(0, \boldsymbol{\rho})$ в виде следующего разложения [2] по ортогональным полиномам $F_j(\mathbf{r})$ ($j = 1, 2, \dots$) в пределах апертуры радиуса R :

$$S(0, \boldsymbol{\rho}) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j F_j(\boldsymbol{\rho}/R), \quad (11)$$

где

$$a_j = 1/R^2 \iint d^2 \rho A(\boldsymbol{\rho}) S(0, \boldsymbol{\rho}) F_j(\boldsymbol{\rho}/R). \quad (12)$$

При этом рассмотрим в качестве исходных полиномы Цернике [2, 6]. В табл. 1 представлены эти ортогональные на круге единичного радиуса полиномы $F_j(x, y)$ и их производные для номеров $j = 1, 2, \dots, 6$. Используя разложение фазы $S(0, \boldsymbol{\rho})$ в пределах первых шести слагаемых (11), получаем из (6), (7)

$$M_x = \left(\frac{F}{\kappa}\right) \iint d^2 \rho A^2(\boldsymbol{\rho}) \exp(2\chi(0, \boldsymbol{\rho})) \cdot \frac{\partial}{\partial x} S(0, \boldsymbol{\rho}) \left[\iint d^2 \rho A^2(\boldsymbol{\rho}) \exp(2\chi(0, \boldsymbol{\rho})) \right]^{-1} = \left(\frac{F}{\kappa}\right) a_2 \frac{2}{R} +$$

+ слагаемые типа $\left\{ \iint d^2 R A^2(\mathbf{R}) \cdot x \exp(2\chi(0, \mathbf{R})) \right\}$.

Если предположить, что флуктуации интенсивности невелики, то для симметричных апертур ($A(\mathbf{R}) = A(R)$) получаем, что слагаемые порядка $\iint d^2 R x A^2(R) \exp(2\chi(0, \mathbf{R}))$ тождественно равны нулю. Таким образом, в пределах разложения (11) на шесть слагаемых, имеем

$$M_x = \left(\frac{F}{\kappa}\right) a_2 \frac{2}{R}, \quad M_y = \left(\frac{F}{\kappa}\right) a_3 \frac{2}{R};$$

$$M_{xx} = \left(\frac{F}{\kappa}\right)^2 \left[a_4 \frac{4\sqrt{3}}{R^2} + a_6 \frac{2\sqrt{6}}{R^2} \right]; \quad M_{yy} = \left(\frac{F}{\kappa}\right)^2 \left[a_4 \frac{4\sqrt{3}}{R^2} - a_6 \frac{2\sqrt{6}}{R^2} \right].$$

Очевидно, что $M_{xx} + M_{yy} = (F/\kappa)^2 8\sqrt{3}a_4/R^2$ несет информацию только о дефокусировке волнового фронта.

Таблица 1

j	F_j	$\frac{\partial F_j}{\partial x}$	$\frac{\partial F_j}{\partial y}$	$\frac{\partial^2 F_j}{\partial x^2}$	$\frac{\partial^2 F_j}{\partial y^2}$
1	1	0	0	0	0
2	$2x/R$	$2/R$	0	0	0
3	$2y/R$	0	$2/R$	0	0
4	$\sqrt{3}(2r^2/R^2 - 1)$	$4\sqrt{3}x/R^2$	$4\sqrt{3}y/R^2$	$4\sqrt{3}/R^2$	$4\sqrt{3}/R^2$
5	$2\sqrt{6}xy/R^2$	$2\sqrt{6}y/R^2$	$2\sqrt{6}x/R^2$	0	0
6	$\sqrt{6}(x^2 - y^2)/R^2$	$2\sqrt{6}x/R^2$	$-2\sqrt{6}y/R^2$	$2\sqrt{6}/R^2$	$-2\sqrt{6}/R^2$

Попробуем теперь, используя данные оптических измерений моментов (M_x, M_y, M_{xx}, M_{yy}), выполненных в пределах апертуры $A(\rho)$, сконструировать фазу $\hat{S}(0, \rho)$, которая обеспечит наилучшую коррекцию фазы $S(0, \rho)$, описывающей фазовые искажения волнового фронта на входной апертуре. Такой фазой может быть, например,

$$\hat{S}_1(0, \rho) = \left(\frac{\kappa}{F}\right) M_x \cdot x + \left(\frac{\kappa}{F}\right) M_y \cdot y + \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa}{F}\right)^2 M_{xx} \cdot x^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa}{F}\right) M_{yy} \cdot y^2. \quad (13)$$

При этом корректирующая фаза $\hat{S}_1(0, \rho)$ вида (13) предполагает использование в адаптивном оптическом элементе управление двумя общими наклонами по осям координат, а также кривизной волнового фронта в двух направлениях. В реальном эксперименте первые два слагаемых (13) соответствуют наклонам плоского зеркала, а другие два — предполагают применение двух гибких ленточных зеркал, каждое из которых может изменять свою кривизну только по одному из направлений. Возможен вариант построения управляющей фазы $\hat{S}_1(0, \rho)$, когда взамен ленточных зеркал используются две цилиндрические линзы, расположенные скрещенно.

Альтернативной фазой для коррекции $S(0, \rho)$ может быть фаза

$$\hat{S}_2(0, \rho) = \left(\frac{\kappa}{F}\right) M_x \cdot x + \left(\frac{\kappa}{F}\right) M_y \cdot y + \frac{1}{4} \left(\frac{\kappa}{F}\right)^2 (M_{xx} + M_{yy}) (x^2 + y^2), \quad (14)$$

предполагающая управление двумя наклонами волнового фронта по осям координат и общей дефокусировкой. Такая коррекция для управления дефокусировкой волнового фронта может использовать перемещение традиционной линзы или сферического зеркала.

В связи с тем, что реально эффективность того или иного способа коррекции фазы $S(0, \rho)$ будет определяться величиной дисперсии или структурной функции остаточных фазовых флуктуаций, рассмотрим величины $S(0, \rho) - \hat{S}_1(0, \rho)$ и $S(0, \rho) - \hat{S}_2(0, \rho)$. Пусть при этом фаза $S(0, \rho)$ описывается суммой (11) с числом членов, равным шести. Соответственно получаем:

$$\begin{aligned} D_1(\rho_1, \rho_2) &= \langle \{ [S(0, \rho_1) - \hat{S}_1(0, \rho_1)] - [S(0, \rho_2) - \hat{S}_1(0, \rho_2)] \}^2 \rangle = \\ &= \left\langle \left[\frac{2\sqrt{6}}{R^2} a_5 (x_1 y_1 - x_2 y_2) \right]^2 \right\rangle; \\ D_2(\rho_1, \rho_2) &= \langle \{ [S(0, \rho_1) - \hat{S}_2(0, \rho_1)] - [S(0, \rho_2) - \hat{S}_2(0, \rho_2)] \}^2 \rangle = \\ &= \left\langle \left[\frac{2\sqrt{6}}{R^2} a_5 (x_1 y_1 - x_2 y_2) + \sqrt{6} \frac{a_6}{R^2} ((x_1^2 - y_1^2) - (x_2^2 - y_2^2)) \right]^2 \right\rangle. \end{aligned}$$

Здесь усреднение $\langle \dots \rangle$ выполняется по ансамблю реализаций и использование только шести членов в (11) соответствует учету первого (наибольшего по величине дисперсии) члена в D_1 и D_2 . Ввиду ортогональности модовых составляющих (11) получаем:

$$D_1(\rho_1, \rho_2) = \frac{24 \langle a_5^2 \rangle}{R^4} (y_1 x_1 - y_2 x_2)^2;$$

$$D_2(\rho_1, \rho_2) = \frac{24 \langle a_5^2 \rangle}{R^4} (y_1 x_1 - y_2 x_2)^2 + \frac{6 \langle a_6^2 \rangle}{R^4} ((x_1^2 - y_1^2) - (x_2^2 - y_2^2))^2,$$

где $\langle a_5^2 \rangle, \langle a_6^2 \rangle$ – дисперсии астигматизма [2, 6] волнового фронта. Величина разности этих структурных функций

$$\delta(\rho_1, \rho_2) = D_2 - D_1 = \frac{6 \langle a_6^2 \rangle}{R^4} [(x_1^2 - y_1^2) - (x_2^2 - y_2^2)]$$

характеризует относительно меньшую эффективность коррекции типа (14) по сравнению с коррекцией (13). Найдем среднее значение δ по всей апертуре

$$\Delta = \iint d^4 \rho_{1,2} A(\rho_1) A^*(\rho_2) \delta(\rho_1, \rho_2) = \frac{24 \langle a_6^2 \rangle}{R^4} \iint d^4 \rho_{1,2} A(\rho_1) A^*(\rho_2) x_1^2 = 18 \langle a_6^2 \rangle \pi^2 R^4,$$

и, умножив на $\frac{\kappa^2}{4\pi^2 F^2}$, получим

$$\Delta' = \Delta \frac{\kappa^2}{4\pi^2 F^2} = \frac{9}{2} \langle a_6^2 \rangle \left(\frac{\kappa R^2}{F} \right)^2.$$

Для сравнения проведем усреднение по апертуре структурной функции $D_1(\rho_1, \rho_2)$:

$$\langle D_1 \rangle = \frac{24 \langle a_5^2 \rangle}{R^4} \iint d^4 \rho_{1,2} A(\rho_1) A^*(\rho_2) (x_1 y_1 - x_2 y_2)^2 = 48 \langle a_5^2 \rangle R^4 \left\{ \frac{\pi^2}{4} - 1 \right\}.$$

Отношение Δ' к $\langle D_1 \rangle \frac{\kappa^2}{4\pi^2 F^2}$ оказывается равным:

$$\frac{\Delta'}{\langle D_1 \rangle \frac{\kappa^2}{4\pi^2 F^2}} = \frac{3}{8} \left(\frac{\pi^2}{\pi^2/4 - 1} \right) \approx 2,5.$$

Итак, относительное несовершенство коррекции типа (14) по сравнению с (13) (при рассмотрении структурных функций, усредненных по апертуре) оказывается равным 2,5.

В то же время коррекция (14) по сравнению с (13) является технически более простой: используется изменение кривизны волнового фронта. Для этого применяются «обычные» линзы или зеркала, которые перемещают вдоль их оптической оси. Более эффективная коррекция (13) требует раздельного управления кривизной волнового фронта по двум ортогональным осям, что требует создания специального управляемого оптического элемента: это может быть пара гибких ленточных зеркал, которые меняют кривизну волнового фронта по одному из направлений.

Далее, для коррекции типа (13) рассчитаем распределение средней интенсивности в фокальной плоскости

$$\langle I(F, \mathbf{r}) \rangle = \frac{\kappa^2}{4\pi^2 F^2} \iint d^4 \rho_{1,2} A(\rho_1) A^*(\rho_2) \cdot \langle \exp \{ \chi(0, \rho_1) + \chi(0, \rho_2) + i[(S(0, \rho_1) - \hat{S}_1(0, \rho_1)) - (S(0, \rho_2) - \hat{S}_1(0, \rho_2))] \} \rangle \exp \left(-i \frac{\kappa}{F} \mathbf{r}(\rho_1 - \rho_2) \right). \quad (15)$$

Усреднение подынтегрального выражения (15) выполняется по флуктуациям неоднородной турбулентной среды, в пределах которой распространяется оптическое излучение. При усреднении в (15) предположим, что флуктуации уровня незначительны по сравнению с остаточными флуктуациями фазы $S - \hat{S}_1$, тогда значение осевой средней интенсивности запишется в виде

$$\langle I(F, 0) \rangle = \frac{\kappa^2}{4\pi^2 F^2} \iint d^4 \rho_{1,2} A(\rho_1) A^*(\rho_2) \cdot \exp \left\{ -12 \langle a_5^2 \rangle \frac{(x_1 y_1 - x_2 y_2)^2}{R^4} \right\}. \quad (16)$$

Далее рассмотрим различные методы вычисления (16). Используя [3], выполним интегрирование в (16) для гауссовых апертур

$$A(\rho) = \exp(-\rho^2/2R^2)$$

и получим

$$\frac{\langle I(F, 0) \rangle}{\Omega^2} = \frac{V\bar{\pi}}{2} \cdot \frac{\exp(1/48 \langle a_3^2 \rangle)}{V48 \langle a_3^2 \rangle} \left[1 - \Phi\left(\frac{1}{V48 \langle a_3^2 \rangle}\right) \right], \quad (17)$$

где $\Phi(x)$ — интеграл вероятности; $\Omega = \kappa R^2/F$ — волновое число приемной апертуры; $\langle a_3^2 \rangle = 7,36 \cdot 10^{-2} (R/r_0)^{5/3}$ — дисперсия флуктуаций астигматизма [2] волнового фронта. Для значений $\sqrt{48 \langle a_3^2 \rangle} \ll 1$ можно воспользоваться асимптотикой [4] для функции $\Phi(x)$:

$$\frac{V\bar{\pi}}{2} \left\{ 1 - \Phi\left(\frac{1}{V48 \langle a_3^2 \rangle}\right) \right\} \approx \frac{\exp(-1/48 \langle a_3^2 \rangle)}{2} V48 \langle a_3^2 \rangle \times \\ \times \left\{ 1 - \frac{(48 \langle a_3^2 \rangle)}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2^2} (48 \langle a_3^2 \rangle)^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3} 48 \langle a_3^2 \rangle^3 + \dots \right\}.$$

Для противоположного случая $48 \langle a_3^2 \rangle \gg 1$ используем таблицы [4] для функции $\Phi(x)$. В табл. 2 приведены значения $\langle I(F, 0) \rangle / \Omega^2$ (второй столбец) как функции параметра (R/r_0) .

В противоположность численному можно использовать асимптотическое вычисление в (16). Для симметричных приемных апертур ($A(\rho) = A(\rho)$) воспользуемся, при условии малости величины дисперсии остаточных фазовых флуктуаций, разложением в ряд экспоненциального члена в (16). Нетрудно показать, что

$$\langle I(F, 0) \rangle = \frac{\kappa^2}{4\pi^2 F^2} \iint d^4 \rho_{1,2} A(\rho_1) A^*(\rho_2) - 24 \frac{\langle a_3^2 \rangle}{R^4} \frac{\kappa^2}{4\pi^2 F^2} \iint d^4 \rho_{1,2} A(\rho_1) A^*(\rho_2) x_1^2 y_1^2. \quad (18)$$

Используя гауссову апертуру, из (18) имеем

$$\langle I(F, 0) \rangle = \left(\frac{\kappa R^2}{F}\right)^2 [1 - 24 \langle a_3^2 \rangle] = \Omega^2 [1 - 1,77 (R/r_0)^{5/3}]. \quad (19)$$

Таблица 2

R/r_0	$\langle I(F, 0) \rangle / \Omega^2 (17)$	$\langle I(F, 0) \rangle / \Omega^2 (19)$
0	1,0	1,0
0,03	0,995	0,99
0,07	0,980	0,980
0,10	0,966	0,962
0,15	0,936	0,925
0,20	0,896	0,88
0,30	0,73	0,76
0,50	0,53	0,440
0,70	0,330	
1,0	0,280	
1,5	0,228	
2,0	0,194	
2,5	0,169	
3,0	0,151	
3,5	0,135	
4,0	0,123	

Из выражения (19) следует, что параметр Штреля зависит от величины отношения (R/r_0) , характеризующего интенсивность турбулентности на оптической трассе. В табл. 2 значения $\langle I(F, 0) \rangle / \Omega^2$, вычисленные по формуле (19), приведены в третьем столбце. Область применимости формулы (19) $(R/r_0) \leq 0,70$. Сравнение второго и третьего столбца табл. 2 позволяет определить область достоверно-

сти описания (19). В то же время, если воспользоваться данными работы [2], то можно оценить выигрыш в дисперсии фазовых искажений, обусловленный коррекцией наклонов и дефокусировки. Оказывается, что $\sum_{i=2}^6 \langle a_i^2 \rangle = 9,68 \cdot 10^{-1} (2R/r_0)^{5/3}$, тогда как $\langle a_5^2 \rangle = 2,32 \cdot 10^{-2} (2R/r_0)^{5/3}$. Отношение соответствующих дисперсий составляет 41,7 раза. Следовательно, можно считать, что действие адаптивной коррекции общих наклонов и дефокусировки примерно в 9,3 раза увеличивает эквивалентный радиус когерентности.

Временное запаздывание и коррекция наклонов волнового фронта

1. В настоящем разделе рассматривается вопрос о требованиях к полосе частот, необходимой для обработки фазовых искажений адаптивной оптической системой.

Пусть наша адаптивная оптическая система (см. рисунок) формирует изображение в условиях турбулентной атмосферы. По классификации, принятой в [1,5], используется адаптивная оптическая система «постоянного запаздывания». Параметр Штреля системы как функцию временной задержки τ (τ – время между моментами измерения и управления) в этом случае можно записать [7] в виде

$$\langle I(\tau) \rangle = \frac{\kappa^2}{4\pi^2 F^2} \iint d^2 \rho_{1,2} A(\rho_1) A^*(\rho_2) \exp\left(-i\kappa \frac{(\rho_1^2 - \rho_2^2)}{2F}\right) \times \\ \times \exp\left\{-12 \langle a_4^2 \rangle \frac{\tau^2 v^2}{R^4} (\rho_1 - \rho_2)^2\right\}, \quad (20)$$

где $A(\rho)$ – апертурная функция оптического устройства, формирующего изображение; $\kappa = 2\pi/\lambda$ – волновое число излучения; F – фокусное расстояние; R – радиус приемной апертуры; $\langle a_4^2 \rangle$ – дисперсия флуктуаций дефокусировки [1, 2] излучения; v – средняя скорость поперечного ветра; τ – временная задержка. В работе [2] для $\langle a_4^2 \rangle$ получено следующее выражение:

$$\langle a_4^2 \rangle = 0,074 (R/r_0)^{5/3}, \quad (21)$$

где r_0 – радиус когерентности плоской волны, упавшей на апертуру оптического устройства. При получении выражения (20) учитывался только первый член, обуславливающий остаточные фазовые искажения.

Поскольку для нас важно найти требования к допустимой величине временной задержки τ , воспользуемся разложением в ряд второй экспоненты под интегралом выражения (20) и получим

$$\langle I(\tau) \rangle = \frac{\kappa^2}{4\pi^2 F^2} \iint d^2 \rho_{1,2} A(\rho_1) A^*(\rho_2) \exp\{-i\kappa(\rho_1^2 - \rho_2^2)/2F\} - \\ - \frac{12 \langle a_4^2 \rangle v^2 \tau^2}{\lambda^2 F^2 R^4} \iint d^2 \rho_{1,2} A(\rho_1) A^*(\rho_2) \cdot (\rho_1 - \rho_2)^2 \exp(-i\kappa(\rho_1^2 - \rho_2^2)/2F) \quad (22)$$

Следует отметить, что вычисление интегралов, входящих в (22), существенно зависит от вида апертурной функции $A(\rho)$.

Рассмотрим два типа апертур: гауссову и круглую.

Для гауссовой апертуры

$$A(\rho) = \exp(-\rho^2/2R^2)$$

имеем значение осевой интенсивности в вакууме

$$I(0) = \Omega^2/(\Omega^2 + 1), \text{ где } \Omega = (\kappa R^2)/F.$$

При круглой апертуре радиуса R : $I(0) = 4\sin^2(\Omega/4)$.

Проведя вычисления в (22) для круглой приемной апертуры ($\Sigma = \pi R^2$), имеем

$$\langle I(\tau) \rangle = \left(\frac{\Omega}{2}\right)^2 \left\{ \frac{\sin^2(\Omega/4)}{(\Omega/4)^2} - 12 \langle a_4^2 \rangle \frac{\tau^2 v^2}{R^2} \cdot \frac{J_2(\Omega)}{(\Omega/2)^2} \right\}. \quad (23)$$

Из анализа (23) видно, что, задавшись определенным уровнем допустимого уменьшения значения осевой интенсивности (параметра Штреля), можно сформулировать требования к временной задержке τ или к полосе частот Δf ($\Delta f \sim 1/\tau$).

2. Отметим, что мы рассматривали случай полной фазовой коррекции при условии временного запаздывания между измерением фазы волнового фронта и управлением. Практически, как правило, удастся реализовать управление только отдельными модовыми составляющими из всего спектра фазовых искажений. Ниже рассмотрим динамические характеристики при управлении только наклонами волнового фронта на апертуре в целом. При этом фазовая коррекция осуществляется по сигналу смещения центра тяжести изображения опорного источника.

Предположим, что имеет место запаздывание и фазовая коррекция осуществляется на основе предыдущих измерений наклонов волнового фронта как целого. Находим остаточные фазовые искажения:

$$\Delta(\rho, \tau) = S(\rho, t + \tau) - \frac{\rho}{\Sigma} \iint_{\Sigma} d^2 R \nabla_{R} S(\mathbf{R}, t) \quad (24)$$

(при оценке смещения центра тяжести изображения пренебрегалось влиянием флуктуаций интенсивности). Дисперсия остаточных смещений центра тяжести изображения, обусловленных запаздыванием в системе обработки наклонов волнового фронта, будет равна:

$$\begin{aligned} \sigma_c^2(\tau) &= \frac{1}{\kappa^2 \Sigma^2} \iint_{\Sigma} d^4 \rho_{1,2} \nabla_{\rho_1} \left\{ S(\rho_1, t + \tau) - \frac{\rho_1}{\Sigma} \iint_{\Sigma} d^2 R_1 \nabla_{R_1} S(\mathbf{R}_1, t) \right\} \times \\ &\times \nabla_{\rho_2} \left\{ S(\rho_2, t + \tau) - \frac{\rho_2}{\Sigma} \iint_{\Sigma} d^2 R_2 \nabla_{R_2} S(\mathbf{R}_2, t) \right\} >. \end{aligned} \quad (25)$$

Усреднение в (25) проводится по ансамблю реализаций случайного поля. Рассмотрим отдельно следующий член:

$$\langle \nabla_{\rho_1} S(\rho_1, t + \tau) \nabla_{\rho_2} (\rho_2 \rho_c) \rangle = \nabla_{\rho_1} \nabla_{\rho_2} \{ \langle S(\rho_1, t + \tau) \cdot \rho_x \rangle x_2 + \langle S(\rho_1, t + \tau) \rho_y \rangle y_2 \},$$

где

$$\rho_c = \frac{1}{\Sigma} \iint_{\Sigma} d^2 R \nabla_{R} S(\mathbf{R}, t), \quad \rho_c = \rho_c(\rho_x, \rho_y).$$

В результате получаем для одного из слагаемых в (25)

$$\begin{aligned} &\iint_{\Sigma} d^4 \rho_{1,2} d^2 R \nabla_{\rho_1} \nabla_{\rho_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \langle S(\rho_1, t + \tau) S(\mathbf{R}, t) \rangle x_2 + \frac{\partial}{\partial y} \langle S(\rho_1, t + \tau) S(\mathbf{R}, t) \rangle y_2 \right\} = \\ &= -\frac{1}{2} \iint_{\Sigma} d^4 \rho_{1,2} d^2 R \cdot \nabla_{\rho_1} \nabla_{\rho_2} \left\{ x_2 \frac{\partial}{\partial x} D_s(|(\rho_1 - \mathbf{R}) + \mathbf{v}\tau|) + y_2 \frac{\partial}{\partial y} D_s(|(\rho_1 - \mathbf{R}) + \mathbf{v}\tau|) \right\}. \end{aligned}$$

В последнем выражении оператор $\nabla_{\rho_1} \nabla_{\rho_2}$ фактически приводит к сумме следующего вида:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \{ \dots \} + \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{\partial}{\partial y_2} \{ \dots \}.$$

При вычислении

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x_1} D_s(|(\rho_1 - \mathbf{R}) + \mathbf{v}\tau|)$$

используем структурную функцию фазы в виде

$$D_s(|\rho_1 - \mathbf{R}| + \mathbf{v}\tau) = 4\pi\kappa^2 \int dx C_n^2(x) \int \int d^2 \mathbf{x} \Phi_n^{(0)}(\mathbf{x}) \cdot [1 - \exp(i\mathbf{x}(\rho_1 - \mathbf{R}) + i\mathbf{x}\mathbf{v}\tau)], \quad (26)$$

где $\int dx C_n^2(x)$ — интегральный профиль интенсивности турбулентности; $\Phi_n^{(0)}(\kappa) = 0,033\kappa^{-11/3}$ — спектр турбулентности Колмогорова—Обухова; \mathbf{v} — вектор средней скорости ветра.

Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x_1} \exp(i\mathbf{x}(\rho_1 - \mathbf{R})) = \mathbf{x}_2 \exp(i\mathbf{x}(\rho_1 - \mathbf{R})), \quad \mathbf{x} = (x_2, x_3);$$

$$\int_{\Sigma} d^4 p_{1,2} d^2 R \exp(i\mathbf{z}(\rho_1 - \mathbf{R})) = (\pi R^2)^3 \frac{J_1^2(\mathbf{x}R)}{(\mathbf{x}R/2)^2},$$

суммируя все сделанные замечания, выражение (25) приводим к виду

$$\sigma_c^2(\tau) = 16 \pi^2 0,033 \int dx C_n^2(x) R^{-1/3} \int_0^\infty dz \frac{\left[1 - J_0\left(\frac{v\tau}{R} z\right)\right]}{z^{8/3}} J_1^2(z). \quad (27)$$

Проанализируем поведение дисперсии остаточных флуктуаций смещения изображения как функции параметра $(v\tau/R)$. При достаточно больших значениях $(v\tau/R)$ выражение (27) стремится к своему предельному значению

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \sigma_c^2(\tau) = 16 \pi^2 0,033 \int dx C_n^2(x) \int_0^\infty dz \frac{J_1^2(z)}{z^{8/3}},$$

где последний интеграл

$$\int_0^\infty dz \frac{J_1^2(z)}{z^{8/3}} = \frac{\Gamma(8/3) \Gamma(1/6)}{2^{2/3} \Gamma(11/6) \Gamma(11/6) \Gamma(17/6)} \approx 0,866.$$

Таким образом, для адаптивной системы, имеющей большую постоянную времени $(v\tau \gg R)$, остаточная дисперсия флуктуаций смещений изображения

$$\sigma_c^2(\infty) = 4,51 \int dx C_n^2(x) R^{-1/3}. \quad (28)$$

Для адаптивной оптической системы наиболее характерно, когда временная задержка $\tau \ll R/v$, при этом

$$1 - J_0\left(\frac{v\tau}{R} z\right) \approx \left(\frac{v\tau}{2R} z\right)^2 \frac{1}{2!}.$$

Из (27) получаем

$$\sigma_c^2(\tau) = 2\pi^2 0,033 \int dx C_n^2(x) R^{-1/3} \left(\frac{v\tau}{R}\right)^2 \int_0^\infty dz \frac{J_1^2(z)}{z^{2/3}}.$$

Поскольку

$$\int_0^\infty dz \frac{J_1^2(z)}{z^{2/3}} = \frac{\Gamma(2/3) \Gamma(7/6)}{2^{2/3} \Gamma(5/6) \Gamma(5/6) \Gamma(11/6)} \approx 0,663,$$

то

$$\sigma_c^2(\tau) = 0,432 \int dx C_n^2(x) R^{-1/3} \left(\frac{v\tau}{R}\right)^2. \quad (29)$$

Найдем отношение (28) к (29):

$$\frac{\sigma_c^2(\infty)}{\sigma_c^2(\tau)} = \frac{4,51 \int dx C_n^2(x) R^{-1/3}}{0,432 \int dx C_n^2(x) R^{-1/3}} \left(\frac{v\tau}{R}\right)^{-2} = 10,44 \left(\frac{v\tau}{R}\right)^{-2}.$$

Охарактеризуем эффективность коррекции как функцию временной задержки τ :

$$K_{\text{эф}} = \sqrt{\frac{\sigma_c^2(\infty)}{\sigma_c^2(\tau)}} = 3,23 (R/v\tau).$$

С ростом скорости ветра v и временной задержки τ эффективность, характеризующая во сколько раз $\sigma_c^2(\infty)$ больше, чем $\sigma_c^2(\tau)$ падает. Коррекция будет иметь смысл, если $K_{\text{эф}} > 1$, т.е. $3,23(R/v\tau) > 1$. Следовательно, временная задержка должна удовлетворять условию $\tau < 3,23R/v$. Таким образом, требуемая полоса частот адаптивной оптической системы должна быть порядка $\Delta f \approx 1/\tau > 0,31v/R$, т.е. быть тем шире, чем выше скорость ветра и меньше размер апертуры.

Кстати, если рассмотреть разность

$$\sigma_c^2(\infty) - \sigma_c^2(\tau) = \text{const} f \left[\left(\frac{v\tau}{R} \right)^{-1/2} \right],$$

то окажется, что при больших временных задержках относительная эффективность коррекции спадает со скоростью $(v\tau/R)^{-1/2}$.

Сравнение полученных результатов с выводами [1, стр. 49] показывает, что в настоящей работе отсутствует зависимость от r_0 — радиуса когерентности. Это связано прежде всего с тем, что выражения для $\sigma_c^2(\infty)$ и $\sigma_c^2(\tau)$ имеют отношение не ко всему спектру турбулентных неоднородностей, а только к таким, которые превосходят размер апертуры R , приводя к смещению изображения, тогда как неоднородности, меньше R , приводят к искажениям изображения.

1. Лукин В. П. Атмосферная адаптивная оптика. Новосибирск: Наука, 1986. 284 с.
2. Wang J. Y., Markey J. K. // J. Opt. Soc. Amer. 1978. V. 68. № 1. P. 78–87.
3. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.
4. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1964.
5. Lukin V. P., Zuev V. E. // Applied Opt. 1987. V. 27. № 1. P. 139–141.
6. Noll R. J. // J. Opt. Soc. Amer. 1976. V. 66. № 2. P. 207–211.
7. Лукин В. П., Миронов В. Л. // Квантовая электроника. 1985. Т. 12. № 9. С. 1959–1961.

Институт оптики атмосферы СО АН СССР,
Томск

Поступила в редакцию
2 января 1989 г.

V. P. Lukin. The Efficiency of the Wave Front Corrections for the General Slope and Defocusing.

The efficiency of the wave front correction for the arrival angles fluctuations, and for the defocusing of its phase occurring in the turbulent medium is assessed in the paper. The device measuring the momenta of the field intensity distribution at the focal plane of a lens is used as a wave front sensor. The influence of the phase correction delay time caused by the finiteness of the whole adaptive system frequency band is analyzed in the paper.