

С.И. Кавьянов, С.В. Стрепетова

**ОБ УЧЕТЕ ОБЛАСТИ ИЗМЕНЕНИЯ РЕШЕНИЯ ПРИ ОБРАЩЕНИИ  
УРАВНЕНИЯ ТИПА СВЕРТКИ**

Рассматриваются регуляризованные алгоритмы численного решения интегрального уравнения типа свертки, позволяющие наряду с используемой обычно априорной информацией о гладкости восстанавливаемой функции учитывать данные об области ее изменения. В численном эксперименте исследуется влияние учета такого рода данных на качество восстановления. Предлагается итерационный алгоритм восстановления положительно определенных функций, рассматриваются способы адаптации в условиях априорной неопределенности.

**Введение**

Одной из наиболее часто встречающихся на практике обратных задач является решение уравнения типа свертки

$$Au \equiv \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) u(\tau) d\tau = f(t) \quad (1)$$

относительно функции  $u(t)$ , где  $A$  обозначает оператор свертки с ядром  $h(t - \tau)$ , зависящим от разности аргументов  $t$  и  $\tau$ ,  $f(t)$  — экспериментально измеряемая функция.

Некорректность этой задачи приводит к необходимости использования той или иной априорной информации о решении, в качестве которой наиболее часто используются предположения о гладкости искомой функции. Количественно степень гладкости решения характеризуется величиной так называемого стабилизирующего функционала го порядка [ 1 ]:

$$\Omega [u] = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{n=0}^p q_n \left( \frac{d^n u}{dt^n} \right)^2 \right\} dt = \int_{-\infty}^{\infty} M(\omega) |\tilde{u}(\omega)|^2 d\omega, \quad (2)$$

где

$$M(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^p q_n \omega^{2n}, \quad (3)$$

$q_n$  — неотрицательные коэффициенты;  $q_p > 0$ ; тильда над  $u$  означает преобразование Фурье;  $\omega$  — угловая частота. Регуляризованное решение уравнения (1) находится из условия минимума функционала (2) при заданном (в квадратичной метрике) уровне погрешности правой части (1), что приводит к задаче нахождения минимума по  $u$  сглаживающего функционала [1]:

$$\Phi_{\alpha} [u] = \int_{-\infty}^{\infty} (Au - f)^2 dt + \alpha \Omega [u] \quad (4)$$

при заданном значении параметра регуляризации  $\alpha > 0$ . Решение этой задачи находится обратным преобразованием Фурье функции

$$\hat{\tilde{u}}(\omega) = \frac{\tilde{f}(\omega)}{\tilde{h}(\omega)} \cdot \frac{|\tilde{h}(\omega)|^2}{|\tilde{h}(\omega)|^2 + \alpha M(\omega)}. \quad (5)$$

Оптимальное регуляризованное решение (с минимальной среднеквадратической ошибкой восстановления) можно получить, зная спектральные плотности мощности искомой функции  $R_u(\omega)$  и погрешность  $\epsilon(t)$  измерения правой части (1)  $R_{\epsilon}(\omega)$ , полагая в (5)

$$\alpha M(\omega) = R_\varepsilon(\omega) / R_u(\omega). \quad (6)$$

Это решение совпадает с результатом применения оптимальной линейной фильтрации по Винеру [1].

Рассмотренные виды априорной информации имеют весьма общий характер и не всегда обеспечивают требуемое качество восстановления. Так, во многих обратных задачах априори известна область допустимых значений (ОДЗ) решения. В частности, оно может быть положительно определено, и появление отрицательных значений приводит к потере физического смысла решения [2, 3]. В этом случае минимум среднеквадратической ошибки восстановления уже не является критерием оптимальности алгоритма, и задача безусловной минимизации функционала (4) становится условной с ограничениями типа неравенств на функцию  $u(t)$ . В общем виде такая задача не имеет аналитического решения, что приводит к необходимости использования весьма трудоемких численных методов минимизации [4]. При этом объем вычислений неизмеримо возрастает по сравнению с алгоритмом (5), реализованным в частотной области.

В настоящей работе рассматриваются некоторые способы учета априорных предположений об области изменения решения при обращении уравнения (1), в численном эксперименте исследуется влияние этих предположений на точность восстановления, предлагается итерационный алгоритм восстановления положительно определенных функций, дающий большой выигрыш в скорости вычислений по сравнению с численными методами минимизации.

### Влияние априорных ограничений на качество восстановления

Наиболее простым способом учета априорных ограничений типа неравенств

$$\beta(t) < u(t) < \gamma(t) \quad (7)$$

является численная минимизация (4) как функции  $N$  переменных  $u(t_1), \dots, u(t_N)$  с учетом (7), однако для больших  $N$  такая задача весьма трудоемка. Существенное преимущество дает сведение задачи с ограничениями к задаче безусловной минимизации [4]. В данной работе ограничения (7) учитывались путем последовательного использования дробно-линейного и логарифмического преобразования области изменения ( $\beta, \gamma$ ) искомой функции  $u$  [3] (для сокращения записи опускаем аргументы функций)

$$z(u) = \ln \left\{ \frac{au + b}{cu + d} \right\}, \quad \frac{b}{a} = -\beta, \quad \frac{d}{c} = -\gamma, \quad ad \neq bc, \quad (8)$$

однозначно отображающего эту область на всю числовую ось,  $z \in (-\infty, \infty)$ , причем отношение  $a/c$  можно брать произвольным. Обратное отображение имеет вид

$$u(z) = \frac{b - d \exp z}{c \exp z - a}. \quad (9)$$

Подставив (9) с учетом (8) в (1) и построив для получившегося при этом нелинейного относительно  $z(t)$  интегрального уравнения сглаживающий функционал Тихонова, приходим к задаче безусловной минимизации

$$\Phi_\alpha[z] = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) \frac{\beta(\tau) - \exp z(\tau)}{1 - \exp z(\tau)/\gamma(\tau)} d\tau - f(t) \right\}^2 dt + \alpha \Omega[z]. \quad (10)$$

Численная минимизация (10) осуществлялась с использованием пакета прикладных программ диалоговой системы оптимизации (ДИСО-БЭСМ), разработанной на ВЦ АН СССР [4], при дискретизации  $z(t)$  по равномерной сетке из 16 точек  $t_i$ . Поиск минимума методом сопряженных градиентов занимал порядка 20 мин машинного времени ЭВМ БЭСМ-6. Результаты модельных расчетов для различных видов априорных ограничений на  $u(t)$  приведены на рис. 1. Модельная функция  $u(t)$  в виде суммы двух гауссовых кривых приведена на рис. 1, а. Здесь же приведена функция  $f(t)$ , полученная согласно (1), где  $h(t)$  задавалась гауссовой кривой, и результаты восстановления  $u(t)$  согласно (5) (без учета априорных ограничений) при  $M(\omega) = 1$  и двух значениях параметра  $\alpha$ , подобранных эмпирически. На рис. 1, б приведены результаты, полученные минимизацией (10) для трех вариантов априорных ограничений вида (7):

- а)  $\beta(t) = 0, \gamma(t) \rightarrow \infty$  (положительная определенность решения);
- б)  $\beta(t) = 0, \gamma(t) = u_m f(t) / f_m$  (индекс  $m$  означает максимальное значение, предполагается, что  $u_m$  известно);

в)  $\beta(t) = 0$ ,  $\gamma(t) = u_m$  при  $t_0 \leq t \leq T$ ,  $\gamma(t) \rightarrow \infty$  при  $t < t_0$ ,  $t > T$  (конечная протяженность  $u(t)$ , определяемая интервалом  $[t_0, T]$ , где  $f(t)$  превышает уровень погрешности).

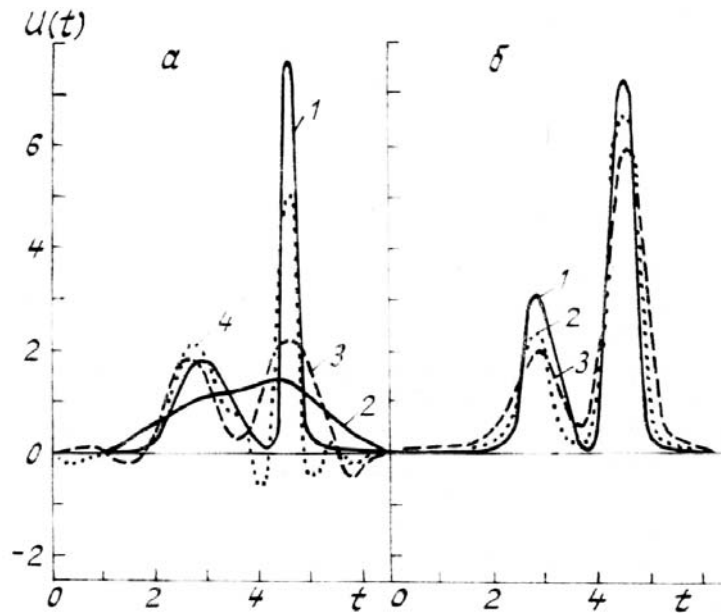


Рис. 1. Влияние априорной информации о решении на качество восстановления (в отсутствие помех): (а) 1 – модельная функция  $u(t)$ ; 2 – правая часть  $f(t)$  исходного уравнения; 3, 4 – восстановление  $u(t)$  по методу Тихонова при  $\alpha=10^{-5}$  и  $\alpha=10^{-15}$ ; (б) восстановление  $u(t)$  прямой минимизацией сглаживающего функционала при ограничениях вида пп. а, б, в (кривые 1, 2, 3)

Параметр регуляризации во всех случаях составлял  $\alpha = 10^{-5}$ . Из сопоставления результатов, приведенных на рис. 1, а и б, можно сделать вывод о значительном улучшении качества решения при учете ОДЗ искомой функции, проявляющемся в отсутствие отрицательных выбросов и более детальном восстановлении тонкой структуры решения. Как видно из рис. 1, б, вид априорных ограничений на  $u(t)$  не очень сильно влияет на восстановление, в данной модельной задаче достаточно условия положительной определенности решения. В то же время улучшение качества восстановления связано с большими затратами машинного времени. Ниже излагается итерационный алгоритм обращения уравнения типа свертки с учетом положительной определенности решения, позволяющий многократно сократить объем вычислений по сравнению с методами прямой минимизации.

### Итерационный алгоритм восстановления положительно определенных функций

Пусть известно начальное приближение  $u(t)$  к искомому положительно определенному решению уравнения (1). Представим  $u(t)$  в виде

$$u(t) = \bar{u}(t) \Delta u(t). \quad (11)$$

Перейдем к новой искомой функции  $z(t)$  согласно (8), (9), где  $b = 0$ ,  $c = 0$ , таким образом, что

$$\Delta u(t) = \exp z(t). \quad (12)$$

Подставляя (12) в (1), получим нелинейное уравнение относительно функции  $z(t)$ , имеющей ОДЗ от  $-\infty$  до  $\infty$ . Полагая, что  $\bar{u}(t)$  близко к точному значению  $u(t)$  и  $z(t)$  близко в силу (12) к нулю, получим

$$u(t) \simeq \bar{u}(t) + \bar{u}(t) z(t), \quad (13)$$

в результате чего нелинейное уравнение линеаризуется:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) \bar{u}(\tau) z(\tau) d\tau = f(t) - A\bar{u}, \quad (14)$$

а его регуляризованное решение аналогично (5) запишется

$$z(t) = \frac{1}{2\pi\bar{u}(t)} \int_{-\infty}^{\infty} [\tilde{f}(\omega) - \tilde{h}(\omega)\tilde{u}(\omega)] \frac{|\tilde{h}(\omega)|^2 \exp(i\omega t)}{|\tilde{h}(\omega)|^2 + \alpha M(\omega)} d\omega, \quad (15)$$

где

$$\alpha M(\omega) = R_\varepsilon / R_{u-\bar{u}}. \quad (16)$$

Итерационное уточнение решения проводится по схеме

$$\bar{u}^{(j)} = u^{(j-1)}, \quad R_{u-\bar{u}}^{(j)} = |R_u - R_u^{(j)}|, \quad u^{(j)} = u^{(j-1)} \exp z^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (17)$$

начиная с нулевого приближения  $u^{(0)} = \bar{u}$ .

Для исследования качества восстановления и скорости сходимости алгоритма был проведен численный эксперимент, результаты которого приведены на рис. 2. Модельная функция  $u(t)$  выбиралась той же, что на рис. 1, в качестве нулевого приближения  $\bar{u}(t)$  выбирался модуль полученного согласно (5) решения при  $M(\omega) = 1$ ,  $\alpha = 10^{-15}$  (см. рис. 1, *a*, кривая 4), нулевые значения начального приближения заменялись малыми числами. Результаты использования итерационного алгоритма (15)–(17) приведены на рис. 2, *a* (после одной и десяти итераций). На рис. 2, *б* приведены результаты восстановления при наличии аддитивной погрешности  $\varepsilon(t)$  в правой части (1), равномерно распределенной в интервале  $[-0,01f_m; 0,01f_m]$ . Кривая 1 получена при  $M(\omega) = 1$  и параметре  $\alpha$ , определяемом по невязке; кривая 2 – при использовании (6) при  $R_\varepsilon$  и  $R_u$ , рассчитанных численно для функций  $\varepsilon(t)$  и  $u(t)$ . Кривые 3 и 4 представляют результаты использования итерационного алгоритма соответственно после 100 и 400 итераций (нулевое приближение задавалось постоянным и равным среднему значению модельной функции  $u(t)$ ), при этом  $R_\varepsilon$  и  $R_u$  также считались известными. Ниже исследуется влияние неточного задания спектральных плотностей мощности решения и помехи на точность восстановления и возможности адаптации их параметров.

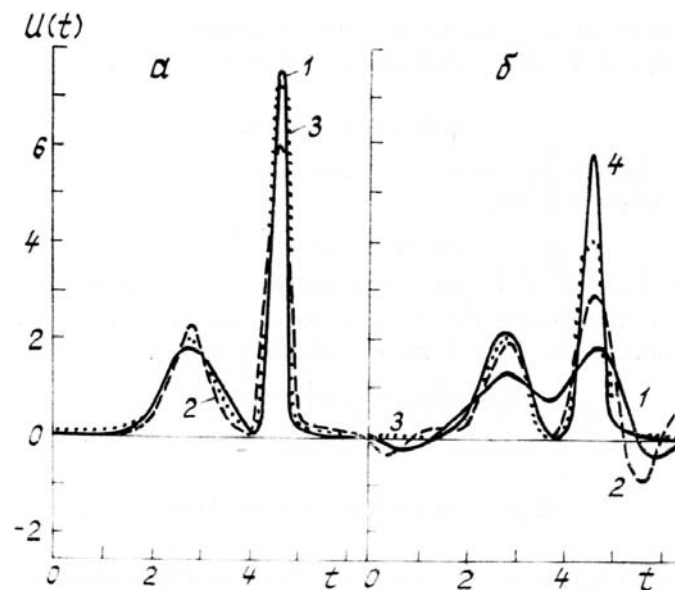


Рис. 2. Итерационное восстановление положительно определенных функций, (а) восстановление в отсутствие помех; 1 – модельная функция  $u(t)$ ; 2, 3 – результаты восстановления после 1-й и 10-й итераций; (б) восстановление при 1%-й помехе в правой части исходного уравнения; 1 – регуляризация нулевого порядка; 2 – оптимальная линейная фильтрация; 3, 4 – с учетом положительной определенности  $u(t)$  после 100 и 400 итераций

### Восстановление при априорной неопределенности

Обычно априорная информация о решении и помехах в виде  $R_\varepsilon$  и  $R_u$  отсутствует. Тем не менее существует возможность их оценки из экспериментальных данных, следующая из уравнений, связывающих статистические моменты измеряемой функции, решения и помехи [5]. Применительно к уравнению типа свертки из уравнений для корреляционных функций можно получить [6]

$$R_u(\omega) |\tilde{h}(\omega)|^2 + R_\varepsilon(\omega) = R_f(\omega). \quad (18)$$

Будем считать помеху  $\varepsilon(t)$  белым шумом с известной дисперсией  $\sigma_\varepsilon^2$ , решение — стационарным экспоненциально-коррелированным гауссовым процессом, имеющим спектральную плотность мощности

$$R_u(\omega) = \frac{1}{\kappa_1 + \kappa_2 \omega^2}, \quad (19)$$

где постоянные  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  выражаются через параметры корреляционной функции этого процесса [7]. Отметим, что такое представление  $R_u$  соответствует использованию тихоновского стабилизатора (3) первого порядка [5]. Подставляя (19) в (18) и решая полученное уравнение относительно  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  методом наименьших квадратов, получим

$$\kappa_1 = \frac{1}{p} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta R(\omega) |\tilde{h}(\omega)|^2 d\omega - \kappa_2 \frac{q}{p}, \quad (20)$$

$$\kappa_2 = \frac{1}{r - q^2/p} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta R(\omega) |\tilde{h}(\omega)|^2 \left( \omega^2 - \frac{q}{p} \right) d\omega, \quad (21)$$

где

$$p = \int_{-\infty}^{\infty} [\Delta R]^2 d\omega, \quad q = \int_{-\infty}^{\infty} [\Delta R]^2 \omega^2 d\omega,$$

$$r = \int_{-\infty}^{\infty} [\Delta R]^2 \omega^4 d\omega, \quad \Delta R(\omega) = R_f(\omega) - R_\varepsilon(\omega).$$

Результаты численного моделирования с использованием адаптивных оценок (20), (21) параметров  $R_u$  приведены на рис. 3. Рассматривались варианты с адаптацией по одному параметру  $\kappa_1$  ( $\kappa_2 = 0$ ), что соответствует регуляризации нулевого порядка (рис. 3, а) и по обоим параметрам  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  (рис. 3, б). Условия численного эксперимента были те же, что и для рис. 2, б. Кривые 1, 2, 3 на рис. 3 соответствуют результатам восстановления после 10, 100, 200 итераций.

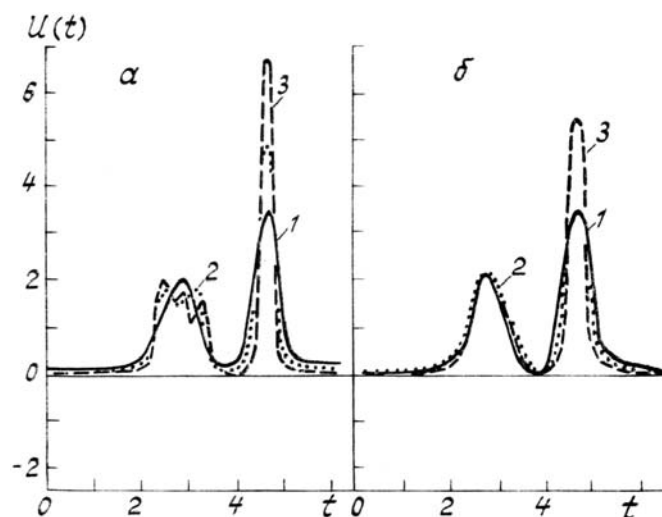


Рис. 3. Восстановление при априорной неопределенности: 1, 2, 3 — результаты восстановления после 10, 100, 200-й итераций при 1%-й помехе в правой части исходного уравнения; а — регуляризация нулевого порядка (адаптация по одному параметру), б — первого (адаптация по двум параметрам)

В заключение отметим, что реализация изложенного алгоритма при использовании стандартной процедуры быстрого преобразования Фурье требовала около трех секунд машинного времени ЭВМ БЭСМ-6 на одну итерацию (при дискретизации всех функций по 128 отсчетам), что говорит о его явном преимуществе по сравнению с методами прямой минимизации.

1. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 287 с.
2. Турчин В. Ф., Туровцева Л. С. // Оптика и спектроскопия. 1974. Т. 6. № 2. С. 280–287.
3. Кавкьянов С. И., Креков Г. М. // Тез. докл. II совещания по атмосферной оптике. Томск: ИОА СО АН СССР, 1980. Ч. 2. С. 24–27.
4. Евтушенко Ю. Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982. 260 с.
5. Кавкьянов С. И., Стрепетова С. В. // Оптика атмосферы. 1988. Т. 1. № 6. С. 50–56.
6. Василенко Г. И. Теория восстановления сигналов. М.: Сов. радио, 1979. 272 с.
7. Амиантов И. Н. Избранные вопросы статистической теории связи. М.: Сов. радио, 1971. 416 с.

Институт оптики атмосферы СО АН СССР,  
Томск

Поступила в редакцию  
21 декабря 1989 г.

**S.I. Kavkyanov, S.V. Strepetova. Account for the Region of Solution Definition in the Inversion of Equations of the Convolution Type.**

The paper discusses some regularized algorithms for solving numerically the equations of the convolution type, which allow one to take into account not only usual a priori information on smoothness of the function sought but also the data on its region of definition. The influence of such kind of a procedure on the quality of inversions are investigated in numerical experiments. An iteration algorithm is suggested in the paper for restoration of positive definite functions. Some ways of adaptation to situations of a priori indefiniteness are also considered.