«Оптика атмосферы», **1**, № 6 (1988) УДК 535.416.3

А.П. Сухоруков, В.А. Трофимов

О ФОКУСИРОВКЕ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ СЕГМЕНТИРОВАННЫМИ ЗЕРКАЛАМИ

Анализируется оптимизация сдвигов сегментов с целью формирования требуемой поверхности. Показано, что оптимальные значения продольного смещения пластин слабо зависят от апертурной функции. Получены зависимости среднеквадратического отклонения профиля зеркала от его требуемой поверхности в пределах передающей апертуры от размера пластин и апертуры. Сделан вывод о том, что функционал среднеквадратического отклонения не дает полной информации о качестве формирования сегментированным или поршневым зеркалом требуемой поверхности. Предложен функционал, свободный от этого недостатка, и вычислена его зависимость от размера пластин и передающей апертуры.

В настоящее время наименее изученной проблемой адаптивной оптики является фокусировка световых пучков сегментированными и поршневыми зеркалами [1—3], которые в ряде случаев имеют преимущества перед гибкими зеркалами, в частности для пучков большого начального радиуса. Эффективность использования таких зеркал определяется несколькими факторами, например отношением характерного размера $L_п$ пластины к радиусу a пучка, количеством пластин, их формой, а также алгоритмом управления, от которого зависит быстродействие адаптивного управления. Наиболее детально и быстро проанализировать влияние перечисленных выше факторов на качество компенсации нелинейных искажений возможно, по-видимому, лишь на основе математического моделирования распространения оптического излучения, отраженного от сегментного (или поршневого) зеркала, включающего квазиоптическое уравнение относительно нормированной комплексной амплитуды A пучка

$$\frac{\partial A}{\partial z} + i\Delta_{\perp} A + i\alpha\varepsilon_{нл} A = 0 \tag{1}$$

с граничным условием

$$A_{|z=0} = A_0(x,\ y,\ t)\,\Phi(x,\ y,\ t),$$

где z — продольная координата, измеряемая в единицах дифракционной длины $l_g = 2ka^2$; k — волновое число; $\Delta_{\perp}$ — поперечный оператор Лапласа; α — отношение начальной мощности пучка к характерной мощности самовоздействия; $\varepsilon_{нл}$ — нелинейная добавка к диэлектрической проницаемости; A_0 — начальный профиль пучка, т.е. форма импульса, который генерирует источник оптического излучения; Φ — функция (вообще говоря, комплексная, описывающая профиль сегментного (или поршневого) зеркала и волновой фронт пучка после его отражения от зеркала; x, y, t — соответственно нормированные пространственные и временные переменные. Однако в настоящее время отсутствуют эффективные численные методы, способные с высокой точностью описывать распространение светового пучка, имеющего в своем профиле узкие провалы интенсивности (которые могут привести к развитию неустойчивости [4]), причем их ширина и положение изменяются во времени, или с номером итерации при адаптивной фокусировке. Заметим, что во-первых, под эффективными методами здесь понимаются методы, сравнимые по объему памяти и времени вычислений с методами расчета нелинейных искажений пучков, отраженных от гибкого зеркала; во-вторых, данные вопросы представляют самостоятельный интерес, и некоторые подходы рассмотрены в работе [5]. В данной же статье анализируются; зависимости качества формирования фокусировки световых пучков поршневыми и сегментными зеркалами от числа пластин зеркала, обсуждаются вопросы достижения максимального быстродействия при управлении сдвигами сегментов зеркала.

Следует сделать еще одно замечание. Как известно, в случае распространения оптического излучения в линейной среде ($\varepsilon_{нл} = 0$) или в случае прохождения им тонкого нелинейнего слоя толщиной l (пучок приобретает дополнительный фазовый набег $S_{нл} = l\varepsilon_{нл}$, и он учитывается в граничном условии к уравнению (1)) можно записать решение уравнения (1) [6]. При этом, если мало отклонение профиля волнового фронта S_c пучка, созданного сегментным зеркалом, от требуемого распределения $S_{уп}$, необходимого для фокусировки пучка на приемник, то для числа Штреля, характеризующего уменьшение интенсивности пучка, например на его оси $x = y = 0$. справедливо [6]

$$I = 1 - (J_2 - J_1^2) + \frac{1}{4} J_2^2, \tag{2}$$

где J_m определяются по следующей формуле:

$$J_m = \int\int \varkappa(x, y) S^m(x, y)\, dx dy / \int\int \varkappa(x, y)\, dx dy.$$

Здесь $\kappa(x, y)$ — апертурная функция, характеризующая передающую апертуру, профиль пучка; $S = S_{\text{уп}} - S_{\text{с}}$.

Относительно (2) сделаем несколько замечаний. Во-первых, (2) широко встречается в литературе (см. например, [1—3, 7—9]) при расчете влияния ошибок формирования зеркалами требуемых поверхностей, нескомпенсируемых случайных аберраций и ошибок при реализации оптимальных возмущений приводов. Обычно в (2) последнее слагаемое не учитывают. Во-вторых, при исследовании возможностей формирования аппроксимации реальными зеркалами, необходимыми для эффективной фокусировки распределений волнового фронта, качество формирования оценивается по J_2: по среднеквадратическому ($J_{\text{кв}} = J_2$) отклонению, в частности $S_{\text{с}}$ от $S_{\text{уп}}$, и от него зависит качество коррекции искажений светового пучка, например значение пиковой интенсивности. Следовательно, функционалы J_2, J_1 непосредственно определяют качество фокусировки пучка, и, в дальнейшем будем говорить лишь о значениях этих функционалов. В заключение обсуждения (2) отметим, что в [8] выполнен при некоторых предположениях расчет числа Штреля при управлении сдвигами и наклонами субапертур в случае коррекции случайных аберраций.

Качество фокусировки будем характеризовать среднеквадратиче-ским отклонением формы зеркала от требуемого профиля

$$J_{\text{кв}} = \int\int \varkappa(x, y) \left\{ S_{\text{уп}}(x, y) - \sum_{p,q=1}^{M_0} \sigma_{pq} \exp\left[-\frac{x - x_p}{L_{\text{п}}/2} \right]^{10} - \left[-\frac{y - y_q}{L_{\text{п}}/2} \right]^{10} \right\}^2 dx dv, \tag{3}$$

где σ_{pq} — продольные сдвиги пластин, которые необходимо оптимизировать; x_p, y_q — координаты центра пластин. При записи (3) форма пластин задавалась в виде гипергауссовой функции 10-й степени. Подчеркнем, что в зависимости от устройства зеркала в (3) могут быть использованы другие функции, например ступенчатые (1 — на сегменте; 0 — вне его), которые применимы, в частности, для сегментных зеркал.

Определим оптимальные значения σ_{pq}. Для этого возьмем частные производные по σ_{nm} и приравняем их нулю

$$\frac{\partial J_{\text{кв}}}{\partial \sigma_{nm}} = \int\int \varkappa(x, y) \left\{ S_{\text{уп}} - \sum_{p,q=1}^{M_0} \sigma_{pq} \exp\left[-\left(\frac{x - x_p}{L_{\text{п}}/2} \right)^{10} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left(\frac{y - y_q}{L_{\text{п}}/2} \right)^{10} \right] \right\} \exp\left(-\frac{x - x_{\text{п}}}{L_{\text{п}}/2} \right)^{10} \times \exp\left(-\frac{y - y_m}{L_{\text{п}}/2} \right)^{10} dx dy. \tag{4}$$

Учитывая, что экспоненты в (4) практически равны 0 при $2|x - x_n| > L_n$, $2|y - y_m| > L_m$ и 1 для обратного случая, получим следующие оптимальные значения:

$$\sigma_{nm} = \int\int \varkappa(x, y) \Phi_{nm} S_{\text{уп}} dx dy / \int\int \Phi_{nm}^2 \varkappa(x, y)\, dx dy. \tag{5}$$

Здесь для краткости профиль пластин обозначен для Φ_{nm}. При таком выборе σ_{nm} среднеквадратическое отклонение профиля зеркала от требуемой формы равно

$$J_{\text{кв}} = \int\int \varkappa(x, y) S_{\text{уп}}^2 dx dy - \sum_{n,m=1}^{M_0} \left(\int\int \varkappa S_{\text{уп}} \Phi_{nm} dx dy \right)^2 / \int\int \varkappa \Phi_{nm}^2 dx dy, \tag{6'}$$

а функционал J_1 равен

$$J_1 = \int\int \varkappa S_{\text{уп}} - \sum_{n,m=1}^{M_0} \int\int \varkappa S_{\text{уп}} \Phi_{nm} dx dy \times \int\int \varkappa \Phi_{nm} dx dy / \int\int \Phi_{nm}^2 \varkappa dx dy. \tag{6''}$$

Из (5, 6) следует ряд важных для практики выводов. Во-первых, при фиксированном m (или n) значения σ_{nm} не зависят от $\sigma_{i\neq nm}(\sigma_{nj\neq m})$. Во-вторых, от апертурной функции $\varkappa(x, y)$ сильно зависит качество компенсации и слабо зависят значения оптимальных сдвигов пластин. Поэтому для разных апертурных функций (профилей пучка) результаты оптимизации (значения функционала $J_{\text{кв}}$) могут существенно отличаться друг от друга. Подчеркнем также, что (5, 6) являются точными для сегментного зеркала, а в случае монолитного поршневого зеркала при определении оптимальных σ_{nm} по (5) допускается ошибка из-за наличия узких переходных областей, которые можно хорошо описать с помощью гипергауссовой функции. Важно подчеркнуть, что для $\varkappa$=1 значение J_1=0 и вклад в уменьшение числа Штреля дает только $J_{\text{кв}}$.

Так как для произвольных $\varkappa$, $S_{\text{уп}}$ непосредственно из (6) трудно получить явные выражения зависимости $J_{\text{кв}}$ от размеров пластин, то рассмотрим лишь некоторые примеры. Пусть требуется сфокусировать $S_{\text{уп}} = \theta(x^2 + y^2)$ (θ — фокусировка пучка) прямоугольный пучок ($\varkappa = 1$ при $|x| < a_0$, $|y| < a_0$) зеркалом, состоящим из квадратных пластин. Для краткости и наглядности рассмотрим одномерный случай. Тогда из (5) получим

$$\sigma_n = \frac{\theta L_{\text{п}}^2}{3}(3n^2 - 3n + 1). \tag{7}$$

Заметим, что рассчитанные по (7) оптимальные σ_n незначительно отличаются от оптимальных значений σ_n, полученных из численных экспериментов, проведенных для гауссовой апертуры, что подтверждает сделанный выше вывод. В случае реализации (7) среднеквадратическое отклонение профиля зеркала от требуемой формы равно

$$J_{\text{кв}} = \theta^2 a_0 L_{\text{п}}/5\left\{\frac{a_0^3}{3} + \frac{L_{\text{п}} a_0^2}{2} + \frac{8}{3}a_0 L_{\text{п}}^2 - \frac{7}{2}L_{\text{п}}^2\right\}. \tag{8}$$

Подчеркнем, что при записи (8) использовалось равенство $L_{\text{п}} M_0 = a_0$, следовательно $L_{\text{п}} \leq a_0$. Из анализа (8) можно сделать следующие выводы. Во-первых, при уменьшении размера пластин (например от $0{,}8a_0$) качество фокусировки сначала возрастает, как $L_{\text{п}}^3$, затем пропорционально $L_{\text{п}}$. Оптимальное $L_{\text{п}}$ определяется решением кубического уравнения

$$14L_{\text{п}}^3 - 8a_0 L_{\text{п}}^2 - a_0^2 L_{\text{п}} - a_0^3/3 = 0 \tag{9}$$

и при заданном максимальном числе пластин качество может не достигаться. Во-вторых, наименьшее значение $J_{\text{кв}}$ ($J_{\text{кв}} = 0$) реализуется также при $L_{\text{п}} = a_0$. В этом случае, несмотря на то, что среднеквадра-тическое отклонение профиля зеркала от требуемой формы равно 0, пучок не будет фокусироваться, так как оно вносит однородный сдвиг фазы ($\sigma_1 = \theta/3$). Поэтому оптимизация сдвигов сегментов при оценке качества по критерию (3) без дополнительных условий, вообще говоря, не является оптимальной, и, следовательно, необходимо использовать другие функционалы для оценки качества формирования требуемой поверхности зеркала. В частности, качество целесообразно оценивать по интегралу от модуля отклонения формы зеркала от заданного профиля в пределах передающей апертуры

$$J_p = \int\int \varkappa(x, y)\left|S_{\text{уп}} - \sum_{n,m=1}^{M_0}\sigma_{nm}\Phi_{nm}\right| dxdy. \tag{10}$$

Он отличается от функционала J_1 наличием модуля под интегралом. Используя теорию интерполяции и методы численного интегрирования [11], получим следующие оптимальные значения сдвигов сегментов:

$$\sigma_{nm} = S_{\text{уп}}(x_n, y_m), \tag{11}$$

где x_n, y_n — координаты центра сегмента.

Преимущество оценки качества по (10) продемонстрируем на рассмотренном выше примере. Подставляя в (10), (11) $\varkappa = 1$, $S_{\text{уп}} = \theta x^2$, вычислим оптимальные значения сдвигов

$$\sigma_n = \theta L_{\text{п}}^2(n - 1/2), \tag{12}$$

а значение J_p для них равно

$$J_p = \theta L_{\text{п}} a_0^2/4. \tag{13}$$

При сравнении (13) и $J_{кв}$ следует либо J_p возвести в квадрат, либо извлечь корень квадратный из $J_{кв}$. Нетрудно видеть, что в отличие от $J_{кв}$ при уменьшении размера сегмента J_p^2 стремится к нулю как $L_п^2$. Подставляя (12) в функционал (3), получим, что среднеквадратическое отклонение зеркала равно

$$J_{кв} = \left(\frac{a_0^2 L_п^2}{9} + \frac{31}{15} a_0^2 L_п^3 \right) \theta^2. \tag{14}$$

Следовательно, $J_{кв}$ при σ_n, определенное по (12), уменьшается, как $L_п^2$, а с ростом радиуса передающей апертуры увеличивается, как a_0^3. Кроме этого, для функционала (10) его минимальное значение реализуется лишь при одном $L_п$. Таким образом, целесообразность оценки качества по (10) очевидна.

Перейдем к анализу эффективности оптимизации наклонов пластин. При этом пренебрежем влиянием зазоров между пластинами на качество формирования (идеальное сегментированное зеркало). Как и выше, рассмотрим два функционала для передающей апертуры с $\varkappa = 1$. В этом случае для $J_{кв}$ и $J_р$ получим соответственно следующие выражения

$$J_{кв} = \int_0^{a_0}\int \left\{ S_{уп} - \sum_{n,m=1}^{M_0} \sigma_{nm}\Phi_{nm} - \sum_{n,m=1}^{M_0} \Phi_{nm}\left[\beta_n (x - x_n) + \xi_m (y - y_m)\right] \right\}^2 dxdy, \tag{15}$$

$$J_p = \int\int \left| S_{уп} - \sum_{n,m=1}^{M_0} \sigma_{nm}\Phi_{nm} - \sum_{n,m=1}^{M_0} \Phi_{nm}\left[\beta_n (x - x_n) + \xi_m (y - y_m)\right] \right| dxdy, \tag{16}$$

где β_n, ξ_m — наклоны пластин по осям x и y. Из (15) получим уравнения относительно коэффициентов сдвига и наклонов сегментов, при которых реализуется минимум функционала (15):

$$\int\int S_{уп}\Phi_{pq} dxdy - \int\int \sigma_{pq}\Phi_{pq} dxdy = 0;$$

$$\int\int S_{уп} \sum_{m=1}^{M_0} \Phi_{pm} dxdy - \beta_p \int\int \sum_{m=1}^{M_0} \Phi_{pm} (x - x_p)^2 dxdy = 0;$$

$$\int\int S_{уп} \sum_{n=1}^{M_0} \Phi_{nq} dxdy - \xi_q \int\int \sum_{n=1}^{M_0} \Phi_{nq} (y - y_q)^2 dxdy = 0. \tag{17}$$

При записи (17) учитывалась симетричность функции Φ_{pq} (коэффициента отражения сегмента) относительно центра сегмента, и отсутствие лерекрытия функций Φ_{pq} с Φ_{nm}. Из (17) можно сделать важные для практики выводы: во-первых, управление наклонами пластин не зависит от управления сдвигами; во-вторых, управление наклонами по осям x, y не зависит друг от друга; в-третьих, оптимальные значения σ_{nm}, β_p, ξ_q не зависят соответственно друг от друга; в-четвертых, оптимальные β_p и ξ_q не зависят от наклонов соседних пластин. Все это дает возможность распараллелить управление как по группам оптимизируемых параметров (сдвигам и наклонам), так и в пределах каждой группы. Заметим, что для других функций $\varkappa(x, y)$ (например, для $\varkappa(x, y) = \exp-(x^2 + y^2)/a_0^2)$ в (17) будут входить, в частности, в уравнение для σ_{pq} значения β_p и ξ_q, и все группы управляемых параметров будут зависимы друг от друга. Их вклад пропорционален $\exp(-x_n^2/a_0^2) - \exp(-x_{n-1}^2/a_0^2)$, и для малых $L_п$ он уменьшается квадратично по $L_п^2$. При «подключении» следующей степени свободы $\delta_p x^2 + \eta_q y^2)\sigma_{nm}$ становится зависимым от δ_n, η_m, что существенно усложняет (в смысле организации управления) работу такого зеркала.

Некоторые другие зависимости проиллюстрируем на вышеприведенном примере. Так, при оценке качества формирования по J_p оптимальные коэффициенты равны

$$\sigma_n = \theta x_n^2, \; \beta_m = 2\theta x_m. \tag{18}$$

При этих σ_n и β_m достигается следующее значение функционала J_p:

$$J_p = \theta a_0^2 L_п^2 / 12. \tag{19}$$

Среднеквадратичное же отклонение при σ_n и β_n, определяемых по (18), равно

$$J_{кв} = \theta^2 a_0 L_п^4 / 5 \cdot 2^4, \qquad (20)$$

которое пропорционально радиусу приемной апертуры и быстро убывает при уменьшении $L_п$. Важно подчеркнуть, что оптимальный наклон пластины, определенный из (17), совпадает с (18); значение сдвигов пластин совпадает с (7).

В заключение сделаем наиболее важные выводы по данной работе. Из проведенного здесь анализа следует, что, во-первых, можно организовать параллельное управление группами оптимизируемых параметров, при этом необходимо специальным образам выбрать апертурную функцию; во-вторых, в пределах одной группы можно распараллелить управление отдельными параметрами; в-третьих, оптимальные значения наклонов и сдвигов сегментов можно считать не зависящими друг от друга; в-четвертых, для оценки качества формирования требуемой формы зеркала целесообразно использовать функционал J_p. В работе получены зависимости критериев качества от размера пластин, радиуса передающей апертуры. Использование функционала J_p при оптимизации сдвигов пластин позволяет получить не хуже чем квадратичную зависимость числа Штреля от размера пластин, в то время как при оценке качества формирования $S_{уп}$ по $J_{кв}$ имеем лишь линейную зависимость $J_{кв}$ от $L_п$. Уменьшается также и зависимость $J_{кв}$ от размера пучка.

1. Харди Дж.У. — ТИИЭР, 1978, т. 66, № 6, с. 31—85.
2. Адаптивная оптика/Пер. с англ. под ред. Э.А. Витриченко. — М.: Мир, 1980. — 456 с.
3. Тараненко В.Г., Горохов Ю.Г., Романюк Н.С. — Зарубежная радиоэлектроника, 1982, № 8, с. 19—43.
4. Высотина Н.В., Розанов Н.Н., Семенов В.Е., Смирнов В.А. — Изв. вузов. Физика, 1985, т. 28, № 12, с. 42—50.
5. Трофимов В.А. Численный эксперимент по фокусировке световых пучков сегментными зеркалами. — Изв. вузов. Радиофизика. (В печати).
6. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. — М.: Наука, 1973. — 719 с.
7. Тараненко В.Г. — Изв. АН СССР. Сер. Физич., 1984, т. 48, № 7, с. 1419—1423.
8. Киракосянц В.Е., Логинов В.А., Слонов В.В. — Квантовая электроника, 1983, т. 10, № 12, с. 2485—2486.
9. Сухоруков А.П., Трофимов В.А., Шамеева Т.Ю. — Квантовая электроника, 1985, т. 12, № 2, с. 355—360.
10. Воронцов М.А., Шмальгаузен В.И. Принципы адаптивной оптики — М.: Наука, 1986. — 335 с.
11. Самарский А.А. Введение в численные методы. — М.: Наука, 1987. — 286 с.

Московский госуниверситет
им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
5 января 1988 г.

A.P. Sukhorukov, V.A. Trofimov. **On Light Focusing by Segmented Mirrors**.

The problem of the segment displacement optimization to form a desired mirror surface is discussed. Optimal axial displacement is shown to be weakly dependent on the aperture function. The standard mirror profile deviation from the required surface as a function of the segment and aperture size is obtained. A standard deviation functional is proposed that provides complete information on the quality of the surface formed by a segmented mirror. The dependence of the functional on the segment and transmitting aperture size is calculated.