

С.Д. Творогов, В.Г. Федосеев, К.Н. Югай

РАСПРОСТРАНЕНИЕ АМПЛИТУДНО-МОДУЛИРОВАННОГО ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ГАЗЕ ДВУХУРОВНЕВЫХ АТОМОВ

В статье рассматривается распространение амплитудно-модулированной волны в атомарном резонансном газе. Показано, что при определенных условиях происходит нелинейная перекачка энергии сильного поля к слабым полям. Проведены численные расчеты интенсивностей полей.

Задача о распространении амплитудно-модулированного излучения в среде из двухуровневых квантовых систем обычно обсуждается в приближении сильного заданного поля — см. [1–5] и [6], где приведен соответствующий обзор. В [6] высказано убеждение, что «обратную связь» — уменьшение интенсивности нелинейного поля, энергия которого «перекачивается» двухуровневыми системами в «боковые» компоненты, — никак нельзя игнорировать; более того, именно она должна определять облик задачи. В предлагаемой статье строится последовательная полуклассическая электродинамика этого процесса, использующая естественные здесь малые параметры.

Представим падающее на среду электромагнитное поле в следующем виде:

$$E_{\text{пад}} = E^{(0)}(1 + \mu \cos \Omega t) \cos \omega t, \quad (1)$$

где $E^{(0)}$ — амплитуда линейно поляризованного поля; μ и Ω — соответственно глубина и частота модуляции, ω — несущая частота, причем $\Omega \ll \omega$. Поле в среде представим в виде

$$E = E_0(z) e^{-i\omega t} + E_1(z) e^{+i\omega_1 t} + E_2(z) e^{-i\omega_2 t} + \text{к. с.}, \quad (2)$$

где $\omega_1 = \omega + \Omega$, $\omega_2 = \omega - \Omega$, а z — координата, отсчитываемая от точки падения луча вдоль его распространения в глубь среды.

Будем считать, что среда состоит из двухуровневых атомов и частота перехода $\omega_{21} = \omega$.

Запишем систему уравнений для матрицы плотности следующим образом:

$$\begin{aligned} i\hbar \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u-1}{T_1} \right) + 2d (E_0(z) e^{-i\omega t} + \text{к. с.}) (\rho_{21} + \text{к. с.}) = \\ = -2d (E_1(z) e^{-i\omega_1 t} + E_2(z) e^{-i\omega_2 t} + \text{к. с.}) (\rho_{21} + \text{к. с.}), \\ i\hbar \left(\frac{\partial \rho_{21}}{\partial t} + \rho_{21} \left(\frac{1}{T_2} + i\omega \right) \right) + d (E_0(z) e^{-i\omega t} + \text{к. с.}) u = \\ = -d (E_1(z) e^{-i\omega_1 t} + E_2(z) e^{-i\omega_2 t} + \text{к. с.}) u, \end{aligned} \quad (3)$$

где $u = \rho_{11} - \rho_{22}$, d — дипольный момент перехода, T_1 и T_2 — соответственно время продольной и поперечной релаксации. Здесь и далее предполагается, что матричные элементы $\rho_{ij}(i, j = 1, 2)$ являются функциями z и t .

Решив систему (3), можно определить поляризацию среды:

$$P = Ntr\rho d = N(d\rho_{21} + \text{к. с.}), \quad (4)$$

где N — плотность атомов.

1. Теория возмущений

Исследуем случай слабой модуляции $\mu \ll 1$, т.е. будем рассматривать поля $E_1(z)$ и $E_2(z)$ как слабые. Построим теорию возмущений по этим полям для системы уравнений (3). В нулевом приближе-

нии решаем эту систему, полагая правую часть равной нулю. Это приближение хорошо известно, оно описывает эффект насыщения:

$$u^{(0)} = (1 + 4T_1 T_2 a^2(z))^{-1}, \quad \rho_{21}^{(0)} = \chi^{(0)}(z) E_0(z) e^{-i\omega t},$$

$$\chi^{(0)}(z) \equiv i \frac{d \cdot T_2}{\hbar} u^{(0)}(z), \quad a(z) \equiv \frac{|E_0(z)| \cdot d}{\hbar}. \quad (5)$$

В первом приближении в правую часть системы (3) подставляем $u^{(0)}$, $\rho_{21}^{(0)}$, в левую часть $u = u^{(0)} + u^{(1)}$, $\rho_{21} = \rho_{21}^{(0)} + \rho_{21}^{(1)}$. В результате этих подстановок получаем систему уравнений, аналогичную (3), с заменой в ней справа ρ_{21} , u на $\rho_{21}^{(0)}$, $u^{(0)}$, а слева на $u^{(1)}$, $\rho_{21}^{(1)}$. Тогда очевидно, что $\rho_{21}^{(1)} \sim e^{-i\omega_1 t}$, $e^{-i\omega_2 t}$, а $u^{(1)} \sim \exp(\pm i\Omega t)$,

Поэтому в первом приближении получаем

$$\rho_{21}^{(1)} = \chi_1(z) E_1(z) e^{-i\omega_1 t} + \chi_2(z) E_2(z) e^{-i\omega_2 t}, \quad (6)$$

причем $\chi_1 = -\chi_2^*$.

$$\operatorname{Re} \chi_1 = \frac{\Omega \cdot d}{\hbar \gamma} u^{(0)} \left[4a^2(z) \left(2 + \frac{T_2}{T_1} \right) - \Omega^2 - \frac{1}{T_1^2} \right],$$

$$\operatorname{Im} \chi_1 = \frac{T_2 \cdot d}{\hbar \gamma} u^{(0)} \left[\left(4a^2(z) + \frac{1}{T_1 T_2} \right) \left(\frac{1}{T_1 T_2} - 4a^2(z) \right) + \Omega^2 \left(4a^2 + \frac{1}{T_2^2} \right) \right],$$

$$\gamma \equiv \left(4a^2(z) + \frac{1}{T_1 T_2} - \Omega^2 \right)^2 + \Omega^2 \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right)^2. \quad (7)$$

Подставляя (6) и (7) в (4) видим, что в первом приближении возникает поляризация на частотах слабых полей. Поскольку $a(z) \sim |E_0(z)|$, то можно говорить о том, что в этом приближении появляется зависимость слабых полей от сильного поля $E_0(z)$.

Второй порядок теории возмущений получается аналогично первому: в правую часть системы (3) вместо u и ρ_{21} подставляем $u^{(0)} + u^{(1)}$ и $\rho_{21}^{(0)} + \rho_{21}^{(1)}$, а в левую — $u^{(0)} + u^{(1)} + u^{(2)}$ и $\rho_{21}^{(0)} + \rho_{21}^{(1)} + \rho_{21}^{(2)}$. Видно, что в этом случае $\rho_{21}^{(2)} \sim e^{-i\omega t}$, $e^{-i(\omega \pm 2\Omega)t}$. Можно легко показать, что для полей E' на частотах $\omega \pm 2\Omega \frac{\partial |E|^2}{\partial z} \sim |E_1|^2 |E|$ и во втором порядке теории возмущений эти поля можно не учитывать. Таким образом, во втором порядке имеем

$$\rho_{21}^{(2)} = \chi^{(2)} E_0(z) e^{-i\omega t},$$

$$\chi^{(2)}(z) = -i \frac{8 |E_1(z)|^2 \cdot d^3 T_2}{\hbar^3 \gamma} (u^{(0)})^2 \left[\left(4a^2(z) + \frac{1}{T_1 T_2} \right) \times \right.$$

$$\left. \times (T_1 T_2 (\Omega^2 - 4a^2(z)) + 3) + \frac{\Omega^2 (T_2 - T_1)^2}{T_1 T_2} \right], \quad (8)$$

$$u^{(2)} = -4T_1 \frac{d}{\hbar} \left[|E_0(z)|^2 \operatorname{Im} \chi^{(2)} + 2 |E_1(z)|^2 \operatorname{Im} \chi_1(z) \right]. \quad (9)$$

Второй порядок теории возмущений выявляет обратную связь волн: выражение для $\chi^{(2)}$ показывает, как изменение полей на частотах $\omega \pm \Omega$ влияет на распространение сильного поля ($\chi^{(2)} \sim |E_1|^2$). Таким образом, «исключив» нулевым приближением сильное поле, удастся построить теорию возмущений, корректно описывающую поведение трех волн (2) в резонансной среде.

Учесть движение атомов можно переходом в систему отсчета, связанную с атомом, что сводится к доплеровскому сдвигу частоты: $\omega' = \omega - \kappa v$, $\omega'_1 \approx \omega_1 - \kappa v$, $\omega'_2 \approx \omega_2 - \kappa v$, где v — проекция скорости

атома на направление распространения волн, κ — волновой вектор. Соответствующие формулы, учитывающие эффект Доплера, приведены в Приложении.

2. Уравнения для интенсивностей полей

Запишем уравнение для поля:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}, \quad (10)$$

где поле E и поляризация P имеют в нашем случае вид

$$\begin{aligned} E &= |E_0(\mathbf{z})| e^{i(\varphi_0 - \omega t)} + |E_1(\mathbf{z})| e^{i(\varphi_1 - \omega_1 t)} + |E_2(\mathbf{z})| e^{i(\varphi_2 - \omega_2 t)} + \text{к. с.} \\ P &= Nd [(\chi^{(0)}(\mathbf{z}) + \chi^{(2)}(\mathbf{z})) |E_0(\mathbf{z})| e^{i(\varphi_0 - \omega t)} + \\ &+ \chi_1(\mathbf{z}) |E_1(\mathbf{z})| e^{i(\varphi_1 - \omega_1 t)} + \chi_2(\mathbf{z}) |E_2(\mathbf{z})| e^{i(\varphi_2 - \omega_2 t)}] + \text{к. с.} \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь $\varphi_\alpha = n_\alpha \frac{\omega_\alpha}{c} z$, n_α — показатель преломления на частоте ω_α , $\alpha = 0, 1, 2$. Подставляя [11] в [10], получаем следующую систему уравнений:

$$1 - n_\alpha^2 = -4 \pi Nd \cdot \text{Re} \chi_\alpha, \quad (12)$$

$$\frac{\partial |E_\alpha|}{\partial z} = - \frac{2\pi\omega}{c} Nd |E_\alpha(\mathbf{z})| \text{Im} \chi_\alpha. \quad (13)$$

Здесь $\chi_0 \equiv \chi^{(0)} + \chi^{(2)}$. Из (12) следует, что $2\varphi_0 = \varphi_1 + \varphi_2$. Из (13), а также из того, что $\chi_1 = -\chi_2^*$ и равенства граничных амплитуд, следует, что $|E_1| = |E_2|$. Перепишем уравнения (13) для интенсивностей:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_0}{\partial z} &= - \frac{4\pi\omega}{c} Nd I_0(\mathbf{z}) [\text{Im} \chi^{(0)} + I_1(\mathbf{z}) \eta], \\ \frac{\partial I_1}{\partial z} &= - \frac{4\pi\omega}{c} Nd I_1(\mathbf{z}) \text{Im} \chi_1(\mathbf{z}), \end{aligned} \quad (14)$$

$$I_\alpha(z) \equiv |E_\alpha(z)|^2, \quad \eta(z) = \text{Im} \chi^{(2)} / I_1(z). \quad (15)$$

Подчеркнем, что χ_1 , $\chi^{(0)}$, η зависят от $I_0(z)$, т.к. $a \equiv \frac{|E_0(z)|d}{\hbar}$. Из системы уравнений (14) видно, что поведение слабых полей обусловлено функцией $\text{Im} \chi_1$, зависящей от амплитуды сильного поля в среде, и при $\text{Im} \chi_1 < 0$ слабые поля усиливаются. Используя (7) это условие можно записать в виде

$$4a^2(\mathbf{z}) > \frac{\Omega^2}{2} + \left[\left(\frac{\Omega^2}{2} + \frac{1}{T_2^2} \right)^2 + \frac{1}{T_2^2} \left(\frac{1}{T_1^2} - \frac{1}{T_2^2} \right) \right]^{1/2}. \quad (16)$$

Отсюда можно найти значение сильного поля $E_{0c}(z)$, при котором слабые поля могут увеличиваться:

$$|E_{0c}(\mathbf{z})|^2 = \frac{\hbar^2}{4d} \left\{ \frac{\Omega^2}{2} + \left[\left(\frac{\Omega^2}{2} + \frac{1}{T_2^2} \right)^2 + \frac{1}{T_2^2} \left(\frac{1}{T_1^2} - \frac{1}{T_2^2} \right) \right]^{1/2} \right\}. \quad (17)$$

На рис. 1 приведена зависимость функции $f \equiv -\frac{\hbar}{T^2 d} \text{Im} \chi_1 \cdot 10^4$ от $\xi \equiv \lg \frac{|E_0(z)|T^2 d}{\hbar \cdot 0,8}$, т.е. зависимость функции $\text{Im} \chi_1$ от амплитуды сильного поля $E_0(z)$ с учетом эффекта Доплера. При расчетах использовались следующие значения параметров: $T_1 = T_2 = 1,6 \cdot 10^{-8}$ с, $\Omega = 2 \cdot 10^8$ с $^{-1}$, $\omega_0 = 3,2 \cdot 10^{15}$ с $^{-1}$, m — масса атома Na. Усреднение по скоростям проводилось по максвелловскому распределению с температурой 300°K.

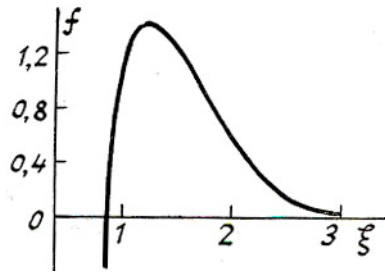


Рис. 1. Зависимость функции f от $|E_0(z)|$.

$$f \equiv -\frac{\hbar}{d \cdot T_2} \operatorname{Im} \chi_1 \cdot 10^4, \quad \xi \equiv g \left(\frac{|E_0(z)| d \cdot T_2}{0,8\hbar} \right)$$

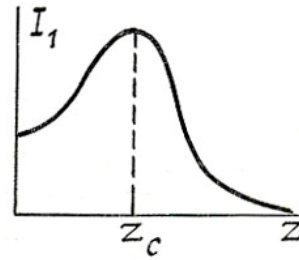


Рис. 2. Поведение интенсивности I_1 от расстояния z в среде

Из сказанного выше становится ясной недостаточность приближения сильного заданного поля и важность второго порядка теории возмущений, описывающего обратную связь волн: усиление слабых полей за счет сильного поля будет происходить до тех пор, пока сильное поле не уменьшится до значений, определяемых выражением (17). Затухание же сильного поля, как следует из системы уравнений (14), зависит от слабых полей. Таким образом, интенсивность $I_1(z)$ в зависимости от расстояния z ведет себя, как показано на рис. 2. Здесь z_c — расстояние, на котором интенсивность сильного поля I_0 уменьшается до значений (17). При достаточно больших z , т.е. при $z \gg z_c$, связь волн E_1 и E_0 разрывается и происходит обычное диссипативное затухание полей.

Оценим в нулевом приближении расстояние z_c . Первое уравнение системы. (14) запишем в виде

$$\frac{\partial I_0}{\partial z} = -\frac{4\pi\omega N d^2 T_2 I_0(z)}{\operatorname{ch} \left(1 + \frac{T_1 T_2 4 I_0(z) d^2}{\hbar^2} \right)}, \quad \text{откуда легко получить;}$$

$$z_c \approx \frac{\operatorname{ch}}{4\pi\omega N d^2 T_2} \left[\frac{4 T_1 T_2 d^2}{\hbar^2} (I_0(0) - I_0(z_c)) - \ln \frac{I_0(z_c)}{I_0(0)} \right], \quad (18)$$

где $I_0(z_c) = |E_{0c}|^2$, $I_0(0) = |E_0(0)|^2 = \frac{E^{(0)^2}}{4} / E^{(0)}$ определяется формулой (1).

Рассмотрим зависимость функции η (15) от $|E_0(z)|$, описывающей обратную связь волн. Положим для простоты $T_1 = T_2 = T$. Тогда из (6) видно, что $\eta < 0$ при $4a^2 < \Omega^2 + \frac{3}{T^2}$. А $\operatorname{Im} \chi_1 < 0$ при $4a^2(z) > \Omega^2 + \frac{1}{T^2}$. Таким образом, при амплитудах сильного поля таких, что $\frac{1}{T^2} + \Omega^2 < 4 \left(\frac{|E_0(z)| d}{\hbar} \right)^2 < \frac{3}{T^2} + \Omega^2$, происходит усиление слабых полей и в то же время затухание сильного поля будет меньше, чем в случае, когда поля E_1 и E_2 отсутствуют. Этот эффект связан с уменьшением населенности верхнего уровня $\rho_{22} = \frac{1}{2}(1-u)$ из-за взаимодействия волн, и, как следствие, с уменьшением релаксационных потерь энергии поля $E_0(z)$, пропорциональной населенности этого уровня, по сравнению с нулевым приближением. Релаксационная потеря энергии волной в единицу времени составляет $Q = \frac{\hbar\omega}{2T}(1-u)$.

Из (9) следует, что при $\eta < 0$, $\operatorname{Im} \chi_1 < 0$ значение $u^{(2)}$ всегда положительно, т.е. Q действительно уменьшается по сравнению с нулевым приближением. При значениях $a^2(z)$, лежащих вне интервала $\left(\frac{1}{T^2} + \Omega^2, \frac{3}{T^2} + \Omega^2 \right)$, η и $\operatorname{Im} \chi_1$ имеют разные знаки, т.е. усиление слабых полей влечет соответствующее затухание сильного поля.

Заключение

В статье описано распространение в резонансной среде амплитудно-модулированной волны в случае малой глубины модуляции. Последнее обстоятельство позволило построить теорию возмущений, основанную на малости глубины модуляции или, иными словами, на малости двух «боковых»

волн по сравнению с сильным «центральный» полем. Показано, что при определенных условиях возникает усиление слабых волн, влияющее на распространение сильной волны. В частности, обнаружена возможность усиления слабых волн при одновременном уменьшении ослабления сильной волны по сравнению с распространением одиночной волны. Дана интерпретация этому эффекту. Сделана оценка расстояния, на котором происходит усиление слабых полей в зависимости от амплитуды сильного поля на границе среды. Оценки свидетельствуют в пользу высказанного в [6] утверждения о существенной роли «обратной связи» волн при их распространении.

Приложение

Введем обозначение: $b \equiv dT_2 / (1 + T_2 T_1 4a^2 + (T_2 \kappa v)^2 \hbar)$. После усреднения по максвелловскому распределению по скоростям получим следующие выражения для χ , χ_1 , χ_2 :

$$\langle \text{Im} \chi^{(0)} \rangle = \langle b \rangle, \quad \langle \text{Re} \chi^{(0)} \rangle = 0, \quad (\text{П. 1})$$

$$\langle \text{Im} \chi_1 \rangle = \langle b \frac{c_1 s - c_2 r}{r^2 + s^2} \rangle, \quad \langle \text{Re} \chi_1 \rangle = \langle b \frac{c_1 r + c_2 s}{r^2 + s^2} \rangle, \quad (\text{П. 2})$$

где

$$r = 4(aT_2)^2 \cdot \frac{1 + T_2^2 \Omega (\Omega + \kappa v)}{1 + T_2^2 (\Omega + \kappa v)^2} + \frac{T_2}{T_1} - \Omega T_2^2 (\Omega - \kappa v),$$

$$s = \Omega T_2 + \frac{(\Omega - \kappa v) T_2^2}{T_1} - \frac{4a^2 T_2^2 \kappa v}{1 + T_2^2 (\Omega + \kappa v)^2},$$

$$c_1 = \Omega T_2 (1 + (T_2 \kappa v)^2), \quad c_2 = \frac{T_2}{T_1} (4a^2 T_1 T_2 - T_2^2 \kappa^2 v^2 - 1),$$

$$\langle \chi_2 \rangle = \langle -\chi_1^* \rangle, \quad (\text{П. 3})$$

$$\langle \text{Im} \chi^{(2)} \rangle = 2|E_1| \langle b \left(\text{Re} \alpha - \frac{2T_1 |E_1| d}{\hbar} \text{Im} (\chi_1 + \chi_2) \right) \rangle, \quad (\text{П. 4})$$

$$\alpha \equiv - \frac{|E_1|}{|E_0(z)| a} \left[\frac{b}{T_2} (1 + (T_2 \kappa v)^2) + \chi_1 \left(\frac{i}{T_2} + \Omega - \kappa v \right) \right].$$

1. Robinson E. J. // Phys. Rev. A. 1985. V. 31. P. 3986.
2. Pegg D. T. // J. Phys. B: At Mol. Phys. 1985. V. 18. P. 415.
3. Pegg D. T. // Opt. Comm. 1986. V. 57. P. 185.
4. Нюе F. T. // Phys. Rev. A. 1984. V. 30. P. 2100.
5. Данилейко М. В., Негрийко А. М., Романенко В. И и др. // ЖТФ. 1988. Т. 58. № 6. С. 1174.
6. Альтшуль И. М., Лопасов В. П., Творогов С. Д. Распространение в двухуровневой среде волн, параметрически связанных Раби-резонансом. Томск, 1988. (Препринт/ИОА СО АН СССР, № 67).

Институт оптики атмосферы СО АН СССР,
Томск

Поступила в редакцию
29 апреля 1991 г.

S.D. Tvorogov, V.G. Fedoseev, K.N. Yugay. **Propagation of the Amplitude Modulated Laser Radiation through a Gas of the Two-Level Atoms.**

Propagation of the amplitude modulated electromagnetic wave through a gas of resonant atoms is considered. It is shown that the nonlinear transfer of the strong field energy to light fields takes place under some conditions. Numerical calculations of the fields intensities are presented.